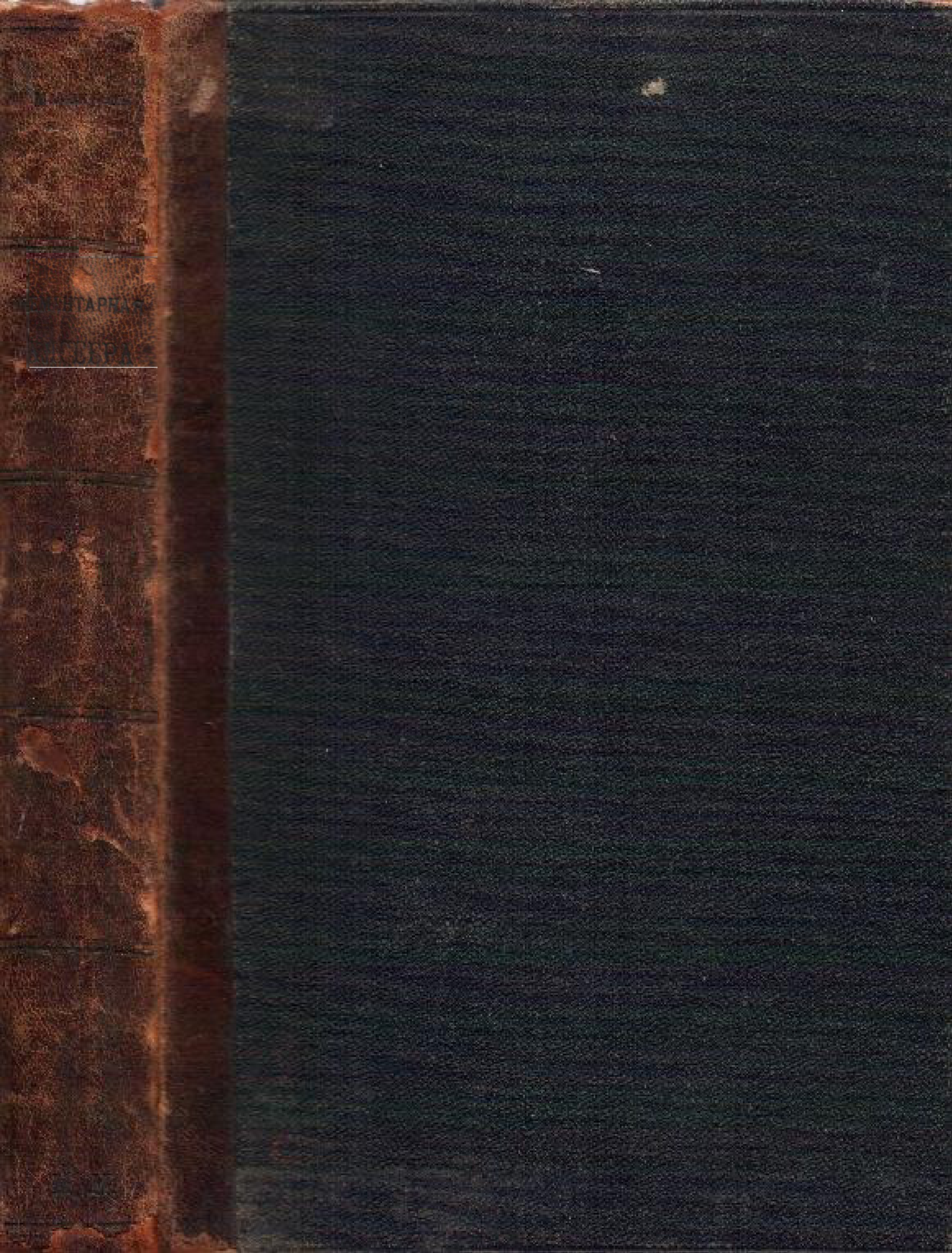


ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

УРАВНЕНІЯ и НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ и ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

ГЛАВА XXVIII.

Мнимыя величины и дѣйствія надъ ними.—Задачи.

434. Происхожденіе мнимыхъ количествъ.—Мы видѣли, что извлеченіе корня привело къ открытію двоякаго рода новыхъ величинъ—*несоизмѣримыхъ* и *мнимыхъ*. Съ величинами перваго рода мы уже ознакомились; переходимъ къ изученію величинъ втораго рода — мнимыхъ.

Пусть требуется извлечь $\sqrt{-49}$; очевидно, что по абсолютной величинѣ этотъ корень равняется 7; но онъ не можетъ быть равенъ ни $+7$, ни -7, ибо и $(+7)^2$ и $(-7)^2$ даютъ $+49$. Такимъ образомъ, квадратный корень изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Къ тому-же заключенію придемъ и относительно $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[8]{-17}$, вообще относительно $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$. Итакъ, вообще: корень четной степени изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ, и представляетъ поэтому *новый* разрядъ величинъ: ихъ называютъ *мнимыми*, въ отличіе отъ обыкновенныхъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, называемыхъ *дѣйствительными*.

435. Приведеніе мнимаго количества къ виду $a.\sqrt{-1}$. — Всякое мнимое количество приводится въ зависимость отъ простѣйшаго мнимаго выраженія: $\sqrt{-1}$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя мнимое выраженіе $\sqrt{-49}$ и разложивъ -49 на множители 49×-1, а затѣмъ примѣнивъ правило извлеченія корня изъ произведенія, послѣдовательно найдемъ:

$$\sqrt{-49} = \sqrt{49 \times -1} = \sqrt{49} \times \sqrt{-1} = \pm 7.\sqrt{-1};\text{ и вообще}$$

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2.-1} = \sqrt{a^2}.\sqrt{-1} = \pm a\sqrt{-1}.$$

Отсюда видно, что всякое мнимое количество можно представить подъ видомъ произведенія изъ $\sqrt{-1}$ на нѣкоторое положит. или отрицат. (соизмѣримое или несоизм.) число; слѣд. мнимое число составляется изъ $\sqrt{-1}$ точно такимъ же образомъ, какъ дѣйствительное число изъ положительной или отрицат. единицы. Поэтому $\sqrt{-1}$ разсматриваютъ какъ нѣкоторую новую, особаго рода, *единицу*, и называютъ ее *мнимою единицею*. *Гауссъ* предложилъ обозначить ее буквою i. Знакъ i *Коши* называлъ *ключемъ*.

Такимъ образомъ, вмѣсто $5\sqrt{-1}$ пишутъ $5i$; вмѣсто $\pm a\sqrt{-1}$ пишутъ $\pm ai$.

436. Общій видъ всякаго числа. — Мнимое выраженіе вида $a+bi$, состоящее изъ дѣйствительной части a и чистаго мнимаго члена bi, называется *комплекснымъ количествомъ* (т. е. составнымъ) или просто *комплексомъ*; въ немъ a и b — дѣйствительныя количества, причемъ b называется *коэффиціентомъ* при мнимой единицѣ. Два комплексныя количества: $a+bi$ и $a-bi$, различающіяся только знаками коэффиціента b, называются *сопряженными*.

Комплексное количество есть самая общая форма чиселъ: въ немъ заключаются дѣйствительныя и чистыя мнимыя числа какъ частные случаи. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $b=0$, получаемъ дѣйствительное количество a; полагая же $a=0$, находимъ чистое мнимое количество bi.

Модуль.—Абсолютная величина квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ дѣйствительной части и коэффиціента при мнимомъ знакѣ i, т. е. $\sqrt{a^2+b^2}$, наз. *модулемъ* комплекснаго выраженія. Такимъ образомъ:

модуль комплекса $3+4i$ равенъ $\sqrt{3^2+4^2}=5$;

модуль комплекса $7-8i$ равенъ $\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}$.

Если въ выраженіи $a+bi$ положить $b=0$, то комплексъ дастъ дѣйствительное количество a; модуль же обратится въ $\sqrt{a^2}=a$, т. е. *модуль дѣйствительнаго количества равенъ его абсолютной величинѣ*.

437. Степени i. — Прежде всего мы должны разсмотрѣть возвышеніе въ степень мнимой единицы i.

1. — Очевидно, $i^1=(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$.

2. — $i^2=(\sqrt{-1})^2$; нахожденіе результата можетъ повести въ данномъ случаѣ къ нѣкоторымъ недоразумѣніямъ, и потому требуетъ разъясненія. По опредѣленію корня имѣемъ $(\sqrt{-1})^2=-1$; съ другой стороны: $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{+1}=\pm 1$; спрашивается, что же брать для i^2: -1, или ± 1? *Безу* разъяснилъ это недоразумѣніе, замѣчая, что когда мы не знаемъ происхожденія подкореннаго количества въ формулѣ $\sqrt{a^2}$, то должны брать для корня двойной знакъ, т. е. полагать $\sqrt{a^2}=\pm a$; но когда знаемъ происхожденіе подкореннаго количества, т. е. знаемъ, получилось-ли a^2 отъ умноженія $(+a)(+a)$, или же отъ умноженія $(-a)(-a)$, то корень слѣдуетъ брать съ однимъ знакомъ: въ первомъ случаѣ съ $+$, во второмъ съ $-$. Этотъ случай, очевидно, относится къ выраженію $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{+1}$: здѣсь подкоренное число $+1$ получилось отъ возвышенія въ квадратъ -1, а не $+1$, а потому для $\sqrt{+1}$ *въ данномъ случаѣ* надо брать значеніе: -1. Этимъ всякое недоразумѣніе устранено. Итакъ, $i^2=-1$.

3. — $i^3 = i^2.i = -1.\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, или $-i$.

4. — $i^4 = i^2.i^2 = -1 \times -1 = +1$.

Возводя затѣмъ i въ слѣдующія высшія степени, найдемъ прежнія значенія степеней. Такъ:

$$i^5 = i^4.i = +1.i = +i;\quad i^6 = i^4.i^2 = +1.-1 = -1;\quad i^7 = i^6.i = -i;$$
$$i^8 = i^4.i^4 = +1 \text{ и т. д.}$$

Можно доказать, что и при дальнѣйшемъ увеличеніи показателей будутъ періодически повторяться все тѣ же четыре значенія степеней, т. е. $+i$, -1, $-i$ и $+1$. Въ самомъ дѣлѣ, по отношенію къ дѣлителю 4 всѣ цѣлыя числа можно разбить на четыре группы: 1) числа, дѣлящіяся на 4 безъ остатка; 2) числа, дающія при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 1; 3) числа, дающія при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 2; 4) дающія, при дѣлителѣ $=4$, остатокъ 3. Всѣ они заключаются, поэтому, въ четырехъ формулахъ: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, гдѣ n — какое угодно цѣлое положительное число.

Давая показателю каждую изъ этихъ четырехъ формъ, получимъ послѣдовательно:

1. — $i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1$.

2. — $i^{4n+1} = i^{4n}.i = +1.i = +i$.

3. — $i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = +1.-1 = -1$.

4. — $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = +1.-i = -i$.

Отсюда заключаемъ: *всѣ четныя степени* i *дѣйствительны, и равны:* $+1$, *когда показатель есть число кратное 4, и* -1, *когда четный показатель не дѣлится безъ остатка на 4; всѣ нечетныя степени* i *мнимы, и равны:* $+$i, *когда показатель при дѣленіи на 4 даетъ остатокъ 1, и* $-$i, *когда при дѣленіи показателя на 4 получается остатокъ 3.*

Напр., при дѣленіи 17 на 4 остатокъ $=1$, слѣд. $i^{17} = +i$, и т. д.

438. Теорема.—*Чтобы комплексъ* $a+bi$ *равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы дѣйствительная часть и коэффиціентъ при* i *равнялись нулю, т. е. чтобы* $a=o$ *и* $b=o$.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство $a+bi=o$ даетъ $a=-bi$, откуда, возвышая обѣ части въ квадратъ, и замѣчая, что

$i^2 = -1$, имѣемъ: $a^2 = b^2.-1$, или $a^2 = -b^2$, откуда $a^2+b^2=o$.

Но сумма квадратовъ двухъ дѣйствительныхъ количествъ a и b тогда только можетъ равняться нулю, когда каждое количество отдѣлено равно нулю; сл. $a=o$ и $b=o$.

Обратно, если $a=o$ и $b=o$, то оба члена комплекса обращаются въ o, и слѣд. $a+bi=o$.

439. Теорема. — *Чтобы два комплекса были равны, необходимо и достаточно чтобы дѣйствительныя части и коэффиціенты при* i *были отдѣльно равны между собою.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія

$$a+bi=\alpha+\beta i$$

по перенесеніи всѣхъ членовъ въ первую часть и по вынесеніи i за скобки, имѣемъ

$$(a-\alpha)+(b-\beta)i=o,$$

откуда по предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$a-\alpha=o \quad \text{и} \quad b-\beta=o, \quad \text{или} \quad a=\alpha \quad \text{и} \quad b=\beta.$$

Слѣд., сказанное условіе необходимо. Оно и достаточто, ибо при $a=\alpha$ и $b=\beta$ оба комплекса становятся тождественными.

Дѣйствія надъ комплексными выраженіями.

440. Условившись правила, найденныя нами для дѣйствій надъ дѣйствительными количествами, распространять и на мнимыя, мы придемъ къ тому замѣчательному выводу, что *результатъ всякаго дѣйствія надъ комплексами приводитъ къ выраженіямъ того же вида.*

1. **Сложеніе.** Пусть требуется сложить $a+bi$ съ $c+di$. Прилагая сюда правило сложенія дѣйствительныхъ количествъ, найдемъ: $(a+bi)+(c+di)=$ $=a+bi+c+di$; или, перемѣняя порядокъ членовъ и выводя i за скобки, получимъ:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d).i,$$

выраженіе того же вида какъ и слагаемыя.

Примѣръ. $(5+4i)+(-7-9i)=-2-5i.$

Примѣчаніе. Сумма двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть величина дѣйствительная; въ самомъ дѣлѣ:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a.$$

2. **Вычитаніе.** Вычитая $c+di$ изъ $a+bi$, имѣемъ

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i,$$

выраженіе того же вида, что и данныя.

3. **Умноженіе.** Примѣняя правило умноженія многочленовъ, данное для дѣйствительныхъ количествъ, и замѣчая, что $i^2=-1$, найдемъ:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=ac+bci+adi-bd=(ac-bd)+$$
$$+(bc+ad).i,$$

выраженіе того же вида, какъ и сомножители.

Такъ какъ произведеніе двухъ комплексовъ есть выраженіе того-же вида, то, умноживъ это произведеніе на третій комплексъ, получимъ снова выраженіе комплексной формы и т. д. Слѣд. теорема справедлива для какого угодно числа мнимыхъ множителей.

Примѣръ. $(3+5i)(4-7i)=12+20i-21i+35=47-i.$

Примѣчаніе. Взявъ сопряженные комплексы, имѣемъ:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2.i^2=a^2+b^2,$$

т. е. *произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть дѣйствительное положительное количество, равное квадрату ихъ общаго модуля.*

4. **Дѣленіе.** Пусть требуется раздѣлить $a+bi$ на $c+di$. Изображая частное въ видѣ дроби, имѣемъ

$$\frac{a+bi}{c+di}.$$

Для уничтоженія мнимости знаменателя, множимъ числителя и знаменателя на $c-di$ (выраженіе, сопряженное съ знаменателемъ), и находимъ послѣдовательно:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i.$$

Примѣръ. $\frac{10+15i}{1+2i}=\frac{(10+15i)(1-2i)}{5}=\frac{40-5i}{5}=8-i.$

5. **Возвышеніе въ степень.** Такъ какъ возвышеніе въ *цѣлую положительную степень* совершается рядомъ послѣдовательныхъ умноженій, а произведеніе комплексовъ есть выраженіе того же вида, то и степень комплекса имѣетъ тотъ же видъ. Слѣд.

$$(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\ .\ .\ .\ .\ .\ (a+bi)=P+Qi,$$

гдѣ P и Q—дѣйствительныя количества.

Примѣры. I. $(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi.$

II. $$(1-\sqrt{3}.i)^3=1-3.\sqrt{3}.i+3.(\sqrt{3}.i)^2-(\sqrt{3}.i)^3$$
$$=1-3\sqrt{3}.i-9+3\sqrt{3}.i=-8.$$

Если показатель степени — цѣлое отрицательное число, то

$$(a+bi)^{-n}=\left(\frac{1}{a+bi}\right)^n=\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)^n=\frac{M+Ni}{(a^2+b^2)^n}=P+Qi,$$

слѣд. степень имѣетъ тотъ же видъ.

6. **Извлеченіе корня.** Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ комплекса $a+bi$. Докажемъ, что результатъ дѣйствія и въ этомъ случаѣ будетъ комплексъ того же вида, т. е. что

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.\ \ .\ \ .\ \ .\ (1).$$

Предложеніе это будетъ доказано, если окажется возможнымъ найти для x и y такія *дѣйствительныя* значенія, которыя удовлетворяли бы этому равенству. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ для освобожденія первой части отъ радикала, получимъ ур.

$$a+bi=x^2-y^2+2xyi\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Мы знаемъ (§ 439), что такое равенство возможно только тогда, когда дѣйствительныя и мнимыя количества отдѣльно равны между собою; слѣд. ур. (2) распадается на два:

$$x^2-y^2=a\quad \text{и}\quad 2xy=b\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Такимъ образомъ неизвѣстныя x и y должны удовлетворять двумъ уравненіямъ второй степени, изъ которыхъ они всегда могутъ быть опредѣлены. Для этого возводимъ оба ур-нія въ квадратъ и складываемъ:

$$x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2=a^2+b^2, \quad \text{или} \quad (x^2+y^2)^2=a^2+b^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Передъ радикаломъ надо брать одинъ знакъ $+$, потому что первая часть, какъ сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ, всегда положительна. Такимъ образомъ, система ур-ній (3) замѣняется слѣдующею

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad x^2-y^2=a.$$

Складывая сначала, а потомъ вычитая эти ур-нія, находимъ

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}, \qquad 2y^2=-a+\sqrt{a^2+b^2},$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \text{ и } y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Такъ какъ абсолютная величина $\sqrt{a^2+b^2}$ больше абсолютной величины a или $-a$, и корень этотъ находится подъ верхнимъ радикаломъ со знакомъ $+$, то подкоренная величина въ выраженіяхъ x и y положительна, а потому x и y — дѣйствительны. Такимъ образомъ, всегда можно найти для x и для y дѣйствительныя количества, удовлетворяющія ур-нію (1), а потому преобразованіе, выражаемое этимъ ур-мъ, всегда возможно.

Уравненіе $2xy=b$ показываетъ, что когда b положительно, x и y должны имѣть одинаковые знаки, когда же b отрицательно, знаки x и y должны быть разные. Поэтому, разумѣя подъ b — абсолютное число, и сл. знаки при b — окончательными, имѣемъ двѣ формулы:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,.\,i\right] \;.\;.\;.\;. \text{ (I)}$$

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,.\,i\right] \;.\;.\;.\;. \text{ (II)}$$

Примѣры. I. Пусть требуется преобразовать $\sqrt{5+12i}$.

Полагая въ формулѣ (I) $a=5$, $b=12$, найдемъ:

$$\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2+12^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-5+\sqrt{5^2+12^2}}{2}}\,.\,i\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{5+13}{2}}+\sqrt{\frac{-5+13}{2}}\,.\,i\right]=\pm(3+2i).$$

II. Извлечь квадратный корень изъ $3-4i$.

Полагая въ формулѣ (II) $a=3$ и $b=4$, найдемъ:

$$\sqrt{3-4i}=\pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\;.\;i\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}}-\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\;.\;i\right]=\pm(2-i).$$

Здѣсь мы разсматривали только квадратные корни изъ отрицательныхъ чиселъ и изъ комплексовъ. Далѣе будетъ указано, что и корни какого угодно порядка представляютъ комплексы того же вида, т. е. $a+bi$.

441. *Приложенія.* Приводимъ нѣкоторыя приложенія, съ цѣлію показать, какимъ образомъ употребленіе комплексныхъ выраженій даетъ возможность безъ труда достигать результатовъ, выводъ которыхъ безъ помощи этого рода выраженій представлялъ бы значительныя трудности.

Теорема I. *Если данное число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его также есть сумма двухъ квадратовъ.*

Пусть n есть число, равное суммѣ двухъ квадратовъ a^2 и b^2, т. е.

$$n=a^2+b^2.$$

Замѣтивъ, что a^2+b^2 есть произведеніе двухъ мнимыхъ сопряженныхъ выраженій $a+bi$ и $a-bi$, замѣняемъ это выраженіе слѣдующимъ:

$$n=(a+bi)(a-bi).$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$n^2=(a+bi)^2.(a-bi)^2=(a^2-b^2+2abi)(a^2-b^2-2abi)=$$
$$(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2,$$

т. е. n^2 есть сумма квадратовъ количествъ: a^2-b^2 и $2ab$. Такимъ образомъ, не только теорема доказана, но полученная формула указываетъ и самый способъ разложенія n^2 на сумму двухъ квадратовъ.

Пусть, напр., $n=5$. Это число есть сумма двухъ квадратовъ: 2^2+1^2. Полагая $a=2$ и $b=1$, по найденной формулѣ имѣемъ: $n^2=(2^2-1^2)^2+(2.2.1)^2$, или $25=3^2+4^2$.

Положивъ теперь $n=25$, $a=4$, $b=3$, по той же формулѣ найдемъ: 25^2 или $625=(4^2-3^2)^2+(2.4.3)^2=7^2+24^2$; и т. д.

Теорема II. *Произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммѣ двухъ квадратовъ.*

Пусть даны четыре комплекса: $a+bi$, $a-bi$, $a'+b'i$, $a'-b'i$ попарно сопряженные; взявъ произведеніе

$$(a+bi)(a-bi)(a'+b'i)(a-b'i),$$

помноживъ перваго множителя на второй и третьяго на четвертый, найдемъ: $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$. Если же помножимъ перваго на третій и втораго на четвертый, получимъ $[aa'-bb'+(ab'+ba')i]\;.\;[aa'-bb'-(ab'+ba')i]$, или $(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2$. Слѣд.

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Если умножимъ перваго на четвертый и втораго на третій, то произведеніе приметъ видъ: $[aa'+bb'+(a'b-ab')i]\,.\,[aa'+bb'-(a'b-ab')i]$, или $(aa'+bb')^2+(a'b-ab')^2$. Такимъ образомъ имѣемъ другую формулу:

$$(a^2+b^2)(a'^2+b')^2=(aa'+bb')^2+(a'b-ab')^2 \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Формулы (1) и (2) доказываютъ предложенную теорему, показывая вмѣстѣ съ тѣмъ, что разложеніе взятаго произведенія на сумму двухъ квадратовъ можетъ быть исполнено двоякимъ образомъ. — Эта теорема была найдена *Леонардомъ Пизанскимъ*.

Теорема III. *Произведеніе двухъ чиселъ, изъ коихъ каждое есть сумма четырехъ квадратовъ, также равно суммѣ четырехъ квадратовъ.*

Взявъ тождество

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-d}=\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}\right)+\left(\frac{1}{a-c}-\frac{1}{a-d}\right),$$

выполнимъ въ немъ три указанныхъ вычитанія и освободимъ его отъ знаменателя; найдемъ

$$(b-d)(a-c)=(b-c)(a-d)+(c-d)(a-b).$$

Положивъ теперь

$$a=\frac{p+qi}{r+si},\quad b=\frac{p'+q'i}{r'+s'i},\quad c=\frac{-r+si}{p-qi},\quad d=\frac{-r'+s'i}{p'-q'i},$$

замѣнимъ въ предыдущемъ тождествѣ a, b, c и d ихъ мнимыми выраженіями; получимъ

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)=(pp'+qq'+rr'+ss')^2+$$
$$(pq'+rs'-qp'-sr')^2+(pr'+sq'-qs'-rp')^2+(ps'+qr'-sp'-rq')^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема эта принадлежитъ *Эйлеру*. Приведенное доказательство ея проще прежняго доказательства, даннаго *Эрмитомъ* и основаннаго также на употребленіи комплексовъ.

442. Задачи.

1. Нижеслѣдующія количества привести къ виду ai:

1. $\sqrt{-144}$. 2. $\sqrt{-a^4}$. 3. $\sqrt{-x^2-y^2}$. 4. $\sqrt{-9x^6}$. 5. $\sqrt{-\frac{1}{4}}$.

2. Вычислить: $(\sqrt{-1})^6$; $(\sqrt{-1})^{36}$; $(\sqrt{-1})^{21}$; $(\sqrt{-1})^{27}$; $(\sqrt{-1})^{51}$; i^7; i^{11}; i^{32}; i^{14}; i^{13}; i^{38}; i^{103}.

3. Сложить: $\alpha)$ $\sqrt{-a^4}+\sqrt{-a^2}-\sqrt{-4a^4}+\sqrt{-16a^4}-\sqrt{-81a^2}+\sqrt{-a^2}$;

$\beta)$ $\sqrt{-(x-y)^2}+\sqrt{-(x^2-2xy+y^2)}+\sqrt{-64x^2y^2}$;

$\gamma)$ $\sqrt{-25a^6}+\sqrt{-16a^6}-\sqrt{-(a-1)^2a^6}$;

$\delta)$ $\sqrt{-(m-n)^2}-\sqrt{-(n-2m)^2}+\sqrt{-4m^2n^2}-\sqrt{-4(m-n)^2}$;

$\varepsilon)$ $3+2i$, $4-2i$, $7+3i$, $8-i$, $4+2bi$.

4. Перемножить: $\alpha)$ $\sqrt{-m^2}\times(-\sqrt{-9m^4})$; $\beta)$ $i\sqrt{-28}\times i\sqrt{-32}$;

$\gamma)$ $\sqrt{x-5}\times\sqrt{5-x}$; $\delta)$ $(3+5i)(4-7i)$; $\varepsilon)$ $(\sqrt{8}-i\sqrt{12})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$;

ξ) $\sqrt{9+i\sqrt{19}}\cdot\sqrt{9-i\sqrt{19}}$; η) $(\sqrt{5}+i\sqrt{-a})^2$; κ) $(2a-3i-i\sqrt{-c})^2$;

λ) $\left(a^2i+ai-\frac{i}{a}\right)^2$; μ) $(m^2i-n^3)^3$; ν) $(x+yi)^4-(x-yi)^4$;

$$ο)\ \left\{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}+\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\right\}^3.$$

5. Раздѣлить: α) $\frac{m^2i^3}{\sqrt{-m^2}}$; β) $\frac{p^3i^4}{i\sqrt{-p^5}}$; γ) $\frac{a^2+b^2}{a-bi}$; δ) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,,i}$;

ε) $(ix\sqrt{y}+y\sqrt{xy}-\sqrt{xyz}+y\sqrt{x}-iy^2+iy\sqrt{z}-i\sqrt{xz}-y\sqrt{z}+z)$:

$(\sqrt{x}-iy+i\sqrt{z})$.

6. Уничтожить мнимость знаменателя въ дробяхъ:

α) $\frac{1-2i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}$; β) $\frac{1+i}{1-i^2}$; γ) $\frac{x+iz}{(x-iz)^2}$; δ) $\frac{1-i^3}{(1-i)^3}$; ε) $\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$;

ξ) $\frac{\sqrt{-(1+i)}-i\sqrt{-(1-i)}}{\sqrt{-(1-i)}+i\sqrt{-(1+i)}}$; η) $\frac{\sqrt{x+i\sqrt{x^2-b^2}}+\sqrt{x-i\sqrt{x^2-b^2}}}{\sqrt{x+i\sqrt{x^2-b^2}}-\sqrt{x-i\sqrt{x^2-b^2}}}$.

7. Преобразовать выраженія:

α) $\sqrt{6+8\sqrt{-1}}$; β) $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$; γ) $\sqrt{28+4\sqrt{-15}}$; δ) $\sqrt{0{,}45-3\sqrt{-0{,}0031}}$;

ε) $\sqrt{z^2+1+2\sqrt{-(z^2+2)}}$; ξ) $\sqrt{2(2y^4-y^4\sqrt{-5})}$; η) $\sqrt{6+i\sqrt{13}}+\sqrt{6-i\sqrt{13}}$;

κ) $\sqrt{10+2i\sqrt{11}}+\sqrt{10-2i\sqrt{11}}$; λ) $\sqrt{2\sqrt{-14}+13}\pm\sqrt{2\sqrt{-14}-13}$.

8). Если $A=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ и $B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, то доказать, что:

a) $A^3=1$; *b*) $B^3=1$; *c*) $A^2=B$; *d*) $B^2=A$; *e*) $A^{3n}=B^{3n}=1$;

f) $A^{3n+1}=B^{3n+2}=A$; *g*) $B^{3n+1}=A^{3n+2}=B$.

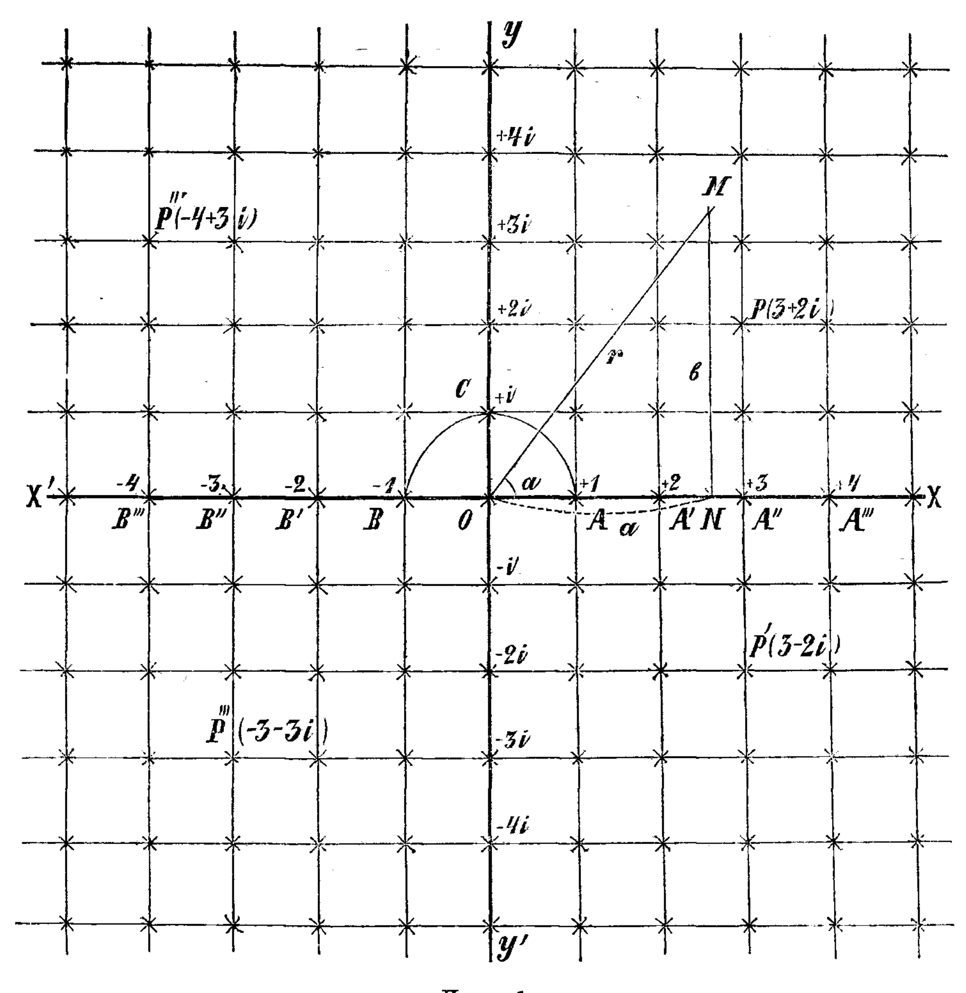
9. Во что обратится: *a*) z^2-2x+2 при $x=1\pm i$; *b*) $x^3-5x^2+12x-7$ при $x=2\mp\sqrt{-3}$.

ГЛАВА XXIX.

Геометрическое представленіе мнимыхъ величинъ.—Обобщеніе основныхъ алгебраическихъ законовъ.—Задача Алгебры.

443. Мы уже видѣли, что если взять неограниченную прямую $x'x$, на ней извѣстную точку 0 принять за начало, и условиться длинами, откладываемыми вправо отъ 0, представлять числа положительныя, то длины, отсчитываемыя влѣво отъ 0, будутъ служить геометрическимъ представленіемъ чиселъ отрицательныхъ. Такъ, если отрѣзокъ OA будетъ представлять единицу, то отрѣзки, отложенные вправо отъ 0: OA, OA′, OA″,... будутъ представлять числа +1, +2, +3,..., отрѣзки OB, OB′, OB″,..., отложенные влѣво отъ 0, изобразятъ отрицательныя числа —1, —2, —3,... Точка 0 представляетъ 0. Такимъ образомъ линія $x'x$ будетъ представлять всевозмож-

ныя *дѣйствительныя* числа—положительныя и отрицательныя; она называется поэтому *осью дѣйствительныхъ чиселъ*, или *дѣйствительною осью*.



Черт. 1.

Спрашивается, какъ представить геометрически чистыя мнимыя и комплексныя (составныя) числа? Проведя черезъ точку 0 прямую yy' перпендикулярно къ xx', опишемъ изъ точки 0 радіусомъ, равнымъ единицѣ длины, окружность; радіусъ OC будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками $OA = +1$ и $OB = -1$ діаметра; слѣд. $\overline{OC}^2 = (+1).(-1) = -1$, откуда $OC = \sqrt{-1}$, т. е. $OC = i$. Итакъ, чистыя мнимыя числа i, $2i$, $3i$,... должно отсчитывать на перпендикулярѣ yy' вверхъ отъ 0, а числа $-i$, $-2i$, $-3i$,... на томъ же перпендикулярѣ внизъ отъ 0. Поэтому прямая yy' называется *осью мнимыхъ чиселъ*, или *мнимою осью*.

Пусть требуется теперь представить геометрически комплексное число $a+bi$. Для этого на дѣйствительной оси откладываемъ числа a, вправо отъ 0, если оно положительно, и влѣво, если отрицательно. Потомъ на мнимой оси откладываемъ число bi вверхъ отъ 0, если оно положительно, и внизъ, если отрицательно. Изъ точекъ a и bi возставляемъ перпендикуляры къ осямъ: пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ и дастъ точку, которая геометрически представляетъ число $a+bi$. Напр., точка P

представляетъ число $3+2i$, точка P'—число $3-2i$, P''—число $-4+3i$, и P'''—число $-3-3i$. Согласно этому, комплексныя количества изображаются точками, наполняющими всю плоскость по обѣ стороны дѣйствительной оси; отсюда названіе *латеральныхъ количествъ*, данное *Гауссомъ* комплекснымъ числамъ.

Пусть комплексъ $a+bi$ опредѣляетъ точку M; соединивъ ее съ началомъ и назвавъ OM буквою r, изъ треугольника MNO получимъ: $OM=r=\sqrt{a^2+b^2}$. Слѣд. модуль комплекса есть длина линіи OM, соединяющей точку M съ началомъ. Одной линіи OM недостаточно для опредѣленія точки M, ибо всѣ точки плоскости, лежащія на окружности, описанной изъ 0 радіусомъ r, будутъ находиться отъ начала на разстояніи r. Но если вмѣстѣ съ длиною линіи r данъ будетъ уголъ, составляемый ею съ осью ox, то этихъ двухъ данныхъ достаточно для опредѣленія точки M. Такимъ образомъ, абсолютная длина линіи $OM=r$ и направленіе ея, выражаемое угломъ α, составляемымъ этой линіей съ ox, вполнѣ опредѣляютъ точку M, такъ-что положеніе этой точки можетъ быть представлено какъ комплексомъ $a+bi$, такъ и комплексомъ r_α, которые и называются поэтому *геометрически-равными*. r называется также *модулемъ* комплекса r_α и есть количество *существенно положительное*; уголъ α наз. *аргументомъ* комплекса: онъ считается въ направленіи xoM, обратномъ движенію часовой стрѣлки.—Согласно этому, комплексный символъ r_α можно разсматривать условно какъ сумму количествъ a и bi, каждое изъ которыхъ можетъ имѣть только два противоположныя направленія; такъ, на нашемъ чертежѣ будемъ имѣть

$$r\alpha=a+bi.$$

Аргументъ можно увеличивать или уменьшать на цѣлое число окружностей $2k\pi$, ибо направленіе линіи OM не измѣнится, если поворотить эту линію на 4, 8,... прямыхъ угловъ; сл.

$$r_\alpha=r_{\alpha+2\pi}=r_{\alpha+4\pi}=\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

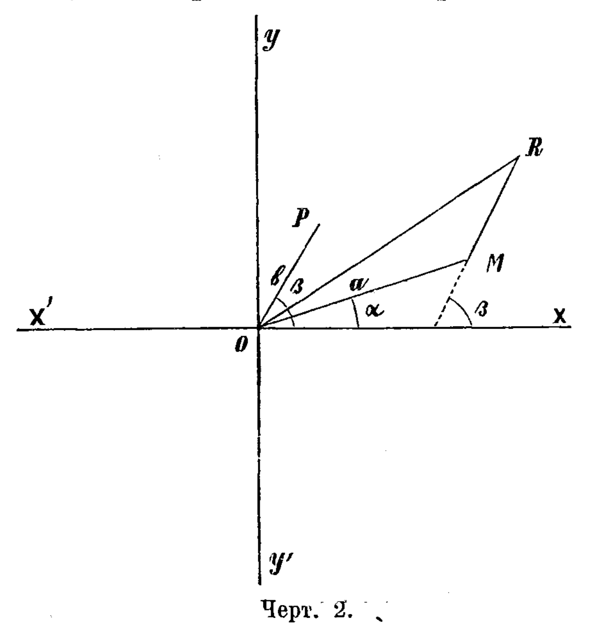
Если линію OM повернуть до совпаденія съ Ox, то уголъ α обратится въ ноль, и комплексъ приметъ видъ r_0. Но отрѣзокъ полуоси ox представляетъ дѣйствительное положительное количество; сл. послѣднее можетъ быть изображено символомъ r_0, гдѣ r — его абсолютная величина.—Увеличивъ уголъ α до π, получимъ комплексъ r_π, представляющій, слѣд., дѣйствительное отрицательное число. Знаки o и π играютъ роль знаковъ $+$ и $-$. Чистое мнимое количество bi изобразится комплексомъ $b_{\frac{\pi}{2}}$; мнимое $-bi$ комплексомъ $b_{\frac{3\pi}{2}}$.

Примѣчаніе. Вычисленіе мнимыхъ вида $a+bi$ было впервые изложено *Бомбелли* въ его *алгебрѣ* (1579); но заслуга введнія въ обычай употребленія въ анализѣ мнимыхъ величинъ принадлежитъ знаменитому *Эйлеру* (1707—1783). Первая попытка геометрическаго представленія этихъ количествъ принадлежитъ члену Петербургской Академіи Наукъ *Генриху Кюну* (1690—1769) и относится къ 1750 году. Аббатъ *Бюэ* (Buée) первый предложилъ, въ 1806, представлять мнимыя единицы на оси перпендикулярной къ дѣйствит. оси. Въ томъ же году *Робертъ Аргандъ*, изъ Женевы, приложилъ новую теорію къ доказательству нѣкоторыхъ теоремъ. Но усовершенствованіе этой теоріи принадлежитъ *Гауссу*, и ему же обязаны комплексныя количества правомъ гражданства въ наукѣ. Благодаря этимъ количествамъ, ученикъ Гаусса *Риманнъ* пришолъ къ весьма важнымъ открытіямъ.—Развитію теоріи мнимыхъ количествъ также много способствовали *Коши, Лежандръ, Абель, Якоби.*

444. Обобщеніе основныхъ алгебраическихъ законовъ. —Опредѣленія дѣйствій остаются прежнія; но какъ понятіе о комплексѣ шире понятія объ обыкновенныхъ

положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ, то и дѣйствія надъ комплексами должны получить болѣе широкій смыслъ.

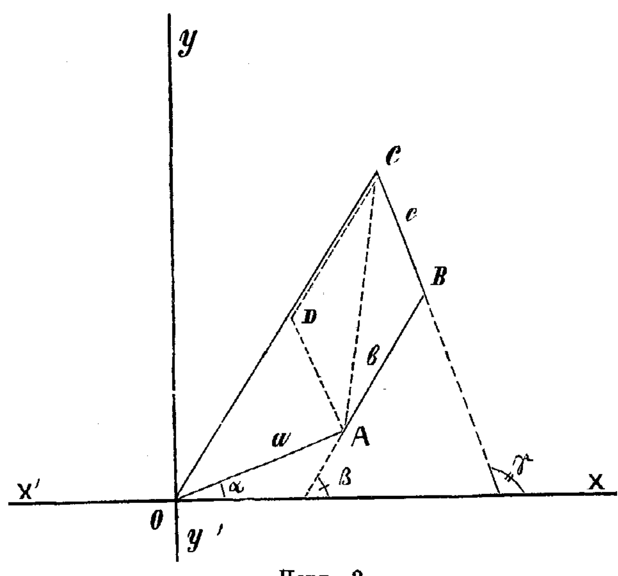
445. Сложеніе комплексовъ. — Такъ какъ всякій комплексъ опредѣляется длиною нѣкоторой линіи и ея направленіемъ, то подъ сложеніемъ комплексовъ разумѣютъ слѣдующую операцію: *сложить нѣсколько комплексовъ значитъ помѣстить начало втораго въ конецъ перваго, давая второму направленіе, опредѣляемое его аргументомъ; начало третьяго въ конецъ втораго и т. д. Суммою будетъ линія, соединяющая начало перваго комплекса съ концомъ послѣдняго.* Очевидно, это представленіе сложенія есть не болѣе какъ обобщеніе понятія о сложеніи противоположныхъ величинъ, заключая въ себѣ послѣднее, а равно и ариѳметическое сложеніе, какъ частные случаи.



Черт. 2.

Такъ, если требуется сложить два комплекса a_α и b_β, чертимъ линію $OM = a$ подъ угломъ α съ положительнымъ направленіемъ оси $x'x$, затѣмъ наносимъ отъ точки M линію $MR = b$ подъ угломъ β съ тою же осью и соединяемъ точки O и R: линія OR по величинѣ и направленію и выразитъ искомую сумму.

Три точки, O, M и R, вообще, лежатъ не на одной прямой, образуя треугольникъ MOR; замѣчая, что въ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ, но больше ихъ разности, находимъ, что: *модуль суммы двухъ комплексовъ меньше или равенъ суммѣ модулей слагаемыхъ, и больше или равенъ ихъ разности.*



Черт. 3.

Поступая такимъ же образомъ съ нѣсколькими комплексами a_α, b_β, c_γ, найдемъ ихъ сумму, выражаемую по величинѣ и направленію линіей OC, соединяющей начало 1-го комплекса съ концомъ послѣдняго.

Когда всѣ вершины многоугольнаго контура OABC находятся не на одной прямой, то OC, какъ прямая, будетъ меньше ломаной OABC; если же всѣ вершины O, A, B, C, будутъ на одной прямой, то OC будетъ меньше или равна суммѣ сторонъ контура. Итакъ: *модуль суммы нѣсколькихъ комплексовъ равенъ или меньше суммы модулей слагаемыхъ.*

446. Законъ перемѣстительный въ сложеніи. Возьмемъ тѣже три комплекса a_α, b_β, c_γ. Чтобы построить сумму $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$ проводимъ послѣдовательно прямыя OA$=a$, AB$=b$, BC$=c$ подъ углами α, β и γ съ OX. Сумма выразится линіей OC. Чтобы построить сумму $a_\alpha + c_\gamma + b_\beta$, проведемъ изъ точки A прямую AD, равную и параллельную BC, и соединимъ D съ C; изъ равенства и параллельности сторонъ AD и BC слѣдуетъ что фигуры ADCB есть параллелограмъ, сл. DC и AB равны и параллельны; такимъ образомъ прямая AD представляетъ комплексъ c_γ, а DC—комплексъ b_β. Видимъ, что конецъ послѣдняго слагаемаго суммы $a_\alpha + c_\gamma + b_\beta$ находится въ той же точкѣ C, какъ и конецъ послѣдняго слагаемаго суммы $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$: обѣ суммы, слѣдоват., равны.

447. Законъ сочетательный въ сложеніи. Разсмотримъ тѣ же три комплекса: $a_\alpha =$ OA, $b_\beta =$ AB и $c_\gamma =$ BC. Ихъ сумма равна OC. Но AC$= b_\beta + c_\gamma$, и OC можно разсматривать какъ сумму комплексовъ OA и AC. Слѣд.

$$a_\alpha + b_\beta + c_\gamma = a_\alpha + (b_\beta + c_\gamma),$$

т. е. *комплексы сочетательны въ сложеніи.*

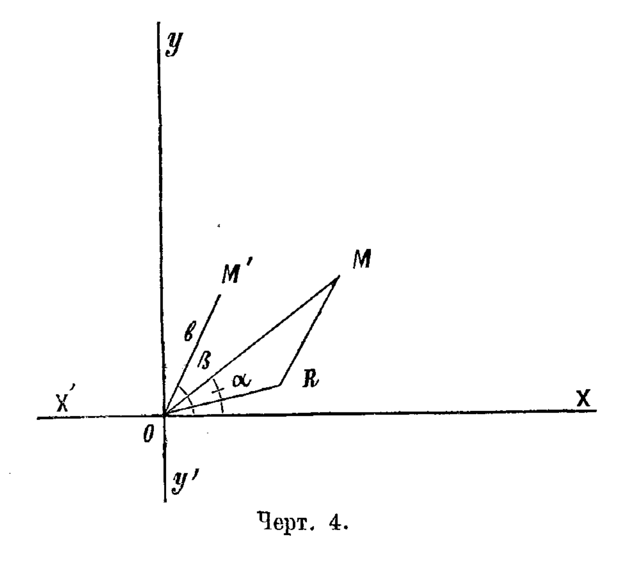
448. Вычитаніе комплексовъ. Вычитаніе опредѣляется какъ дѣйствіе, обратное сложенію. Легко видѣть, что *вычитаніе комплекса a_α сводится къ приданію противоположнаго комплекса $a_{\alpha+\pi}$*. Въ самомъ дѣлѣ, сумма двухъ противоположныхъ комплексовъ a_α и $a_{\alpha+\pi}$, какъ не трудно убѣдиться, равна нулю. Слѣд.

$$m_\mu + a_{\alpha+\pi} + a_\alpha = m_\mu + (a_{\alpha+\pi} + a_\alpha) = m_\mu + 0 = m_\mu.$$

Такимъ образомъ, $m_\mu + a_{\alpha+\pi}$ есть результатъ вычитанія $m_\mu - a_\alpha$, потому что этотъ результатъ, сложенный съ a_α, даетъ m_μ.

Пусть изъ комплекса OM$= a_\alpha$ нужно вычесть коплексъ OM'$= b_\beta$. Согласно вышеприведенному правилу вычитанія должно къ OM придать комплексъ, противоположный комплексу OM', т. е. отъ точки M провести линію MR, параллельную OM' и равную b, но въ противоположномъ направленіи. Сумма OM и MR, т. е. OR и представитъ искомую разность.

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что т. к. точки O, M, R, вообще, составляютъ треугольникъ, то: *модуль разности двухъ комплексовъ не больше суммы модулей обоихъ комплексовъ и не меньше ихъ разности.*



Черт. 4.

449. Умноженіе комплексовъ. Распространяя опредѣленіе умноженія на комплексы, мы должны разумѣть подъ этимъ дѣйствіемъ слѣдующее: *умножить комплексъ*

$\mathfrak{b}_\beta$ *на* $\mathfrak{a}_\alpha$ *значитъ произвести надъ множимымъ тѣ же дѣйствія, какія нужно произвести надъ положительной единицей для составленія изъ нея множителя.* Но чтобы изъ $+1$ или изъ 1_0 составить a_α, надо: 1) помножить абсолютную единицу на a и помѣстить a на OX, вслѣдствіе чего получится a_0; 2) повернуть a_0 на уголъ α. Слѣд., чтобы умножить b_β на a_α, нужно сначала помножить модуль множимаго на a, вслѣдствіе чего получится $(ba)_\beta$, затѣмъ этотъ комлексъ по вернуть на уголъ α, т. е. къ аргументу β множимаго придать аргументъ множителя. Итакъ: *перемножить комплексы значитъ перемножить ихъ модули и сложить аргументы:* $\mathfrak{b}_\beta \cdot \mathfrak{a}_\alpha = (\mathfrak{ba})_{\beta+\alpha}$.

Въ этомъ опредѣленіи заключаются, какъ частные случаи, опредѣленія умноженія абсолютныхъ чиселъ и противоположныхъ. Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$(+a) \cdot (+b) = a_0 \cdot b_0 = (ab)_0 = +ab;$$
$$(-a) \cdot (+b) = a_\pi \cdot b_0 = (ab)_{\pi+0} = (ab)_\pi = -ab;$$
$$(+a) \cdot (-b) = a_0 \cdot b_\pi = (ab)_\pi = -ab;$$
$$(-a) \cdot (-b) = a_\pi \cdot b_\pi = (ab)_{2\pi} = (ab)_0 = +ab$$

450. Свойства произведенія. Изъ опредѣленія умноженія комплексовъ прямо выводимъ:

I. $a_\alpha . b_\beta = (ab)_{\alpha+\beta}$ но $ab = ba$ и $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, слѣд. $(ab)_{\alpha+\beta} = (ba)_{\beta+\alpha}$, или по опредѣленію умноженія, $b_\beta \cdot a_\alpha$. Итакъ

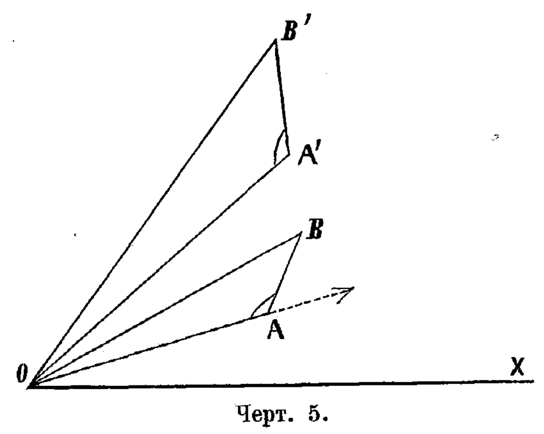
$$a_\alpha \cdot b_\beta = b_\beta \cdot a_\alpha,$$

т. е. *произведеніе двухъ множителей не измѣняется отъ перемѣны ихъ порядка.*

II. $a_\alpha (b_\beta c_\gamma) = a_\alpha [(bc)_{\beta+\gamma}] = (abc)_{\alpha+\beta+\gamma} = a_\alpha b_\beta c_\gamma$,

т. е. *для умноженія комплекса* $\mathfrak{a}_\alpha$ *на произведеніе двухъ другихъ,* $\mathfrak{b}_\beta$ *и* $\mathfrak{c}_\gamma$, *нужно* $\mathfrak{a}_\alpha$ *умножить послѣдовательно на каждый изъ комплексовъ* $\mathfrak{b}_\beta$ *и* $\mathfrak{c}_\gamma$. Въ этомъ заключается *законъ сочетательный въ умноженіи.*

Основываясь на этихъ двухъ положеніяхъ, не трудно доказать законъ перемѣстительный для какого угодно числа множителей.



Черт. 5.

III. Докажемъ равенство

$$a_\alpha(b_\beta + c_\gamma) = a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma,$$

выражающее *законъ распредѣлительный* въ умноженіи. Комплексы b_β и c_γ, подлежащіе сложенію, образуютъ между собою нѣкоторый уголъ $\gamma - \beta$, дополнительный до π къ углу A треугольника OAB. Послѣдній вполнѣ опредѣляется этимъ угломъ и сторонами b и c. Третья сторона выражаетъ по величинѣ и направленію ихъ сумму $b_\beta + c_\gamma$.

Если каждую изъ величинъ b_β и c_γ помножимъ на a_α, то модули ихъ умножатся на a и сл. сохранятъ тоже самое численное отношеніе. Аргументы β и γ получатъ одно и тоже приращеніе α, слѣд., сохранятъ туже разность. Поэтому, если соста-

вить сумму частныхъ произведеній $a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$, то получится треугольникъ OA′B′ подобный OAB, такъ какъ углы A и A′ равны и заключающія ихъ стороны пропорціональны. Слѣд. OB′ будетъ имѣть модулемъ OB, умноженное на a, аргументъ же комплекса OB′ будетъ $= A'OX + BOA = AOX + A'OA + BOA = BOX + A'OA = BOX + \alpha$, т. е. прежнему аргументу, сложенному съ α. Итакъ, сумма $a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma =$ произведенію $a_\alpha (b_\beta + c_\gamma)$.

IV. $a_\alpha . 0 = a_\alpha . 0_{\ 0} = (a.0)_{\alpha+0} = 0_\alpha = 0$.

Слѣд., *произведеніе двухъ комплексовъ равно нулю, когда модуль одного изъ нихъ равенъ нулю.*

V. $a_\alpha . 1 = a_\alpha . 1_{\ 0} = (a.1)_\alpha = a_\alpha$.

Слѣд., *умноженіе комплекса на 1 не измѣняетъ его.*

451. Дѣленіе. Сохраняя прежнее опредѣленіе этого дѣйствія, находимъ, что частное отъ раздѣленія $a_\alpha : b_\beta$ равно

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ это частное на дѣлителя, имѣемъ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta} . b_\beta = \left(\frac{a}{b} . b\right)_{\alpha-\beta+\beta} = a_\alpha,$$

т. е. дѣлимое. Итакъ: чтобы раздѣлить одинъ комплексъ на другой, надо: *модуль дѣлимаго раздѣлить на модуль дѣлителя, а изъ аргумента дѣлимаго вычесть аргументъ дѣлителя.*

452. Возвышеніе въ степень. Пусть показатель степени n — число цѣлое и положительное; по опредѣленію возвышенія въ степень, имѣемъ:

$(a_\alpha)^n = a_\alpha . a_\alpha \ . \ . \ . \ . \ . \ a_\alpha$ (n разъ); отсюда, по правилу умноженія:

$$a^n_\alpha = (a.a \ . \ . \ . \ . \ a)_{\alpha+\alpha+ \ \cdots \ +\alpha} = a^n_{n\alpha}.$$

Пусть показатель степени будетъ цѣлое отрицательное число $-n$. По свойству такого показателя, имѣемъ:

$$(a_\alpha)^{-n} = \frac{1}{(a_\alpha)^n} = \frac{1}{a^n_{\alpha n}} = \frac{1_0}{a^n_{\alpha n}} = \left(\frac{1}{a^n}\right)_{0-\alpha n} = a^{-n}_{-\alpha n}.$$

Итакъ: *чтобы возвысить комплексъ въ цѣлую степень, нужно модуль возвысить въ эту степень, а аргументъ умножить на показателя степени.*

453. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь корень порядка m (гдѣ m — цѣлое положительное число) изъ комплекса r_α, и пусть искомый корень выраженъ комплексомъ ρ_ω, такъ-что

$$\sqrt[m]{r_\alpha} = \rho_\omega.$$

По опредѣленію корня мы должны имѣть $r_\alpha = (\rho_\omega)^m$, или $r_\alpha = \rho^m_{\omega m}$. Этому равенству удовлетворимъ, полагая, что модули обѣихъ частей равны, а аргументы разнятся на число кратное 2π, такъ-что для опредѣленія ρ и ω имѣемъ ур-нія:

$$\rho^m = r, \quad m\omega = 2k\pi + \alpha,$$

гдѣ k — цѣлое положит. или отрицат. число; но r есть число положительное, а какъ

и ρ существенно положительно, какъ модуль, то оно равно ариөметическому корню изъ r. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\rho = \sqrt[m]{r}, \quad \omega = \frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}.$$

Итакъ

$$\sqrt[m]{r_\alpha} = \left(\sqrt[m]{r}\right)_{\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Опредѣлимъ, сколько различныхъ значеній получится для $\sqrt[m]{r_\alpha}$. Если въ формулѣ (1) дать k два какія нибудь значенія, разнящіяся между собою на число кратное m, то получимъ два угла, разнящіеся кратнымъ 2π; но поворотъ комплекса на уголъ кратный 2π не измѣняетъ величины комплекса. Слѣд. чтобы получить всѣ значенія $\sqrt[m]{r_\alpha}$ достаточно числу k дать m цѣлыхъ послѣдовательныхъ значеній, напр. значенія

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, m-1.$$

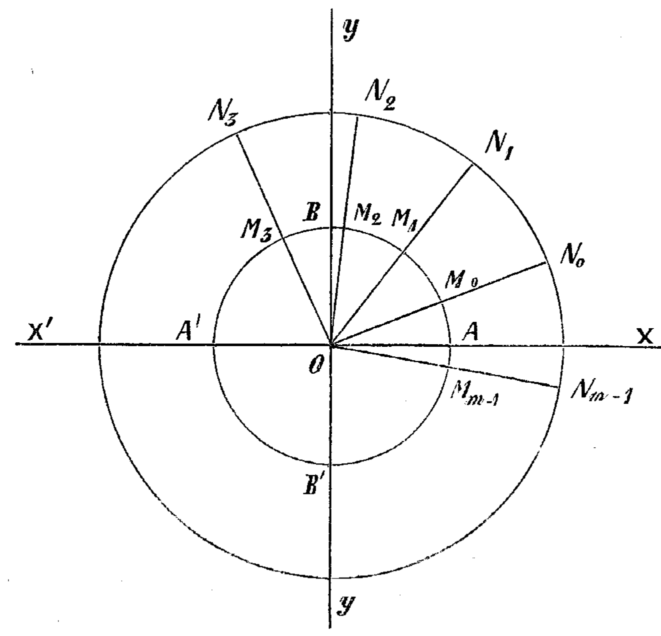
Такимъ образомъ получимъ корни, которыхъ аргументы будутъ

$$\frac{\alpha}{m}, \; \frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \; 2.\frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \ldots\ldots, (m-1).\frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m};$$

крайніе углы разнятся на $(m-1).\frac{2\pi}{m}$, т. е. менѣе чѣмъ на 2π, слѣд. два какіе угодно изъ этихъ аргументовъ имѣютъ разность, меньшую 2π, и потому даютъ *различные* комплексы. Отсюда заключаемъ, что

Всякое количество, дѣйствительное или мнимое, имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, и только m.

Представимъ эти m корней геометрически. Возьмемъ перпендикулярныя оси $x'x$ и $y'y$, и опишемъ изъ начала 0, какъ изъ центра, окружность радіусомъ равнымъ линейной единицѣ; пусть A будетъ точка пересѣченія этой окружности съ положительною частью $0x$ оси $x'x$. Отложимъ на этой окружности, начиная отъ точки A, въ приличномъ направленіи, дугу AM_0, равную по величинѣ и по знаку дугѣ $\frac{\alpha}{m}$, затѣмъ, отъ M_0 раздѣлимъ окружность на m равныхъ частей; пусть $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$ будутъ точки дѣленія. Если соединить начало O съ этими m точками дѣленія, то m радіусовъ $OM_0, OM_1, \ldots, OM_{m-1}$ будутъ комплексы модуля $=1$, а аргументы этихъ комплексовъ будутъ



Черт. 6.

$$\frac{\alpha}{m}, \; \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m}, \; \frac{\alpha}{m}+2.\frac{2\pi}{m}, \ldots\ldots, \frac{\alpha}{m}+(m-1).\frac{2\pi}{m}.$$

Затѣмъ, на каждомъ изъ этихъ радіусовъ отложимъ, начиная отъ точки 0, длину равную $\sqrt[m]{r}$; новые комплексы ON_0, ON_1, ... , ON_{m-1} представятъ m корней m-го порядка изъ даннаго количества r_α, а изъ построенія видно, что ихъ концы расположены на окружности центра 0 и радіуса $\sqrt[m]{r}$, образуя на этой окружности вершины правильнаго m—угольника.

Изъ этого построенія непосредственно видно, что при m четномъ, m корней попарно равны и противоположны по знаку, и что не можетъ быть больше двухъ дѣйствительныхъ корней, и только при m четномъ.

Изслѣдованіе—I. Пусть данное количество будетъ *дѣйствительное* и *положительное;* оно будетъ равно своему модулю r, аргументъ-же, какъ кратный 2π, всегда можно принять равнымъ 0. Такимъ образомъ

$$\sqrt[m]{r_0}=(\sqrt[m]{r})_{\frac{2k\pi}{m}}.$$

Чтобы получился дѣйствительный положительный корень, необходимо, чтобы аргументъ $\frac{2k\pi}{m}$ равнялся четному кратному π, т. е. $\frac{2k\pi}{m}=2h\pi$, откуда $k=mh$, а такъ какъ k положительно и меньше m, то необходомо, чтобы $h=o$, и слѣд. чтобы $k=o$; стало-быть въ числѣ корней будетъ одинъ положительный, и только одинъ.

Чтобы получился корень дѣйствительный отрицательный, нужно, чтобы аргументъ $\frac{2k\pi}{m}$ равнялся нечетному кратному отъ π, т. е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m}=(2h+1)\pi, \quad \text{откуда} \quad k=\frac{(2h+1)m}{2};$$

но k—цѣлое, $2h+1$—нечетное число, сл. при m нечетномъ равенство невозможно. Если же m—четное, то какъ k меньше m, необходимо, чтобы h было нулемъ, и тогда $k=\frac{m}{2}$; слѣд. при m четномъ, и только въ этомъ случаѣ, имѣется дѣйствительный отрицательный корень, по абсолютной величинѣ равный дѣйствительному положительному корню.

Чтобы два корня аргументовъ $\frac{2k\pi}{m}$ и $\frac{2k'\pi}{m}$, гдѣ k отлично отъ k', были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равнялась четному кратному отъ π,

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{2k'\pi}{m}=2h\pi, \quad \text{откуда} \quad k+k'=mh,$$

а такъ-какъ k и k' положительны, различны и меньше m, необходимо, чтобы h равнялось 1, и чтобы

$$k+k'=m.$$

Отсюда видно, что всякому значенію k, за исключеніемъ нулеваго и равнаго $\frac{m}{2}$, если m четное, т. е. за исключеніемъ случая дѣйствительныхъ корней, соотвѣтствуетъ значеніе k' отличное отъ k; слѣд. всѣ *мнимые* корни—попарно сопряженны.

Итакъ: *Если m—нечетно, всякое дѣйствительное положительное количество имѣетъ одинъ, и только одинъ, корень m-го порядка положительный, и $m-1$ m-хъ корней мнимыхъ попарно сопряженныхъ.—Если m—четно, всякое дѣйствительное положительное количество имѣетъ два корня m-го порядка дѣйствительныхъ, равныхъ и противоположныхъ по знаку, и $m-2$ корня мнимыхъ, попарно сопряженныхъ.*

Геометрическое представленіе этихъ m корней m-го порядка непосредственно приводитъ къ предыдущимъ результатамъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\alpha = 0$, то вершина M_0 совпадаетъ съ точкой A; точка N_0 находится, поэтому, на $0x$, и слѣд. существуетъ дѣйст. положит. корень ON_0. Если m четно, то будетъ другой дѣйствит. корень, отрицательный, равный предыдущему, но съ противоположнымъ знакомъ, но такого корня не будетъ при m нечетномъ; въ обоихъ случаяхъ всѣ остальные корни мнимы; и какъ многоугольникъ симметриченъ относительно $0x$, эти мнимые корни попарно сопряженны.

II. Пусть данное количество будетъ *дѣйствительно*, но *отрицательно;* оно равно своему модулю, но съ противоположнымъ знакомъ; всегда можно положить, что его аргументъ α равенъ π, такъ-что количество это будетъ r_π или $-r$, и

$$\sqrt[m]{r_\pi} = \sqrt[m]{-r} = (\sqrt[m]{r})_{\frac{(2k+1)\pi}{m}}.$$

Чтобы могъ быть дѣйствительный положительный корень, необходимо, чтобы его аргументъ былъ равенъ четному кратному отъ π, т. е. чтобы $\frac{(2k+1)\pi}{m} = 2h\pi$, откуда $2k+1 = 2mh$, что невозможно, потому-что $2k+1$ нечетно, а $2mh$ четно; и такъ, въ данномъ случаѣ, не существуетъ ни одного дѣйствит. положит. корня.

Чтобы могъ быть дѣйствительный отрицательный корень, нужно, чтобы его аргументъ $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ былъ равенъ нечетному кратному отъ π, $\frac{(2k+1)\pi}{m} = (2h+1)\pi$, откуда $2k+1 = (2h+1)m$; это равенство невозможно, если m четно; слѣд. при четномъ m не существуетъ ни одного дѣйствит. отрицат. корня.

Положимъ, что m нечетно; въ этомъ случаѣ, такъ какъ k меньше m, нужно чтобы h было нулемъ, и тогда $k = \frac{m-1}{2}$; слѣд., если m нечетно, будетъ одинъ дѣйствит. отрицат. корень, и только одинъ.

Чтобы два корня аргументовъ $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, $\frac{(2k'+1)\pi}{m}$, гдѣ k' отлично отъ k, были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равнялась четному кратному отъ π,

$$\frac{(2k+1)\pi}{m} + \frac{(2k'+1)\pi}{m} = 2h\pi,$$

откуда
$$k + k' = mh - 1,$$

а такъ какъ k и k' положительны, различны и меньше m, необходимо, чтобы h равнялось 1, и сл. чтобы

$$k + k' = m - 1.$$

Отсюда видно, что всякому значенію k, кромѣ $\frac{m-1}{2}$ при m нечетномъ, соотвѣтствуетъ одно значеніе k' отличное отъ k, и только одно; слѣд. всѣ мнимые корни попарно сопряженны.

Итакъ: *Если m нечетно, то дѣйствительное отрицательное количество имѣетъ одинъ m-й отрицательный корень, и только одинъ, и $m-1$ m-хъ корней мнимыхъ попарно сопряженныхъ.—Если m четно, дѣйствительное отрицательное количество не имѣетъ дѣйствительныхъ m-хъ корней, но имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка, мнимыхъ и попарно сопряженныхъ.*

Геометрическое представленіе корней приводитъ къ тѣмъ же заключеніямъ; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\frac{\alpha}{m} = \frac{\pi}{m}$, и каждое дѣленіе $M_0 M_1$, $M_1 M_2$, . . . равно $\frac{2\pi}{m}$, а потому вершины M_0 и M_{m-1} симметричны относительно діаметра $x'0x$; точки N_0 и N_{m-1} имѣютъ тоже свойство, и вершины N_0, N_1, N_2, . . . , N_{m-1} попарно симметричны относительно $x'0x$; отсюда видно, что корни—мнимы и попарно сопряженны.

Затѣмъ, на положительной полуоси $0x$ не м. б. ни одной вершины, на отрицательной же полуоси $0x'$ будетъ вершина только при m нечетномъ; сл., если m—четно, то не существуетъ ни одного дѣйствительнаго m-го корня; при m — нечетномъ есть одинъ дѣйствительный корень отрицательный; всѣ же мнимые корни попарно сопряженны.

III. Пусть, наконецъ, данное количество r_α—мнимое; аргументъ его уже не будетъ кратнымъ π. Легко видѣть, что ни одинъ m-й корень изъ r_α не м. б. дѣйствительнымъ; въ самомъ дѣлѣ, для этого нужно бы было, чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} = h\pi, \quad \text{откуда} \quad \alpha = (mh - 2k)\pi,$$

т. е. нужно, чтобы α было кратнымъ π, т. е. чтобы данное количество было дѣйствительнымъ.

Затѣмъ, не м. б. двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней, ибо для этого нужно, чтобы сумма ихъ аргументовъ была четнымъ кратнымъ π, т. е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} + \frac{2k'\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} = 2h\pi, \quad \text{или} \quad \alpha = (mh - k - k')\pi,$$

а это требуетъ, чтобы данное количество было дѣйствительнымъ.

Слѣдовательно: *всякій комплексъ имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка также комплексныхъ и не сопряженныхъ.*

Геометрическое представленіе корней показываетъ, что въ этомъ случаѣ m корней суть m радіусовъ правильнаго полигона, не имѣющаго ни одной вершины на оси $x'0x$, и не имѣющаго радіусовъ симметричныхъ относительно $x'0x$; а этимъ снова доказывается, что m корней комплексны и не сопряженны.

Примѣчаніе.—Если взять два мнимыхъ сопряженныхъ комплекса r_α и $r_{-\alpha}$, то каждый изъ нихъ, какъ мы видѣли, имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка, комплексныхъ и не сопряженныхъ. Можно показать, что m корней m-го порядка изъ r_α соотвѣтственно сопряженны m корнямъ m-го порядка изъ $r_{-\alpha}$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sqrt[m]{r_\alpha} = \left(\sqrt[m]{r}\right)_{\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}}, \quad \sqrt[m]{r_{-\alpha}} = \left(\sqrt[m]{r}\right)_{\frac{2k'\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}};$$

Но очевидно, для того чтобы два комплекса были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы модули ихъ были равны, а сумма аргументовъ была кратна 2π; но всѣ величины $\sqrt[m]{r_\alpha}$ и $\sqrt[m]{r_{-\alpha}}$ имѣютъ одинъ и тотъ же модуль, слѣд. достаточно показать, что аргументу $\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}$ какого ниб. m-го корня изъ r_α соотвѣтствуетъ аргументъ $\frac{2k'\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}$ m-го корня изъ $r_{-\alpha}$ такой, что

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} + \frac{2k'\pi}{m} - \frac{\alpha}{m} = 2h\pi,$$

или что $k'+k=mh$; но если давать k и k' только значенія 0, 1, ... , $m-1$, то нужно взять $h=1$, и тогда $k'=m-k$. Отсюда видно, что всякому значенію k соотвѣтствуетъ только одно значеніе k'; слѣд: *если два комплекса сопряженны, то m корней m-го порядка перваго соотвѣтственно сопряженны m корнямъ m-го порядка втораго.*

454. Изъ предыдущаго видно, что всѣ дѣйствія надъ комплексами приводятъ къ выраженіямъ того же вида; поэтому весь количественный матеріалъ алгебры, надъ которымъ она производитъ дѣйствія и въ формѣ котораго получаетъ результаты, выражается въ слѣдующей общей формѣ:

$$a+bi \text{ или } r_\alpha,$$

частными видами которой являются: $+a$ (или a_0), $-a$ (или a_π), $+ai$ (или $a_{\frac{\pi}{2}}$), $-ai$ (или $a_{\frac{3\pi}{2}}$), гдѣ a и b—числа дѣйствительныя, цѣлыя, дробныя или ирраціональныя. Существенный характеръ этихъ величинъ тотъ, что полное опредѣленіе ихъ требуетъ знанія не только ихъ *модулей*, т. е. абсолютныхъ значеній, но еще и *направленія.* Потому ихъ называютъ также величинами *директивными.* Одни изъ этихъ величинъ имѣютъ только два противоположныя направленія, вслѣдствіе чего геометрически они представляются прямыми, наносимыми на неограниченной оси, отъ нѣкотораго постояннаго начала, то въ одну, то въ другую сторону, смотря по ихъ направленію. Ихъ называютъ поэтому *діодами.* Другія величины могутъ быть изображаемы прямыми, проводимыми на плоскости изъ начала въ какомъ угодно направленіи. Ихъ называютъ *плоскими поліодами;* діоды—ихъ частный случай. Наконецъ, есть величины, въ представленіе о которыхъ не входитъ идея направленія; поэтому ихъ изображаютъ прямыми, наносимыми на оси всегда въ одну сторону отъ начала. Ихъ называютъ *монодами* (изученіемъ ихъ занимается ариѳметика). — Всѣ эти величины подчиняются тѣмъ основнымъ законамъ, обобщенію которыхъ и была посвящена эта глава.

Въ виду сказаннаго, цѣль алгебры можно опредѣлить такъ: *это есть наука, занимающаяся изученіемъ дѣйствій надъ плоскими поліодами, и рѣшеніемъ всякихъ задачъ, относящихся къ этимъ величинамъ.*

Величины, имѣющія въ пространствѣ какое угодно направленіе (какъ силы въ механикѣ, прямыя, воображаемыя въ пространствѣ) не подчиняются тѣмъ же законамъ, какъ плоскіе поліоды, въ правилахъ умноженія и дѣленія; поэтому ихъ изученіе выходитъ изъ рамокъ алгебры.

ГЛАВА XXX.

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій. — Изслѣдованіе корней. — Вычисленіе корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, когда коэффиціентъ a весьма малъ. — Задачи.

455. Опредѣленія.—Уравненіе называется *квадратнымъ*, если будучи *раціональнымъ* и *цѣлымъ* относительно неизвѣстнаго, не содержитъ членовъ съ степенями неизвѣстнаго, высшими второй. Такое ур. имѣетъ троякаго рода чле-

ны: съ квадратомъ неизвѣстнаго, съ первою степенью его и извѣстные члены; *общій видъ* его будетъ слѣдовательно

$$ax^2+bx+c=0,$$

гдѣ a, b и c суть нѣкоторыя числа, положительныя или отрицательныя; b и c могутъ быть вмѣстѣ или порознь нулями, и тогда ур. называется *неполнымъ*; когда a, b и c отличны отъ нуля, оно называется *полнымъ*.

456. Рѣшеніе неполныхъ ур-ній. I. Когда $b=o$, уравненіе будетъ

$$ax^2+c=0.$$

Раздѣливъ обѣ части на a, и положивъ для краткости $-\frac{c}{a}=A$, можемъ дать этому ур-нію видъ

$$x^2-A=0$$

Замѣчая, что $A=(\sqrt{A})^2$, получимъ:

$$x^2-(\sqrt{A})^2=0, \quad \text{или} \quad (x-\sqrt{A})(x+\sqrt{A})=0.$$

Но чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю, нужно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равенъ нулю, а другой не обращался бы приэтомъ въ ∞. Приравнивая перваго множителя нулю: $x-\sqrt{A}=0$, находимъ отсюда: $x=+\sqrt{A}$, причемъ второй множитель обращается въ конечное количество $2\sqrt{A}$. Приравнявъ втораго множителя нулю: $x+\sqrt{A}=0$, имѣемъ отсюда $x=-\sqrt{A}$, причемъ другой множитель даетъ конечную величину $-2\sqrt{A}$. Итакъ, имѣемъ два рѣшенія $x'=+\sqrt{A}$, $x''=-\sqrt{A}$; ихъ условились, ради краткости, писать вмѣстѣ:

$$x=\pm\sqrt{A}$$

и читать: x равенъ плюсъ или минусъ $\sqrt{A}$.

Если $A>0$, оба корня дѣйствительны; при $A<0$, оба мнимы.

Примѣры. I. Рѣшить уравненіе $3x^2-75=0$.

Перенеся 75 во вторую часть, и раздѣливъ обѣ части на 3, получимъ ур: $x^2=25$, откуда $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$. Итакъ:

$$x'=+5; \quad x''=-5.$$

2. Рѣшить уравненіе $3x^2+75=0$.

Выводимъ изъ него: $x^2=-25$; откуда $x=\pm\sqrt{-25}=\pm 5i$, т. е.

$$x'=+5i\ ;\ x''=-5i.$$

II. Положивъ въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ извѣстный членъ $c=0$, получаемъ уравненіе

$$ax^2+bx=0.$$

Выводя x за скобки, дадимъ ур-нію видъ $x\,(ax+b)=0$. Приравнивая перваго множителя нулю, т. е. полагая $x=0$, и замѣчая, что приэтомъ второй множитель обращается въ конечную величину b, заключаемъ, что одинъ

изъ корней ур-нія равенъ 0. — Полагая затѣмъ $ax+b=0$, откуда $x=-\frac{b}{a}$, замѣчаемъ, что и при этомъ значеніи x ур-ніе обращается въ тождество.

Итакъ, ур-ніе $ax^2+bx=0$ имѣетъ два корня

$$x'=0,\ x''=-\frac{b}{a}.$$

Примѣчаніе. — Еслибы, въ видахъ упрощенія, мы сократили первоначальное ур. на x, то, рѣшивъ полученное ур-ніе, нашли бы только одинъ корень $x=-\frac{b}{a}$; другой корень $x=0$ потеряли бы при сокращеніи. Но едва-ли не лишнее снова напоминать, что не позволительно дѣлить ур. на множителя, который можетъ обратиться въ ноль.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $3x^2-7x=0$.

Давъ ему видъ $x\ (3x-7)=0$, по предыдущему, находимъ два корня:

$$x'=0;\quad x'=\frac{7}{3}.$$

III. Если $b=c=0$, то ур. принимаетъ видъ

$$ax^2=0.$$

Такъ-какъ a отлично отъ нуля, то произведеніе ax^2 можетъ обратится въ ноль только при $x=0$. И въ этомъ случаѣ можно сказать, что ур. имѣетъ два корня

$$x'=0 \quad \text{и} \quad x''=0,$$

равныхъ между собою.

457. Рѣшеніе полнаго квадратнаго уравненія. — Рѣшимъ теперь квадратное уравненіе общаго вида

$$ax^2+bx+c=0 \ldots\ldots (1)$$

Первый пріемъ. — Принимая a отличнымъ отъ нуля, раздѣливъ обѣ части на a и перенеся свободный членъ во вторую часть, получимъ уравненіе, *тождественное данному:*

$$x^2+\frac{b}{a}\cdot x=-\frac{c}{a} \ldots\ldots (2)$$

Замѣчая, что $\frac{b}{a}\cdot x$ можно представить въ видѣ $2.\frac{b}{2a}\cdot x$, разсматриваемъ x^2 какъ квадратъ перваго члена x нѣкотораго бинома, а $2\,.\,x.\,\frac{b}{2a}$ какъ удвоенное произведеніе перваго члена (x) искомаго бинома на второй, который равенъ, поэтому, $\frac{b}{2a}$. Такимъ образомъ, если къ первой части ур-нія (2) придадимъ квадратъ втораго члена $\frac{b}{2a}$ бинома, а чтобъ равенство не нарушилось — и ко второй, то составимъ ур-ніе тождественное со (2):

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

первая часть котораго есть, слѣдовательно, квадратъ бинома $x+\frac{b}{2a}$. Поэтому послѣднее ур. можно написать, приведя вторую часть къ общему знаменателю, въ видѣ:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Итакъ, чтобы удовлствориться этому ур-нію. а слѣд. и тождественному съ нимъ данному, необходимо и достаточно дать x такое значеніе, чтобы $x+\frac{b}{2a}$ было алгебраическимъ квадратнымъ корнемъ изъ $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Но послѣднее выраженіе имѣетъ два алгебраич. квадратныхъ корня: $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. Зачить, мы удовлетворимъ уравненію (1), положивъ:

$$\text{или } x+\frac{b}{2a}=+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},\quad \text{или } x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

откуда

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad \text{и}\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Итакъ, квадратному ур-нію удовлетворяютъ *два* значенія неизвѣстнаго, *два корня*. Для краткости оба корня пишутъ въ одной формулѣ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

изъ которой выводимъ слѣдующее

Правило. Чтобы найти значенія неизвѣстнаго, удовлетворяющія полному квадр. ур-нію, нужно: выраженіе, составленное изъ коэффиціанта при неизвѣстномъ въ 1-й степени, взятаго съ обратнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ квадратный корень изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетверённаго произведенія крайнихъ коэффиціентовъ, раздѣлить на удвоенный первый коэффиціентъ.

Примѣръ. — Рѣшить уравненіе $20x^2-7x-6=0$.

Сравнивая это уравненіе, которому можно дать видъ

$$20x^2+(-7)x+(-6)=0$$

съ общимъ, замѣчаемъ, что нужно положить

$$a=20,\quad b=-7,\quad c=-6.$$

Вставляя въ общую формулу эти числа, найдемъ:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4.20.(-6)}}{2.20}=\frac{7\pm\sqrt{49+480}}{40}=\frac{7\pm\sqrt{529}}{40}=\frac{7\pm23}{40},$$

и наконецъ

$$x'=\frac{7+23}{40}=\frac{3}{4};\qquad x''=\frac{7-23}{40}=-\frac{2}{5}.$$

458. Второй пріемъ. — Умножая обѣ части уравненія (1) на $4a$, что позволительно, *если a не равно нулю*, получимъ уравненіе

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

тождественное данному; или, перенеся $4ac$ во вторую часть:

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Разсматривая $4a^2x^2$ и $4abx$ какъ два первые члена квадрата бинома, у котораго первый членъ $=2ax$, а второй b, и придавая къ обѣимъ частямъ ур-нія по b^2, находимъ уравненіе $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$, котораго первая часть есть ничто иное какъ $(2ax+b)^2$. Приведя такимъ образомъ ур. къ виду.

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac,$$

замѣчаемъ, что $2ax+b$ есть алгебраич. квадр. корень изъ b^2-4ac, т. е.

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

откуда

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

формула, совершенно одинаковая съ найденной въ § 457.

459. Третій пріемъ. — Найдемъ формулу корней при помощи введенія неопредѣленнаго количества. Имѣя ур.

$$ax^2+bx+c=0,$$

положимъ $x=z+k$, гдѣ z новое неизвѣстное, а k нѣкоторое произвольное количество, и подставимъ въ ур. вмѣсто x сумму $z+k$. Найдемъ ур-ніе

$$a(z+k)^2+b(z+k)+c=0;$$

раскрывъ въ немъ скобки и расположивъ по степенямъ z, получимъ

$$az^2+(2ak+b)z+ak^2+bk+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Воспользуемся произволомъ количества k для того, чтобы уничтожить членъ съ первою степенью z, $(2ak+b)z$ и получить такимъ образомъ неполное уравненіе; очевидно, для k надо выбрать такое значеніе, чтобы $2ak+b=0$, откуда $k=-\dfrac{b}{2a}$.

Подставивъ это значеніе k въ ур. (2), имѣемъ

$$az^2+a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=0, \text{ или } az^2-\frac{b^2}{4a}+c=0,$$

$$\text{откуда } z^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}, \text{ и слѣд. } z=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Такимъ образомъ: $x=z+k=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

460. Замѣчанія относительно примѣненія предыдущихъ формулъ.

1. Когда коэффиціенты a, b и c числа цѣлыя и b — число четное, формула корней допускаетъ упрощеніе. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $b=2b'$, имѣемъ

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

по сокращеніи на 2.

Напр., если дано уравненіе

$$77x^2 + 50x + 8 = 0,$$

то, полагая въ послѣдней формулѣ $a = 77$, $b' = 25$ и $c = 8$, найдемъ

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 77 \,.\, 8}}{77},$$

откуда $$x' = -\frac{2}{7}, \quad x'' = -\frac{4}{11}.$$

2. Когда коэффиціентъ при x^2 равенъ 1, и ур. имѣетъ видъ

$$x^2 + px + q = 0,$$

то, полагая въ общей формулѣ $a = 1$, $b = p$ и $c = q$, получимъ

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Если притомъ p — четное число, то для удобства вычисленій выгоднѣе этой формулѣ дать видъ

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Напр., въ уравненіи $x^2 - 10x + 21 = 0$ имѣемъ: $p = -10$, слѣд. $\frac{p}{2} = -5$, и $q = 21$; примѣняя послѣднюю формулу, найдемъ

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2; \quad \text{слѣд. } x' = 7,\ x'' = 3.$$

461. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ на примѣненіе выведенныхъ формулъ.

1. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 7x - 2 = 0$.

Примѣняемъ первую формулу, полагая въ ней $a = 3$, $b = -7$, $c = -2$, и находимъ

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{6}, \text{ откуда}$$

$$x' = \frac{7 + \sqrt{73}}{6} = 2{,}591, \text{ съ точностью до } 0{,}001 \text{ по избытку;}$$

$$x'' = \frac{7 - \sqrt{73}}{6} = -0{,}257, \text{ съ точностью до } 0{,}001 \text{ по недостатку.}$$

2. Рѣшить уравненіе $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

Примѣняя первую формулу, находимъ

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{2ab}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2ab}$$

Отдѣляя корни, имѣемъ:

$$x' = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{b}, \quad x'' = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{2ab} = \frac{b}{a}.$$

3. Рѣшить уравненіе $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3a^2 + b^2}{3b^2 + a^2}$. . . . . (1)

Сдѣлавъ перенесеніе въ первую часть и приведя къ общему знаменателю $(3b^2 + a^2)(x^2 - x + 1)$, находимъ ур-ніе

$$\frac{[(3b^2+a^2) - (3a^2 + b^2)]x^2 + [(3b^2 + a^2) + (3a^2 + b^2)]x + (3b^2 + a^2) - (3a^2 + b^2)}{(3b^2 + a^2)(x^2 - x + 1)} = 0,$$

или, по упрощеніи,

$$\frac{(b^2 - a^2)x^2 + 2(b^2 + a^2)x + (b^2 - a^2)}{(3b^2 + a^2)(x^2 - x + 1)} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

уравненіе, тождественное (1). Приравнивая числителя нулю, рѣшаемъ ур-ніе

$$(b^2 - a^2)x^2 + 2(b^2 + a^2)x + (b^2 - a^2) = 0 \cdot \ldots \ldots (3)$$

корни котораго и будутъ требуемые, если убѣдимся, что они не обращаютъ знаменателя въ 0; въ противномъ случаѣ ихъ слѣдуетъ принять только тогда, когда истинная величина неопредѣленности $\frac{0}{0}$, въ которую обратится первая часть ур-нія (2), будетъ равна нулю.

Корни ур-нія (3) суть:

$$x = \frac{-(b^2 + a^2) \pm \sqrt{(b^2 + a^2)^2 - (b^2 - a^2)^2}}{b^2 - a^2} = \frac{-(b^2 + a^2) \pm 2ab}{b^2 - a^2}; \text{ откуда}$$

$$x' = \frac{a - b}{a + b}; \quad x'' = \frac{a + b}{a - b}.$$

Подставляя ихъ поочередно въ $x^2 - x + 1$, убѣдимся, что выраженіе это не обращается въ ноль; сл. найденные корни удовлетворяютъ данному уравненію.

4. Рѣшить уравненіе $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x(x - 1)} = \frac{x - 2}{x(x + 1)}$.

Собравъ всѣ члены въ первую часть, приведя къ общему знаменателю $x(x + 1)(x - 1)$ и сдѣлавъ приведеніе въ числителѣ, дадимъ уравненію видъ

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x(x + 1)(x - 1)} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (1).$$

Приравнявъ числителя нулю, рѣшаемъ ур-ніе

$$-x^2 + 4x - 3 = 0,$$

и находимъ, что корни его суть: $x' = 3$ и $x'' = 1$.

Первый корень не обращаетъ знаменателя въ ноль, а потому удовлетворяетъ данному уравненію. Второй же, обращая знаменателя въ ноль, даетъ первой части уравненія (1) видъ $\frac{0}{0}$. Опредѣляя истинную величину этой неопредѣленности, имѣемъ

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{(x - 1)(3 - x)}{(x - 1)x(x + 1)} = \frac{3 - x}{x(x + 1)};$$

эта дробь при $x=1$ обращается въ 1, а ур-ніе первое въ $1=0$. Заключаемъ, что корень $x''=1$ не удовлетворяетъ данному ур-нію.

Кромѣ корня, равнаго 3, данное ур-ніе имѣетъ еще корень $=\infty$, ибо степень знаменателя выше степени числителя.

462. Рѣшая квадратное уравненіе, мы нашли два корня; болѣе двухъ корней оно имѣть не можетъ: въ самомъ дѣлѣ, если бы ур-ніе $ax^2+bx+c=0$ имѣло болѣе двухъ различныхъ корней, оно было-бы тождествомъ, такъ какъ цѣлый по буквѣ x квадратный полиномъ, обращающійся въ ноль болѣе нежели при двухъ различныхъ значеніяхъ x, тождественно равенъ нулю.

Изслѣдованіе корней квадратнаго уравненія.

463. Рѣшая общее уравненіе $ax^2+bx+c=0$, мы нашли два корня:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Вычисленіе корней зависитъ такимъ образомъ отъ извлеченія квадратнаго корня изъ разности b^2-4ac, которая можетъ быть положительною, нулемъ, или отрицательною. Опредѣленіе природы корней въ каждомъ изъ этихъ случаевъ; указаніе, что значенія корней въ каждомъ случаѣ соотвѣтствуютъ формѣ уравненія, которому они удовлетворяютъ; наконецъ, опредѣленіе знаковъ дѣйствительныхъ корней,—все это составляетъ *цѣль изслѣдованія корней.*

Относительно разности b^2-4ac можетъ быть три предположенія: она можетъ быть положительною, нулемъ и отрицательною:

$$b^2-4ac>0,\quad b^2-4ac=0,\quad b^2-4ac<0.$$

Приэтомъ условимся коэффиціентъ a считать положительнымъ; когда $a<0$, то умноживъ уравненіе на -1, сдѣлаемъ этотъ коэффиціентъ положительнымъ.

464. Первый случай:

$$b^2-4ac>0.$$

Въ формулахъ корней подрадикальное количество будетъ, такимъ образомъ, положительное, слѣдовательно *оба корня дѣйствительные.* Вычитая изъ перваго второй, найдемъ

$$x'-x''=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a};$$

такъ какъ при данномъ условіи выраженіе это отлично отъ нуля, то заключаемъ, что корни *неравны* между собою.

Далѣе замѣчаемъ, что количество b^2-4ac представляетъ или *сумму* или *разность ариѳметическую*, смотря потому, будетъ-ли c *отрицательно* или *положительно.*

$$1.\ c>0.$$

Такъ какъ по условію и $a>0$, то $4ac>0$; вычитаніе положительнаго количества ведетъ къ уменьшенію, слѣд.

$$b^2-4ac<b^2,$$

а потому ариѳметическая величина $\sqrt{b^2-4ac}$ меньше ариѳмет. величины $\sqrt{b^2}$ или количества b. Означимъ абсолютную величину коэффиціента b буквою β; въ такомъ случаѣ:

Если $b>0$, то $b=+\beta$, и корни можно написать въ видѣ:

$$x'=\frac{-\beta+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-\beta-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

такъ какъ $a>0$, то знаки корней зависятъ отъ числителей; второй числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно – отрицательныхъ членовъ, отрицателенъ; въ первомъ—абсолютная величина отрицательнаго члена больше чѣмъ положительнаго, слѣд. и этотъ числитель отрицателенъ. Значитъ *при b положительномъ оба корня отрицательны.*

Если $b<0$, то $b=-\beta$, и корни будутъ

$$x'=\frac{+\beta+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{+\beta-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно-положительныхъ членовъ, положителенъ; во второмъ—абсолютная величина положительнаго члена больше, нежели отрицательнаго, слѣд. и второй — положителенъ. Такимъ образомъ, *при b отрицательномъ оба корня положительны.*

Итакъ: *при $c>0$ дѣйствительные корни имѣютъ знаки одинаковые, противоположные знаку коэффиціента b.*

2. $c<0$.

Такъ какъ $a>0$, то $4ac<0$; отсюда заключаемъ: во-первыхъ, что при $c<0$ выраженіе b^2-4ac представляетъ количество существенно—положительное, и слѣд. корни безусловно дѣйствительны; во-вторыхъ, что

$$b^2-4ac>b^2,$$

и слѣд. абсолютная величина $\sqrt{b^2-4ac}$ больше абсолютной $\sqrt{b^2}$, т. е. абсолютной величины количества b.

Если $b>0$, т. е. $b=+\beta$, то

$$x'=\frac{-\beta+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-\beta-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Отсюда видно, что первый числитель имѣетъ большій по абсолютной величинѣ членъ — положительный, слѣд. $x'>0$; во второмъ числителѣ оба члена существенно отрицательны, слѣд. $x''<0$. Итакъ: *знаки корней различны.* Приэтомъ абсолютная величина числителя корня x' есть разность

$$\sqrt{b^2-4ac}-\beta,$$

абсолютная величина числителя корня x'' есть сумма

$$\sqrt{b^2-4ac}+\beta$$

тѣхъ же количествъ, и слѣд. больше абс. вел. корня x'; так. обр. *большую абсолютную величину имѣетъ тотъ корень, знакъ котораго противоположенъ знаку b.*

Если $b < 0$, то $b = -\beta$, и

$$x' = \frac{+\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{+\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, очевидно, положителенъ, слѣд. $x' > 0$; у втораго отрицательный членъ имѣетъ большую абсолютную величину, чѣмъ положительный, слѣд. $x'' < 0$: *знаки корней* опять *различны*. Приэтомъ, абсолютная величина положительнаго корня равна суммѣ

$$\sqrt{b^2 - 4ac} + \beta,$$

а отрицательнаго — разности тѣхъ же количествъ,

$$\sqrt{b^2 - 4ac} - \beta,$$

т. е. опять *большую абсолютную величину имѣетъ тотъ корень, котораго знакъ противоположенъ знаку коэффиціента* b.

Резюмируя сказанное, заключаемъ, что: *когда* $b^2 - 4ac > 0$, *уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и неравные*; *приэтомъ* (полагая $a > 0$), *если свободный членъ положителенъ, знаки корней одинаковы и противоположны знаку коэффиціента* b; *если же свободный членъ отрицателенъ, знаки корней различны, и знакъ корня, большаго по абсолютной величинѣ, противоположенъ знаку* b.

465. Примѣры. — I. Изслѣдовать корни ур-нія $8x^2 + 57x + 10 = 0$.

Такъ какъ $b^2 - 4ac = \overline{57}^2 - 320 = +2929 > 0$, то корни дѣйствительные и неравные; при $a > 0$ здѣсь и $c > 0$, сл. знаки корней одинаковы; $b > 0$, слѣд. оба корня отрицательны.

II. Изслѣдовать корни ур-нія $8x^2 - 57x - 10 = 0$.

Здѣсь при $a > 0$ имѣемъ $c < 0$, слѣд., не составляя разности $b^2 - 4ac$, заклюечаемъ, что корни — дѣйствительные и неравные; знаки ихъ различны, ибо $c < 0$; большій корень, имѣя знакъ противоположный коэффиціенту b, положителенъ.

466. Докажемъ теперь, что при условіи $b^2 - 4ac > 0$ изъ самой формы уравненія вытекаетъ, что оно можетъ быть удовлетворено двумя различными дѣйствительными значеніями x.

Выводя въ ур-ніи a за скобки, имѣемъ:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Изъ условія $b^2 - 4ac > 0$ имѣемъ $4ac < b^2$, откуда, раздѣливъ обѣ части неравенства на существенно положительное количество $4a^2$, находимъ:

$$\frac{c}{a} < \frac{b^2}{4a^2}, \text{ и слѣд. } \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - K^2,$$

гдѣ K^2 должно быть существенно-положительнымъ количествомъ, и слѣд. K — дѣйствительнымъ. Ур-ніе принимаетъ видъ

$$a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - K^2\right\} = 0, \text{ или } a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - K^2\right\} = 0,$$

или, наконецъ, разложивъ выраженіе въ скобкахъ на множители:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\text{K}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\text{K}\right)=0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то этому уравненію удовлетворимъ, полагая

$$\text{или}\quad x+\frac{b}{2a}-\text{K}=0,\quad \text{откуда}\quad x=-\frac{b}{2a}+\text{K};$$

$$\text{или}\quad x+\frac{b}{2a}+\text{K}=0,\quad \text{откуда}\quad x=-\frac{b}{2a}-\text{K},$$

откуда и видно, что ур-ніе удовлетворяется *двумя дѣйствительными неравными* значеніями x.

467. Второй случай.

$$b^2-4ac=0.$$

При этомъ условіи подрадикальное количество въ формулахъ корней обращается въ нуль, слѣд. радикальные члены исчезаютъ, и получается

$$x'=-\frac{b}{2a}\quad \text{и}\quad x''=-\frac{b}{2a},$$

т. е. оба корня *дѣйствительные и равные*, а общая величина ихъ есть $-\frac{b}{2a}$.

Хотя въ данномъ случаѣ ур-ніе имѣетъ только одинъ корень, но говорятъ, что оно имѣетъ *два*, но *равныхъ* между собою, *корня*. Чтобы оправдать такое условное выраженіе, достаточно предположить, что количество b^2-4ac сначала положительно, и что оно постепенно уменьшается до нуля; тогда неравные корни будутъ болѣе и болѣе приближаться къ равенству, и наконецъ, когда разность ихъ, выражаемая формулою $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$, дѣлается нулемъ, оба корня становятся равными.

Примѣръ. — Уравненіе $9x^2+12x+4=0$ имѣетъ корни дѣйствительные равные, ибо $b'^2-ac=6^2-9\times4=0$; а общая величина ихъ равна

$$-\frac{b'}{a}=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}.$$

468. Что равенство корней при условіи $b^2-4ac=0$ обусловливается самою формою ур-нія, легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Давъ ур-нію видъ

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,$$

и замѣчая, что изъ условія $b^2-4ac=0$ сперва имѣемъ $4ac=b^2$, а затѣмъ, раздѣливъ обѣ части на $4a^2$, получаемъ $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$, подставивъ вмѣсто $\frac{c}{a}$ его величину въ ур-ніе, найдемъ

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=0,\quad \text{или}\quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то очевидно, что этому ур-нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ

$$x+\frac{b}{2a}=0, \quad \text{откуда} \quad x=-\frac{b}{2a}.$$

469. Третій случай.

$$b^2-4ac<0.$$

Такъ какъ квадратный корень изъ отрицательнаго количества b^2-4ac есть выраженіе мнимое, то изъ самой формулы корней видно, что оба корня будутъ *мнимые*.

Имъ можно дать видъ $A+Bi$. Въ самомъ дѣлѣ, $b^2-4ac=(4ac-b^2).(-1)$; слѣд. $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{-1}=\sqrt{4ac-b^2}.i$, гдѣ количество $\sqrt{4ac-b^2}$ дѣйствительно, такъ какъ $4ac-b^2>0$.

Корни берутъ видъ

$$x'=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.\, i \quad , \quad x''=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.\, i \,,$$

откуда видно, что это — *мнимыя сопряженныя количества.*

Примѣръ. — Рѣшить ур-ніе $7x^2-3x+2=0$.
$b^2-4ac=3^2-4\times7\times2=-47$, слѣд. корни — *мнимые*. По предыдущимъ формуламъ имѣемъ:

$$x'=\frac{3}{14}+\frac{\sqrt{47}}{14}\cdot i \quad , \quad x''=\frac{3}{14}-\frac{\sqrt{47}}{14}\cdot i\,.$$

470. Покажемъ изъ самой формы уравненія, что при условіи $b^2-4ac<0$ ему нельзя удовлетворить *никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ* x.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія $b^2-4ac<0$ имѣемъ $\frac{c}{a}>\frac{b^2}{4a^2}$, а это неравенство можно замѣнить равенствомъ $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}+K^2$, гдѣ K^2 — существенно положительное количество, не могущее обратиться въ ноль. Внося это выраженіе вмѣсто $\frac{c}{a}$ въ уравненіе

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,$$

даемъ ему видъ

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+K^2\right)=0, \quad \text{или} \quad a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+K^2\right\}=0.$$

Отсюда очевидно, что ур-ніе не м. б. удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x, потому-что сумма двухъ положительныхъ количествъ можетъ обратиться въ ноль только тогда, когда каждое изъ нихъ въ отдѣльности обращается въ ноль, но мы знаемъ, что K^2 не м. б. нулемъ.

Изъ формулъ корней видно, что въ данномъ случаѣ ур. м. б. удовлетворено мнимыми значеніями неизвѣстнаго.

471. Теорема. — *Если уравненіе $ax^2+bx+c=0$, въ которомъ коэффиціенты a, b и c соизмѣримы, удовлетворяется несо...*

мымъ корнемъ $\alpha+\sqrt{\beta}$, *то другой его корень будетъ несоизмѣримое количество* $\alpha-\sqrt{\beta}$, *сопряженное первому.*

Въ самомъ дѣлѣ, по условію $\alpha+\sqrt{\beta}$ есть корень даннаго уравненія, слѣд. имѣемъ тождество

$$a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0,$$

или, раскрывъ скобки и собравъ въ отдѣльныя группы соизмѣримые и несоизмѣримые члены, найдемъ

$$(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)+(2a\alpha+b)\sqrt{\beta}=0 \ . \ . \ . \ . (1)$$

Первая часть этого тождества имѣетъ видъ $M+N\sqrt{\beta}$, гдѣ M и N соизмѣримы. Въ силу (1) это выраженіе должно равняться нулю; но можно доказать, что оно можетъ равняться нулю только тогда, когда $M=0$ и $N=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, *пока* N *отлично отъ нуля*, мы можемъ обѣ части раздѣлить на N и отъ этого получимъ равенство

$$\sqrt{\beta}=-\frac{M}{N} \ . \ . \ . \ (2)$$

тождественное съ $M+N\sqrt{\beta}=0$; но равенство (2) невозможно, ибо оно выражаетъ, что несоизмѣримое количество $\sqrt{\beta}$ равно соизмѣримому $-\frac{M}{N}$. Итакъ, необходимо, чтобы N было нулемъ; но тогда изъ равенства $M+N\sqrt{\beta}=0$ слѣдуетъ, что и $M=0$.

Такимъ образомъ, тождество (1) ведетъ за собою слѣдствія

$$\left.\begin{array}{r} a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c=0 \\ 2a\alpha+b=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Если теперь въ триномѣ ax^2+bx+c замѣнимъ x выраженіемъ $\alpha-\sqrt{\beta}$, то найдемъ

$$(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)-(2a\alpha+b)\sqrt{\beta};$$

но это выраженіе, въ силу (3), равно нулю, т. е. триномъ обращается въ ноль при $x=\alpha-\sqrt{\beta}$; слѣд. послѣднее выраженіе служитъ корнемъ даннаго уравненія.

472. Теорема. *Если ур-ніе* $ax^2+bx+c=0$, *въ которомъ* a, b, *и* c *числа цѣлыя, имѣетъ соизмѣримый корень, несократимый видъ котораго есть* $\frac{\alpha}{\beta}$, *то* α *служитъ дѣлителемъ* c, *а* β *— дѣлителемъ* a.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{\alpha}{\beta}$ есть корень даннаго уравненія, то имѣемъ тождество.

$$a \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2}+b \cdot \frac{\alpha}{\beta}+c=0, \text{ или } a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2=0.$$

Но $a\alpha^2+b\alpha\beta$ дѣлится на α, слѣд. и $c\beta^2$ должно дѣлиться на α; но числа α и β—первыя между собою, слѣд. c должно дѣлиться на α. Такимъ же образомъ пока[illegible] что β, будучи дѣлителемъ суммы $b\alpha\beta+c\beta^2$, дѣлитъ непремѣнно и a.

Слѣдствіе. *Уравненіе* $x^2+px+q=0$ *въ которомъ* p *и* q—*числа цѣлыя, не можетъ имѣть соизмѣримыхъ дробныхъ корней.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что ур-ніе имѣетъ такой корень $\frac{\alpha}{\beta}$, на основаніи предыдущей теоремы нашли бы, что цѣлое число β дѣлитъ коэффиціентъ при x^2, т. е. 1.

Изъ этого слѣдуетъ, что наше уравненіе можетъ имѣть дѣйствительные корни: или цѣлые, и тогда оба они цѣлые, или же оба несоизмѣримые.

473. Теорема. *Если уравненіе* $ax^2+bx+c=0$, *въ которомъ коэффиціенты* a, b *и* c *дѣйствительны, имѣетъ мнимый корень, то другой его корень есть мнимое количество, сопряженное съ первымъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha+\beta i$ есть корень даннаго уравненія; въ такомъ случаѣ имѣемъ тождество

$$a(\alpha+\beta i)^2+b(\alpha+\beta i)+c=0,$$

или, группируя дѣйствительные и мнимые члены, находимъ:

$$(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+(2a\alpha\beta+b\beta)i=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\; (1)$$

Первая часть имѣетъ видъ $A+Bi$, гдѣ A и B дѣйствительны; но такое выраженіе можетъ равняться нулю только тогда, когда одновременно $A=0$ и $B=0$. Итакъ, *два условія необходимыя и достаточныя* для того, чтобы $\alpha+\beta i$ было корнемъ даннаго уравненія, суть

$$\left.\begin{aligned} a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c=0\\ 2a\alpha\beta+b\beta=0\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Замѣняя въ триномѣ ax^2+bx+c количество x выраженіемъ $\alpha-\beta i$, найдемъ

$$(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)-(2a\alpha\beta+b\beta)i,$$

а въ силу условій (2) это выраженіе обращается въ нуль. Итакъ, предложенное уравненіе, въ которомъ *коэффиціенты дѣйствительны*, имѣя мнимый корень $\alpha+\beta i$, имѣетъ и сопряженный ему корень $\alpha-\beta i$.

Изслѣдованіе частныхъ случаевъ.

474. До сихъ поръ мы предполагали, что коэффиціенты отличны отъ нуля. Положимъ теперь, что:

I. **Коэффиціентъ** a **равенъ нулю.** При рѣшеніи квадратнаго уравненія намъ приходилось или дѣлить, или множить уравненіе на выраженіе, содержащее a; но мы знаемъ, что это дѣйствіе непозволительно, когда $a=0$, ибо можетъ повести къ уравненію, нетождественному съ даннымъ. Поэтому является необходимость въ изслѣдованіи, представляютъ ли найденныя формулы для x' и x'' рѣшенія уравненія и въ случаѣ когда $a=0$.

Обращаясь къ формуламъ корней:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

и полагая въ нихъ $a=0$, найдемъ:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0}, \qquad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}.$$

Если b положительно и равно $+\beta$ (гдѣ β—абсол. величина b), то

$$x'=\frac{-\beta+\beta}{0}=\frac{0}{0}, \qquad x''=\frac{-\beta-\beta}{0}=\frac{-2\beta}{0}=\infty;$$

если b отрицательно и равно $-\beta$, то наоборотъ

$$x'=\frac{+\beta+\beta}{0}=\frac{2\beta}{0}=\infty; \qquad x''=\frac{+\beta-\beta}{0}=\frac{0}{0}.$$

Итакъ, при $a=0$ одинъ изъ корней обращается въ ∞, а другой принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Опредѣлимъ истинное значеніе этой неопредѣленности, причемъ достаточно разсмотрѣть одинъ случай, напр. $b>0$; въ такомъ случаѣ x' принимаетъ неопредѣленный видъ. Умножая числителя и знаменателя формулы x' на $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, получимъ

$$x'=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Отсюда видно, что неопредѣленность корня x' зависитъ отъ присутствія въ числителѣ и знаменателѣ общаго множителя $2a$, который при $a=0$ обращается въ ноль; сокративъ на $2a$, имѣемъ:

$$x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

а положивъ здѣсь $a=0$, найдемъ

$$x'=\frac{2c}{-2b}=-\frac{c}{b},$$

количество опредѣленное.

Итакъ, *при* $a=0$ *одинъ изъ корней обращается въ* ∞, *а другой равенъ корню уравненія первой степени* $bx+c=0$, *въ которое обращается квадратное уравненіе при* $a=0$.

475. Обратимся теперь къ самому уравненію, и посмотримъ, что оно даетъ при $a=0$.

Уравненію можно дать видъ

$$bx+c=-ax^2;$$

и какъ оно не удовлетворяется при $x=0$, ибо обращается въ $c=0$, между тѣмъ какъ c отлично отъ нуля, то можно раздѣлить обѣ части на x^2, вслѣдствіе чего получимъ уравненіе, *тождественное съ даннымъ*:

$$\left(b+\frac{c}{x}\right).\frac{1}{x}=-a.$$

Такъ какъ, по условію, $a=0$, то произведеніе множителей $b+\frac{c}{x}$ и $\frac{1}{x}$ должно быть нулемъ; а для этого необходимо, чтобы одинъ изъ множителей обращался въ ноль, а другой оставался конечнымъ. Положивъ

$$b+\frac{c}{x}=0,\quad \text{откуда}\quad x=-\frac{c}{b},$$

замѣчаемъ, что приэтомъ другой множитель $\frac{1}{x}$ равенъ $-\frac{b}{c}$, т. е. конеченъ. Поэтому $x=-\frac{c}{b}$ *есть корень даннаго уравненія.*

Положивъ

$$\frac{1}{x}=0,\quad \text{откуда}\quad x=\infty,$$

находимъ, что другой множитель обращается въ b, и слѣд. конеченъ. Поэтому $x=\infty$ *есть также корень уравненія.* Эти результаты вполнѣ согласуются съ выводомъ, полученнымъ изъ формулъ корней; поэтому, послѣднія приложимы къ случаю $a=0$.

Примѣръ. *Во что обращаются корни ур-нія.*

$$(a^2-b^2)x^2-2(2a^2-b^2)x+4a^2-b^2=0$$

при $a=b$?

Такъ какъ при $a=b$ коэффиціентъ при x^2 обращается въ ноль, то одинъ изъ корней обращается въ ∞, а другой принимаетъ значеніе дроби $\frac{4a^2-b^2}{2(2a^2-b^2)}$ при $a=b$, т. е. $=\frac{3}{2}$.

Это можно провѣрить и общими формулами корней, которыя даютъ

$$x'=\frac{2a-b}{a-b},\quad x''=\frac{2a+b}{a+b}.$$

476. II. **Коэффиціенты a и b одновременно равны нулю.** Обращаясь къ формуламъ корней, находимъ, что при $a=b=0$ оба корня принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$.

Чтобы раскрыть неопредѣленность, преобразуемъ формулы корней такимъ же точно образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ; найдемъ:

$$x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},\quad x''=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Положивъ здѣсь $a=0$ и $b=0$, имѣемъ

$$x'=\frac{2c}{0}=\infty,\quad x''=\frac{2c}{0}=\infty.$$

Итакъ, *при $a=b=0$ оба корня безконечны.*

Обращаясь къ уравненію, даемъ ему видъ

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a,$$

или, такъ-какъ $a=b=0$, видъ

$$\frac{c}{x^2}=0.$$

Такъ какъ c конечно, то этому ур-нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ $x=\infty$.

Примѣръ. *Каковы корни уравненія*

$$(a+b)^2x^2-(a^2-ab-2b^2)x+(2a^2-3ab+b^2)=0$$

при $a=-b$?

Когда $a=-b$, коэффиціенты $(a+b)^2$ и $(a^2-ab-2b^2)$ при x^2 и x обращаются въ нули, между тѣмъ какъ свободный членъ въ $6b^2$; заключаемъ, что при $a=-b$ оба корня безконечны.

Тоже можно видѣть и изъ формулъ корней; рѣшая данныя ур-нія, имѣемъ

$$x'=\frac{a-b}{a+b},\quad x''=\frac{2a-b}{a+b};$$

сдѣлавъ $a=-b$, имѣемъ

$$x'=\frac{-2b}{0}=\infty;\quad x''=\frac{-3b}{0}=\infty.$$

477. III. **Всѣ три коэффиціента a, b и c равны нулю.** Изъ формулъ корней убѣдимся, что онѣ представляютъ дѣйствительную неопредѣленность.

Обращаясь къ уравненію, замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ

$$0\times x^2+0\times x+0=0,$$

и слѣдовательно удовлетворяется всякимъ значеніемъ x; это — тождество.

Вычисленіе корней уравненія $ax^2+bx+c=o$, когда коэффиціентъ a весьма малъ.

478. Когда коэффиціентъ a весьма малъ, то изъ предыдущаго изслѣдованія (§ 474) видно, что одинъ изъ корней будетъ, по абсолютной величинѣ, весьма великъ, другой же близокъ къ $-\frac{c}{b}$. Общія формулы корней

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

въ данномъ случаѣ будутъ неудобны для вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, b^2-4ac вообще не есть точный квадратъ, и слѣд. $\sqrt{b^2-4ac}$ придется вычислять приблизительно. Ошибку, сдѣланную при вычисленіи $\sqrt{b^2-4ac}$ нужно будетъ раздѣлить на $2a$ для нахожденія ошибки x' или x''; и если a весьма мало, напр. $=\frac{5}{100000}$, то $2a=\frac{1}{10000}$, а потому ошибка ε, сдѣланная при вычисленіи $\sqrt{b^2-4ac}$ поведетъ за собою погрѣшность, равную 10000ε въ величинахъ x' и x''. Такъ-что, если бы мы пожелали вычислить корни уравненія съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, то должны бы были $\sqrt{b^2-4ac}$ найти съ точностью до $\frac{1}{10000}\times\frac{1}{10^n}$, т. е. съ 4 лишними десятичными знаками.

Отсюда понятно, что сложность вычисленій будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ меньше a.

Несравненно легче, при маломъ a, вычислять корни особымъ способомъ, называемымъ *методомъ послѣдовательныхъ приближеній*. Этимъ способомъ до-

статочно вычислить одинъ изъ корней; въ самомъ дѣлѣ сумма корней извѣстна и равна $-\frac{b}{a}$ (въ чемъ убѣдимся, сложивъ формулы x' и x''), и если будетъ вычисленъ корень x', то другой найдемъ, вычтя изъ суммы извѣстный корень: $x''=-\frac{b}{a}-x'$.

Нужно разсмотрѣть два случая: корни одинаковаго знака, и корни разнаго знака. Если черезъ a, b и c означимъ абсолютныя числа, то уравненіе съ положительными корнями будетъ вида: $ax^2-bx+c=0$; съ отрицательными: $ax^2+bx+c=0$. Достаточно указать вычисленіе положительныхъ корней, т. е. ур-нія $ax^2-bx+c=0$; ибо, если оба корня отрицательны, то перемѣнивъ у b знакъ $+$ на $-$, получимъ ур-ніе съ положительными корнями, вычисливъ которые и перемѣнивъ у нихъ знакъ, получимъ корни ур-нія $ax^2+bx+c=0$.

479. *1-й случай.* **Знаки корней одинаковы.** Итакъ, разсмотримъ уравненіе съ положительными корнями, т. е. вида

$$ax^2-bx+c=0\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ a, b и c—абсолютныя числа, и слѣд. знаки окончательные.

Меньшій корень этого уравненія есть

$$x'=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(b-\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}\cdot \quad \ldots \quad (2)$$

Этотъ корень мы и вычислимъ.

Рѣшая ур. (1) относительно bx, находимъ

$$bx=c+ax^2,$$

откуда

$$x=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\cdot x^2\cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Т. к. a весьма мало, b величина конечная, x представляетъ въ этой формулѣ меньшій корень, имѣющій также конечную величину, то и $\frac{a}{b}x^2$ будетъ весьма-мало. Поэтому, откинувъ членъ $\frac{a}{b}x^2$, мы сдѣлаемъ небольшую ошибку, и слѣд. первымъ приближеніемъ корня x' будемъ имѣть

$$x_1=\frac{c}{b}\cdot$$

Это приближеніе *меньше* настоящей величины x', ибо откинули положительный членъ $\frac{a}{b}x^2$.

Если теперь въ формулѣ (3) замѣнимъ во второй части x величиною $\frac{c}{b}$, меньшею чѣмъ x, то получимъ второе приближеніе

$$x_2=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}(x_1)^2=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

которое опять меньше настоящей величины x', но больше чѣмъ x_1 на $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2\cdot$

Замѣнивъ снова въ ур. (3) во второй части x черезъ x_2, найдемъ третье приближеніе

$$x_3 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2,$$

снова меньше истинной величины x', ибо x_2 меньше x'. Но x_3 будетъ больше x_2; въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что $x_2 > x_1$; возвысивъ обѣ части послѣдняго неравенства въ квадратъ, помноживъ на $\frac{a}{b}$ и придавъ по $\frac{c}{b}$, получимъ

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_1)^2$$

то-есть $x_3 > x_2$, и т. д.

Итакъ, послѣдовательныя приближенія идутъ все увеличиваясь, но всегда остаются меньше x', сл. они приближаются къ x'. Докажемъ теперь, что разница между x' и приближеніями стремится къ нулю, и сл. можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою.

Разность между x' и первымъ приближеніемъ x_1, т. е. *погрѣшность* перваго приближенія мы выразимъ изъ уравненія (3), которое даетъ (замѣтивъ, что $\frac{c}{b} = x_1$):

$$x' - x_1 = \frac{a}{b}(x')^2.$$

Но x', на основаніи (2), равняется $\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, и слѣд. x' меньше $\frac{2c}{b}$; написавъ неравенство

$$x' < \frac{2c}{b},$$

возвысивъ обѣ его части въ квадратъ и умноживъ на $\frac{a}{b}$, найдемъ

$$\frac{a}{b}(x')^2 < \frac{a}{b} \times \frac{4c^2}{b^2};$$

замѣнивъ первую часть равною ей величиною $x' - x_1$, которую обозначимъ черезъ ε_1, имѣемъ:

$$\varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b}.$$

Эта формула даетъ предѣлъ погрѣшности 1-го приближенія.

Вообще, погрѣшность n-го приближенія

$$\varepsilon_n = x' - x_n = \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x'^2\right) - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot x^2_{n-1}\right) = \frac{a}{b}(x'^2 - x^2_{n-1})$$

$$= \frac{a}{b}(x' + x_{n-1})(x' - x_{n-1}).$$

Но

$$x' - x_{n-1} = \varepsilon_{n-1}; \quad \text{а} \quad x' + x_{n-1} < 2x'$$

ибо $x_{n-1} < x'$; но $x' < \frac{2c}{b}$, откуда $2x' < \frac{4c}{b}$, а потому и подавно

$$x' + x_{n-1} < \frac{4c}{b}.$$

Слѣдовательно

$$\varepsilon_n < \frac{4ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{n-1}$$

Дѣлая въ этой формулѣ послѣдовательно $n = 2, 3, 4, \ldots, n$ и приписавъ формулу для 1-го приближенія, имѣемъ

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b} \\ \varepsilon_2 < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \varepsilon_n < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1} \end{cases}$$

Перемножая почленно эти неравенства, сокращая обѣ части на общаго множителя

$$\varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \,.\, \varepsilon_3 \,.\, \ldots\ldots \,.\, \varepsilon_{n-1},$$

получимъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n \cdot \frac{c}{b}.$$

Но корни дѣйствительные, слѣд.

$$b^2 - 4ac > 0,$$

откуда

$$\frac{4ac}{b^2} < 1.$$

Если количество, меньшее 1, возвышать въ возрастающія степени, то степени эти приближаются къ нулю, если же $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$ приближается къ нулю, то и умноженное на конечную величину $\frac{c}{b}$, также стремится къ 0.

Итакъ, *количеству n всегда можно дать такую величину, чтобы ε_n было какъ угодно мало.*

Итакъ, указаннымъ способомъ всегда можно найти приближенную величину меньшаго корня съ какою угодно точностью. Причемъ, останавливаясь на приближеніи x_n, дѣлаемъ ошибку, меньшую

$$\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{b}.$$

Этотъ способъ приложимъ всякій разъ, когда $\frac{4ac}{b^2} < 1$, т. е. когда корни дѣйствительные; но практически пригоденъ тогда, когда $\frac{4ac}{b^2}$ весьма малая

дробь сравнительно съ 1, ибо только въ этомъ случаѣ x_1, x_2, . . . x_n достаточно быстро приближаются къ x'.

Примѣръ. Дано ур.

$$3x^2 - 7640x + 400 = 0.$$

Имѣемъ:

$$a = 3; \qquad b = 7640; \qquad c = 400.$$

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{4 \times 3 \times 400}{58369600} = \frac{4800}{58369600} = \frac{48}{583696}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

еслибы имѣли дробь $\frac{48}{480000}$ . . . (1'), то по сокращеніи она дала-бы $\frac{1}{10000}$; но (1) имѣетъ такого же числителя какъ (1'), но большаго знаменателя, слѣд. (1) или

$$\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}.$$

Эта дробь весьма мала сравнительно съ 1, слѣд. наша метода приложима.

Первое приближеніе для меньшаго корня есть

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{400}{7640} = \frac{40}{764};$$

его ошибка

$$\varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b};$$

но $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$; а $\frac{c}{b}$, по обращеніи въ десятичную дробь, даетъ

$$\frac{c}{b} = 0,05235602 \ . \ . \ . \ . \ .$$

слѣд.

$$\frac{c}{b} < 0,06.$$

Поэтому

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10000} \times \frac{6}{100}, \text{ или } \varepsilon_1 < \frac{6}{1000000}$$

сл. ε_1 навѣрное меньше $\frac{1}{100000}$

Слѣд., взявъ для x' число 0,05235, получимъ меньшій корень съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{100000}$; и такъ

$$x_1 = 0,05235.$$

Вычислимъ еще второе приближеніе; оно будетъ

$$x_2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot (x_1)^2.$$

Ошибка этого приближенія $\varepsilon_2 < \frac{4ac}{b^2} \cdot \varepsilon_1$; но мы видѣли, что $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$, а $\varepsilon_1 < \frac{6}{1000000}$; значитъ

$$\varepsilon_2 < \frac{6}{10000000000}.$$

Вычисляя $\frac{c}{b}$ и $\frac{a}{b}\left(x_1\right)^2$ съ 10-ю дес. знаками, имѣемъ

$$\frac{c}{b} = 0{,}0523560209\ldots\ldots$$

$$\frac{a}{b}\left(x_1\right)^2 = 0{,}0000010763\ldots\ldots$$

$$\overline{0{,}0523570972.}$$

Сохраняя 9 десятичныхъ мѣстъ, имѣемъ:

$$x_2 = 0{,}052357097$$

съ ошибкою $< \frac{1}{10^9}$.

Чтобы вычислить другой корень, нужно изъ суммы корней, равной $\frac{7640}{3}$ вычесть найденный; взявъ въ $\frac{7640}{3}$ девять десятичныхъ мѣстъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 2546{,}666666666 \\ -\quad 0{,}052357097 \\ \hline 2546{,}614309569, \end{array}$$

съ точн. до $\frac{1}{10^9}$.

480. *2-й случай.* **Знаки корней различны.**

Если знаки корней различны, что будетъ, когда c отрицательно, то, назвавъ абсолютныя величины коэффиціентовъ черезъ a, b и c, уравненіе будетъ одного изъ слѣдующихъ видовъ:

$$ax^2 + bx - c = 0, \quad ax^2 - bx - c = 0.$$

Въ первомъ уравненіи меньшій корень положителенъ, во второмъ отрицателенъ; но если во второе вм. x подставимъ $-x$, то превратимъ его въ первый видъ, т. е. меньшій корень сдѣлаемъ положительнымъ.

Поэтому разсмотримъ, какъ найти положит. корень уравненія

$$ax^2 + bx - c = 0$$

по способу послѣдовательныхъ приближеній.

Опредѣляя bx, находимъ

$$bx = c - ax^2,$$

а отсюда

$$x = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\cdot x^2.$$

Послѣдовательныя приближенія будутъ:

$$x_1 = \frac{c}{b}; \quad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\cdot (x_1)^2; \quad x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2; \quad x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_3)^2;$$

. . . .

и вообще

$$x_n = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\cdot (x_{n-1})^2.$$

Искомый меньшій корень выражается формулою

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Очевидно, что

$$x_1 > x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ и затѣмъ умножая на $\frac{a}{b}$, найдемъ

$$\frac{a}{b}(x_1)^2 > \frac{a}{b}(x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$, получ.

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1)^2 < \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2;$$

первая часть есть x_2, а вторая есть x', слѣд.

$$x_2 < x'.$$

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ, затѣмъ умножая на $\frac{a}{b}$, имѣемъ

$$\frac{a}{b}(x_2)^2 < \frac{a}{b} \cdot (x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$, им:

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x')^2;$$

первая часть есть x_3, а вторая $= x'$, слѣд.

$$x_3 > x';$$

и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, убѣдимся, что всѣ приближенія нечетнаго порядка больше настоящей величины x', а четнаго—меньше x'.

Кромѣ того, если выпишемъ, всѣ четныя, затѣмъ всѣ нечетныя приближенія, получимъ два ряда:

$$x_1 = \frac{c}{b} \qquad\qquad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1)^2$$

$$x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2 \qquad\qquad x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_3)^2$$

$$x_5 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_4)^2 \qquad\qquad x_6 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_5)^2$$

. . . .

. . . .

Разсматривая первую пару нечетныхъ приближеній, замѣчаемъ, что очевидно:

$$x_3 < x_1.$$

Обращаясь затѣмъ къ первой парѣ четныхъ приближеній, и взявъ ихъ разность, имѣемъ

$$x_4 - x_2 = \frac{a}{b}(x_1^2 - x_3^2) \;; \quad \text{но} \quad x_3 < x_1 \;, \quad \text{слѣд.}$$

$$x_4 > x_2.$$

Переходя ко второй парѣ нечетныхъ приближеній и взявъ ихъ разность, находимъ:

$$x_3 - x_5 = \frac{a}{b}(x_4^2 - x_2^2) \;; \quad \text{но} \quad x_4 > x_2 \;, \quad \text{слѣд.}$$

$$x_5 < x_3.$$

Взявъ разность второй пары четныхъ приближеній:

$$x_6 - x_4 = \frac{a}{b}(x_3^2 - x_5^2) \;; \quad \text{но} \quad x_5 < x_3 \;, \quad \text{слѣд.}$$

$$x_6 > x_4 \;; \quad \text{и т. д.}$$

Заключаемъ, что приближенія нечетнаго порядка, оставаясь всегда больше x', идутъ постепенно уменьшаясь и слѣд. приближаются къ x'; приближенія же четнаго порядка, всегда оставаясь меньше x', идутъ увеличиваясь, и слѣд. также приближаются къ x'.

Докажемъ, что разность между тѣми и другими приближеніями и x' стремится къ нулю, и слѣд. м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

Возьмемъ приближеніе нечетнаго порядка x_{2p+1}, которое больше x', и назовемъ погрѣшность этого приближенія т. е. разность между нимъ и x' черезъ ε_{2p+1}; имѣемъ:

$$\varepsilon_{2p+1} = x_{2p+1} - x' = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_{2p}^2\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2\right)$$

$$= \frac{a}{b}\,(x'^2 - x_{2p}^2) = \frac{a}{b}\,(x' + x_{2p})\,(x' - x_{2p}) = \frac{a}{b}\,(x' + x_{2p}) . \varepsilon_{2p}$$

Но, по (2), $x' < x_1$ или $\frac{c}{b}$; x_{2p}, какъ приближеніе четнаго порядка, меньше x', а сл. и подавно $< x_1$ или $\frac{c}{b}$; итакъ

$$x' < \frac{c}{b}$$

$$x_{2p} < \frac{c}{b} \qquad \text{складывая, имѣемъ}$$

$$x' + x_{2p} < \frac{2c}{b} \;;$$

слѣд.

$$\varepsilon_{2p+1} < \frac{2ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{2p}.$$

Кромѣ того

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{b} \cdot x'^2, \qquad \text{но} \qquad x' < \frac{c}{b}, \text{ сл.} \quad x'^2 < \frac{c^2}{b^2}$$

поэтому

$$\varepsilon_1 < \frac{a}{b} \times \frac{c^2}{b^2}$$ или множа и дѣля вторую часть на 2:

$$\varepsilon_1 < \frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b}.$$

Выразимъ теперь предѣлъ погрѣшности приближенія четнаго порядка, напр. x_{2p}. Имѣемъ

$$\varepsilon_{2p} = x' - x_{2p} = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^2_{2p-1}\right)$$

$$= \frac{a}{b}\left(x^2_{2p-1} - x'^2\right) = \frac{a}{b}(x_{2p-1} + x')(x_{2p-1} - x')$$

$$= \frac{a}{b}(x_{2p-1} + x') \cdot \varepsilon_{2p-1}.$$

Но x_{2p-1} и x' меньше x_1 или $\frac{c}{b}$, сл.

$$\varepsilon_{2p} < \frac{2ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{2p-1}$$

Итакъ, предѣлъ погрѣшности четнаго и нечетнаго порядка выражается одинаково: произведеніемъ $\frac{2ac}{b^2}$ на погрѣшность предшествующаго приближенія. Слѣд., будетъ-ли n четное или нечетное, всегда

$$\varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1}.$$

Полагая въ этой формулѣ $n = 2, 3, 4, \ldots, n$ получимъ формулы погрѣшностей 2-го, 3-го, ... приближеній; присоединивъ сюда формулу погрѣшности 1-го приближенія, имѣемъ:

$$\varepsilon_1 < \frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b}$$

$$\varepsilon_2 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_2$$

. . . .

. . . .

$$\varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1};$$

Перемножая и сокращая общихъ множителей, найдемъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}.$$

Отсюда видно, что если $\frac{2ac}{b^2}$ будетъ < 1, или, что все равно, если

$$a < \frac{b^2}{2c}$$

то всегда можно взять n достаточно большимъ, чтобы сдѣлать $\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}$ мень-

ше данной величины; и сл. чтб. погрѣшность ε_n, и подавно, была меньше той же величины.

Но и въ этомъ случаѣ метода удобна только тогда, когда $\frac{2ac}{b^2}$ будетъ *значительно* меньше 1, ибо только при такомъ условіи x_1, x_2, x_3, ... будутъ быстро приближаться къ искомой величинѣ. Останавливаясь на приближеніи нечетнаго порядка, получимъ величину ошибочную по избытку; останавливаясь на приближеніи четнаго порядка, имѣемъ величину съ ошибкою по недостатку; въ обоихъ случаяхъ высшій предѣлъ сдѣланной погрѣшности узнаемъ, вычисливъ

$$\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}.$$

Примѣръ. $5x^2 + 140x - 7 = 0$. Здѣсь

$$a = 5; \qquad b = 140; \qquad c = 7;$$

$\frac{2ac}{b^2} = \frac{70}{140^2} = \frac{1}{280}$; это число значительно < 1, поэтому метода приложима. Первое приближеніе

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{7}{140} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Погрѣшность этого приближенія, ε_1, будетъ меньше $\frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b} = \frac{1}{280} \times \frac{1}{40}$ $= \frac{1}{11200}$, а сл. и подавно, $< \frac{1}{10000}$.

Второе приближеніе

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1^2 = 0{,}05 - \frac{1}{28} \times 0{,}0025 = 0{,}0499107 \ldots$$

Ошибка $\varepsilon_2 < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^2 \times \frac{c}{2b}$, или $< \frac{1}{(280)^2} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{3136000}$, а потому и подавно меньше $\frac{1}{3} \times \frac{1}{1000000}$.

Значитъ, положительный корень, съ ошибкою меньшею одной полу-милліонной, равенъ

$$0{,}049911.$$

Сумма корней $= -28$, сл. отриц. корень, съ тою же точностью, равенъ

$$-27{,}950089. -$$

481. Задачи. Рѣшить слѣдующія численныя уравненія:

1. $\frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 + \frac{120}{(12-5x)^2}$.
2. $\frac{5}{2+x} - \frac{5}{x-4} = \frac{2-x}{x-4} + \frac{2}{x^2-2x-8}$.
3. $\frac{x+7}{x(x-7)} - \frac{x-7}{x(x+7)} = \frac{7}{x^2-73}$.
4. $(3x-2)^2 = 8(x+1)^2 - 100$.

5. $3(2x-3)-\frac{22}{x}=(x-\frac{3}{2})5.$

6. $\frac{9-x}{2}+\frac{4}{x-2}=\frac{(x-1)3}{2}.$

7. $11x^2+7x-\frac{3}{7}=4x(x+1)+1.$

8. $x(12x+0,7)-\frac{7}{11}=x(3x-0,2)+6\frac{4}{11}.$

9. $\frac{x-3}{x+4}+\frac{x-4}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$

10. $\frac{3x+2}{2x-1}+\frac{7-x}{2x+1}=\frac{7x-1}{4x^2-1}+5.$

11. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0.$

12. $x^2-5(x+89)=5555.$

13. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}+\frac{4}{x+4}=0.$

14. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4.$

15. $\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}+\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{13}{4}.$

16. $\frac{3x-2}{x-4}+\frac{2x-1}{x-2}=6+\frac{50}{x^2-6x+8}.$

17. $\frac{3}{5(x^2-1)}+\frac{1}{10(x+1)}=\frac{23}{238}.$

18. $\frac{8}{x-1}+8x=\frac{5x}{3}+40.$

19. $\frac{4}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-2x-3}=\frac{1}{x^2+4x+3}.$

20. $\frac{7}{5(x-3)}-\frac{8}{3(x-15)}=\frac{11}{4x-25}.$

21. $\frac{8}{3x-5}+\frac{9}{5x-8}=\frac{20}{7x-25}.$

22. $\frac{2x+1}{7-x}+\frac{4x+1}{7+x}=\frac{45}{49-x^2}+1.$

23. $\frac{x+0,5}{2,5-x}=\frac{2x-0,5}{x+0,5}.$

24. $\frac{2(x+7)}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+11}{x^2-1}+4.$

25. $10x-\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{18-40x^2}{3-4x}-9.$

26. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{3x+1}{2\left(x-\frac{4}{x}\right)}-\frac{12}{x^2-4}.$

27. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

28. $\frac{2x-3}{5}+\frac{1}{7}\left(5x-\frac{6x+4}{5x+1}\right)=x+\frac{5x+8}{3x-14}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{7}+\frac{x-9}{5}\right).$

29. $\left(\frac{x}{4}-\frac{x+2}{3}\right)\cdot 3+\frac{7x+4}{3x+2}=\frac{x}{4}-\frac{x^2}{2x-3}+\frac{x}{2x-3}.$

30. $\frac{2x^2-3x}{x^4-1}-\frac{9}{8}(x^2+1)^{-1}+2(x+1)^{-1}-\frac{10}{x^3-x^2+x-1}=\frac{2}{x-1}-$

$-\frac{4(x+7)}{x^3+x^2+x+1}.$

31. $7+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}.$

32. $\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)^2}.$

33. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x(x-2)}=\frac{6}{x^2-4}$.

34. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+7}=\frac{1}{7(x-1)}$.

35. $\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}+1$.

36. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{13}{2x-1}+\frac{1}{27}$.

37. $\frac{1}{3}-\frac{x^2}{3(x-1)}=\frac{1}{3(1-x)}-2$.

38. $\frac{x(x+2)^2(x-3)}{x^5-4x^4-2x^3+14x^2-3x+18}=0$.

Рѣшить буквенныя уравненія:

39. $x^2-2bx+(b^2-a^2)=0$.

40. $abx^2-(a^2+b^2)x+1=0$.

41. $abx^2+ab+b^2=a^2x+b^2x^2$.

42. $a^2x^2+1=b^2x^2+(a-b)x+(a+b)x$.

43. $(5a^2+b^2)(3x^2-4x+3)=(5b^2+a^2)(3x^2+4x+3)$.

44. $25a^2x^2+1=9b^2x^2+10ax$.

45. $x^2-2a^2x+a^4+b^4=2b^2(x-a^2)$.

46. $(x+a)(x-b)(2a-x)=(x-a)(x+b)(2b-x)$.

47. $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$.

48. $abx^2-(a^2+b^2+4ab)x+2(a^2+b^2)+5ab=0$.

49. $x^2-x\left\{a(a+1)+b(b+1)-ab\right\}+a^3+b^3=0$.

50. $abx^2-\left\{3(a+b)^2-2ab\right\}x+6(a-b)^2+25ab=0$.

51. $x^2-2x(1+3a)-4a^3+13a^2+5a+1=0$.

52. $3x^2(12-a^2)-2x(3a^3-4a^2-24a+24)-3a^4+8a^3+8a^2-32a+16=0$.

53. $x^2(b^2+bc+c^2)+3bc(b+c)x+3b^2c^2=0$.

54. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$.

55. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$.

56. $\frac{a}{x-a}+\frac{c}{x-c}=\frac{2b}{x-b}$.

57. $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\frac{cx}{ab}$.

58. $\frac{x+4a}{x^2-5ax+6a^2}+\frac{x+3a}{x^2-6ax+8a^2}+\frac{x+2a}{x^2-7ax+12a^2}=\frac{29}{24}$.

59. Доказать, что уравненіе

$$(1+q^2)x^2+2pqx+(1+p^2)=0$$

не имѣетъ дѣйствительныхъ корней.

60. Доказать, что корни уравненія

$$x^2-(r+t)x+rt-s^2=0$$

всегда дѣйствительны, каковы бы ни были знаки количествъ r, s и t.

61. Доказать, что корни уравненій:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{a}$; 2) $\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}=a$; 3) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{a}$

всегда дѣйствительны, и что если $a>0$, оба корня 3-го положительны.

62. Доказать, что корни уравненія

$$(x-a)^2-(1+\alpha^2)(x-b)(x-c)=0$$

всегда дѣйствительны и вообще неравны. Указать частный случай, когда корни дѣлаются равными.

63. Доказать, что уравненіе

$$(a^2+b^2+c^2)x^2-2(aa'+bb'+cc')x+a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2=0$$

имѣемъ корни мнимые, за исключеніемъ случая, когда

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

64. Доказать, что каждое изъ слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$(b^2-4ac)x^2-2[2ac'+2ca'-bb']x+(b_1{}^2-4a_1c_1)=0,$$

$$(ab'-ba')x^2-2(ac'-ca')x+bc'-cb'=0$$

имѣетъ корни дѣйствительные, если $b^2-4ac<0$.

65. Доказать, что уравненіе

$$(a-x)(c-x)-b^2=0$$

имѣетъ корни всегда дѣйствительные, и вообще неравные; указать частный случай, когда корни будутъ равные.

66. Доказать, что если корни уравненія

$$ax^2+2bx+c=0$$

дѣйствительные и неравные, то корни ур-нія

$$(a+c)(ax^2+2b.x+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$$

будутъ мнимые; и обратно: если корни 2-го ур-нія мнимы, то 1-го дѣйствительны.

67. Доказать, что если m и n суть два числа одинаковаго знака, и a, b и c — какія угодно дѣйствительныя числа, то уравненіе

$$\frac{m}{x-a}+\frac{n}{x-b}+c=0$$

имѣетъ корни дѣйствительные.

68. Доказать, что если уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ корни дѣйствительные, то уравненіе

$$x^2+px+q+(x+a)(2x+p)=0$$

имѣетъ также дѣйствительные корни, каковъ бы ни былъ знакъ количества a.

69. Каковы корни уравненія

$$(a^2-b^2)x^2-(2a^2+3ab-b^2)x+(a^2+3ab+2b^2)=0$$

при $a=b$?

70. Къ какимъ предѣламъ стремятся корни уравненія

$$(\lambda^2+\lambda-2)x^2+(\lambda^2+3\lambda+2)x-(\lambda^2-1)=0,$$

когда λ принимаетъ поочередно значенія: 1, —2, —1.

71. Рѣшить уравненіе $bx^2-c(x-a)^2=d$, и изслѣдовать его корни при $b=c$.

72. Доказать, что корни уравненія

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$$

всегда дѣйствительны.

73. При какомъ значеніи λ ур-ніе $(\lambda-1)x^2-2(\lambda+1)x+(\lambda-2)=0$ имѣетъ дѣйствительные равные корни?

74. Доказать, что корни ур-нія $ax^2+bx+c=0$ всегда раціоральны, если $b=am+\frac{c}{m}$, гдѣ a, c, m — количества раціональныя.

75. Доказать, что уравненіе

$$(1+p^2+q^2)x^2-[r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs]x+rt-s^2=0$$

имѣетъ корни дѣйствительные, каковы бы ни были числа p, q, r, s и t.

Затѣмъ, доказать, что условіе необходимое и достаточное для того, чтобы корни были равные, выражается равенствами

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

76. Доказать, что если корни ур-нія $ax^2+bx+c=0$ дѣйствительны, то уравненіе

$$(2ax+b)^2-2a(ax^2+bx+c)=0$$

имѣетъ корни мнимые.

77. Доказать, что если ур-ніе $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ корни мнимые, то уравненія

$$ax^2+bx+c+h^2(2ax+b)+2ah^4=0,$$

$$ax^2+bx+c+x\,(2ax+b)+2ax^2=0$$

имѣютъ также мнимые корни.

78. При какомъ значеніи λ ур-ніе $(a+\lambda)x^2-a(2a-\lambda)x+b-2a^2\lambda=0$ имѣетъ равные корни.

79. Тотъ же вопросъ относительно ур-нія $x^2+2(\lambda-4)x+\lambda^2+6\lambda+3=0$.

80. Вычислить, по способу послѣдовательныхъ приближеній, корни уравненій:

a) $3x^2+254x+5=0$ } съ точностью до 0,1.
b) $4x^2-625x-8=0$ }

c) $0{,}000048x^2-19x+1=0$, съ десятью десятичными знаками.

d) $3x^2+2615x-540=0$, съ точность до 0,00001.

e) $0{,}000007x^2+x-1=0$, съ 12-ю десятичными знаками.

f) $0{,}0002x^2-2x+3=0$, съ точностью до 0,000001.

g) $0{,}00004x^2-8x+7=0$, съ 11-ю десятичными знаками.

h) $0{,}001x^2+x-1=0$, съ точностью до 0,001.

ГЛАВА XXXI.

Связь между коэффиціентами и корнями квадратнаго уравненія.—Приложенія.—Построеніе корней квадратнаго уравненія.—Задачи.

482. Теорема. *Каковы бы ни были корни уравненія*

$$ax^2+bx+c=0:$$

1) ихъ сумма равна взятому съ обратнымъ знакомъ частному отъ раздѣленія втораго коэффиціента на первый, т. е.

$$-\frac{b}{a};$$

2) а произведеніе равно частному отъ раздѣленія третьяго коэффиціента на первый, т. е.

$$\frac{c}{a}.$$

Повѣрка. Мы знаемъ, что во всѣхъ случаяхъ корни даннаго уравненія выражаются формулами

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

складывая которыя, находимъ

$$x' + x'' = -\frac{b}{a};$$

а перемножая, находимъ

$$x'.x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2};$$

замѣчая, что числитель представляетъ произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность, и слѣд. равенъ разности ихъ квадратовъ, имѣемъ:

$$x'.x'' = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Первое доказательство. Такъ какъ корни x' и x'', при подстановкѣ въ уравненіе, обращаютъ его въ тождество, то имѣемъ два тождества

$$ax'^2+bx'+c=0, \qquad ax''^2+bx''+c=0.$$

Принимая за неизвѣстныя—коэффиціенты a, b и c, видимъ, что они удовлетворяютъ двумъ ур-мъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи неопредѣленна.

Но если оба равенства раздѣлимъ на a:

$$x'^2+\frac{b}{a}x'+\frac{c}{a}=0, \qquad x''^2+\frac{b}{a}x''+\frac{c}{a}=0,$$

то, принимая за неизвѣстныя — отношенія $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, находимъ, что эти отношенія должны удовлетворять двумъ уравненіямъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи опредѣленна. Эти два ур-нія и дадутъ намъ величины $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ въ функціи корней. Для исключенія $\frac{c}{a}$ вычитаемъ 2-е ур-ніе изъ 1-го и находимъ

$$(x'^2-x''^2)+\frac{b}{a}(x'-x'')=0.$$

Положимъ, что $x' \lessgtr x''$; въ такомъ случаѣ позволительно сократить ур-ніе на количество $x'-x''$ (какъ неравное нулю), и получится

$$x'+x''+\frac{b}{a}=0, \qquad \text{откуда} \qquad x'+x''=-\frac{b}{a}.$$

Внеся вмѣсто $\frac{b}{a}$ равную ему величину $-(x'+x'')$ въ первое уравненіе, найдемъ

$$x'^2-(x'+x'')x'+\frac{c}{a}=0, \quad \text{или} \quad -x'x''+\frac{c}{a}=0, \quad \text{откуда}$$

$$x'x''=\frac{c}{a}.$$

Теорема доказана; но опредѣленіе $\frac{b}{a}$ сдѣлано въ предположеніи, что корни неравны. Остается доказать, что теорема справедлива и въ случаѣ равныхъ корней. Мы знаемъ, что если корни равны, то каждый изъ нихъ $=-\frac{b}{2a}$, слѣд., ихъ сумма $=-\frac{b}{a}$; а отсюда, какъ и выше, найдемъ, что $x'x''=\frac{c}{a}$.

Второе доказательство. Такъ какъ x' и x'' суть корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то триномъ ax^2+bx+c обращается въ ноль при подстановкѣ въ него x' и x'' вмѣсто x, и слѣд. дѣлится какъ на $x-x'$, такъ и на $x-x''$: слѣд., если x' не равно x'', то этотъ триномъ, на осн. теоремы § 68, дѣлится и на произведеніе $(x-x')(x-x'')$, а какъ дѣлитель —одинаковой степени съ дѣлимымъ, то частное будетъ нулевой степени относительно x, и потому приводится къ одному члену, именно къ частному отъ раздѣленія перваго члена ax^2 дѣлимаго на первый членъ x^2 дѣлителя, что даетъ a. Итакъ

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x''),$$

или, раскрывъ вторую часть и расположивъ по степенямъ буквы x, находимъ тождество

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x'';$$

а отнявъ отъ обѣихъ частей по ax^2;

$$bx+c=-a(x'+x'')x+ax'x''.$$

Отсюда, по теоремѣ § 73, имѣемы

$$b=-a(x'+x'') \qquad \text{и} \qquad c=ax'x'';$$

выражая изъ 1-го равенства $x'+x''$, а изъ 2-го $x'x''$, находимъ:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}; \qquad x'x''=\frac{c}{a}.$$

И это доказательство предполагаетъ, что $x'\lessgtr x''$. Но нужно замѣтить, что если найденныя соотношенія вѣрны, когда корни различны, то они приложимы и тогда, когда корни разнятся между собою какъ угодно мало, а потому справедливы и для равныхъ корней.

483. *Примѣчаніе*. Если уравненіе имѣетъ видъ

$$x^2+px+q=0,$$

то, чтобы перейти къ нему отъ уравненія $ax^2+bx+c=0$, надо положить: $a=1$, $b=p$, $c=q$.

Тогда формулы соотношеній примутъ видъ:

$$x'.x''=\frac{q}{1}=q; \qquad x'+x''=-\frac{p}{1}=-p;$$

слѣд., *сумма корней уравненія* $x^2+px+q=0$ *равна коэффиціенту при первой степени неизвѣстнаго, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно извѣстному члену.*

484. Слѣдствія. I. Вычислить разность корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, не рѣшая уравненія.

Обозначивъ разность корней буквою z, можемъ выразить z^2 по суммѣ и произведенію корней; на самомъ дѣлѣ:

$$z^2=(x'-x'')^2=x'^2+x''^2-2x'x''=x'^2+x''^2+2x'x''-4x'x''$$

$$=(x'+x'')^2-4x'x''=\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}, \qquad \text{откуда}$$

$$z=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}.$$

Тотъ же результатъ нашли бы и прямымъ вычитаніемъ корней.

II. Когда извѣстенъ одинъ изъ корней квадратнаго уравненія, то другой можно найти, не рѣшая уравненія, *а*: 1) раздѣливъ произведеніе корней $\left(\frac{c}{a}\right)$ на извѣстный корень, или: 2) вычтя извѣстный корень изъ суммы корней, т. е. изъ $-\frac{b}{a}$.

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$. Прямо видно, что уравненіе имѣетъ корень $x'=a$, ибо при $x=a$ обѣ части дѣлаются тождественными.

Для нахожденія втораго корня приводимъ уравненіе къ цѣлому виду:

$$(2a+b)x^2+(b^2-2a^2)x-ab(a+b)=0;$$

и раздѣливъ произведеніе корней $-\frac{ab(a+b)}{2a+b}$ на извѣстный корень a, найдемъ другой корень

$$x''=-\frac{b(a+b)}{2a+b}.$$

Можно рѣшить это ур-ніе и другимъ пріемомъ; напишемъ его въ видѣ

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{x+b}-\frac{1}{a+b}=0, \quad \text{или} \quad (a-x)[(x+b)(a+b)+ax]=0,$$

Приравнивая нулю первый множитель, находимъ одинъ корень $x'=a$; приравнивая нулю второй множитель, получаемъ ур-ніе первой степени

$$(x+b)(a+b)+ax=0,$$

откуда и найдемъ второй корень.

III.—*Когда коэффиціенты уравненія соизмѣримы, то дѣйствительные корни или оба соизмѣримы, или оба несоизмѣримы*, потому-что ихъ сумма, напр., соизмѣрима; *и когда они несоизмѣримы, то сопряженны.*

IV.—*Когда каэффиціенты ур-нія дѣйствительны, то или оба корня дѣйствительны, или оба мнимы*, ибо ихъ сумма дѣйствительна, *и когда они мнимы, то сопряженны.*

Переходимъ къ изученію приложеній теоремы § 482.

485. *Приложеніе I.* **Изслѣдованіе, à priori, корней квадратнаго уравненія.**

Опредѣленіе.—Изслѣдовать à priori квадратное уравненіе значитъ: не рѣшая его, опредѣлить, будутъ-ли корни его дѣйствительные или мнимые; когда они дѣйствительны, узнать—равные они, или неравные; въ случаѣ ихъ равенства, указать ихъ общую величину, въ случаѣ же неравенства указать—одинаковаго они знака, или имѣютъ знаки противоположные; если имѣютъ общій знакъ, то указать—какой именно; если же знаки корней различны, то указать знакъ корня, имѣющаго большую абсолютную величину.

1. Если окажется, что

$$b^2-4ac<0,$$

то корни уравненія будутъ *мнимые сопряженные.*

2. Если

$$b^2-4ac=0,$$

то мы знаемъ, что корни уравненія *дѣйствительные равные*, и общая величина ихъ есть.

$$-\frac{b}{2a}.$$

3. Наконецъ, если окажется, что

$$b^2-4ac>0,$$

то заключаемъ, что ур-ніе имѣетъ корни *дѣйствительные неравные.* При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что для опредѣленія знака разности b^2-4ac не всегда необходимо вычислять эту разность, а именно *если* $ac<0$, *т. е. a и c имѣютъ знаки противоположные, то разность* b^2-4ac *необходимо положительна.* Въ самомъ дѣлѣ, если $ac<0$, то можно положить $4ac=-\alpha^2$, гдѣ $-\alpha^2$ количество существенно—отрицательное, и слѣд. $b^2-4ac=b^2-(-\alpha^2)=b^2+\alpha^2$, а сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ существенно положительна. Значитъ *при* $ac<0$ *корни уравненія безусловно дѣйствительны.*

Когда уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и неравные, то:

Если $\frac{c}{a}>0$, т. е. произведеніе корней положительно, оба корня имѣютъ одинаковые знаки. Но если знаки корней одинаковы, то общій знакъ будетъ такой, какъ у ихъ суммы, которая равна $-\frac{b}{a}$.

Отсюда:

Если $\frac{b}{a}>0$, то $-\frac{b}{a}$ будетъ количество отрицательное, и слѣд. оба корня отрицательны.

Если $\frac{b}{a}<0$, то $-\frac{b}{a}$ положительно, и потому оба корня положительны.

Если же $\frac{c}{a} < 0$, т. е. произведеніе корней отрицательно, то знаки корней противоположны. Но въ такомъ случаѣ сумма ихъ имѣетъ такой знакъ, какой у корня съ большею абсолютною величиной. Отсюда:

Если $\frac{b}{a} > 0$, то сумма корней $-\frac{b}{a}$ будетъ отрицательна, и слѣд. большій, по абсолютной величинѣ, корень отрицателенъ.

Если же $\frac{b}{a} < 0$, и слѣд. $-\frac{b}{a} > 0$, то большій корень положителенъ.

Примѣры.—I. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$7x^2 + 3x + 5 = 0;$$

въ данномъ случаѣ $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 7 \times 5 = -131$, т. е. количеству отрицательному, слѣд. корни — *мнимые.*

II. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$9x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x четный, то составляетъ разность $b'^2 - ac$; имѣемъ $b'^2 - ac = 6^2 - 9 \times 4 = 0$, а потому корни ур-нія *дѣйствительные равные*. Общая величина ихъ $= -\frac{b'}{a} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$.

III. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$b'^2 - ac = 4^2 - 3 \times 4 = +4$, слѣд. корни *дѣйствительные неравные*. Произведеніе корней $= +\frac{4}{3}$, т. е. положительно, слѣд. знаки корней одинаковы. Сумма корней $= +\frac{8}{3}$, т. е. > 0, слѣд. оба корня положительны.

IV. *Изслѣдовать корни уравненія.*

$$8x^2 + 57x + 10 = 0;$$

$b^2 - 4ac = 57^2 - 4 \times 8 \times 10 = +2929$, количеству положительному, поэтому корни—дѣйствительные неравные. Произведеніе ихъ, равное $+\frac{10}{8}$, положительно, слѣд. знаки корней одинаковы. Сумма корней, равная $-\frac{57}{8}$, отрицательна, слѣд. оба корня отрицательны.

V. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$3x^2 - 8x - 3 = 0;$$

a и c имѣютъ знаки противоположные, слѣд. корни—дѣйствительные неравные. Произведеніе ихъ, равное -1, отрицательно, потому знаки корней различны. Сумма корней, равная $+\frac{8}{3}$, положительна, слѣд. большій по абсолютной величинѣ корень положителенъ.

VI. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$3x^2 + 8x - 3 = 0;$$

a и c — разнаго знака, слѣд. опять корни уравненія дѣйствительные, неравные и разнаго знака. Сумма ихъ, равная $-\frac{8}{3}$, отрицательна, слѣд. большій по абсолютной величинѣ корень отрицателенъ.

486. *Приложеніе* **II. Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.**

Пусть требуется составить квадратное уравненіе, корнями котораго были бы количества α и β. Искомое ур-ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0;$$

нужно опредѣлить коэффиціенты p и q; соотношенія между коэффиціентами и корнями даютъ:

$$p=-(\alpha+\beta)\ , \quad q=\alpha\,.\,\beta;$$

искомое ур-ніе такимъ образомъ есть

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

Примѣры I. *Составить ур-ніе, котораго корни были бы:* $\frac{2}{5}$ и $-\frac{3}{4}$.

Искомое ур-ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0,$$

причемъ должно быть:

$$p=-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{20}\ , \quad q=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{6}{20};$$

слѣд. искомое ур-ніе будетъ:

$$x^2+\frac{7}{20}x-\frac{6}{20}=0, \quad \text{или} \quad 20x^2+7x-6=0.$$

II. *Составить ур-ніе, корнями котораго были-бы* $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a-b}$.

Искомое ур-ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0,$$

гдѣ $p=-\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)=-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; $q=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{ab}{a^2-b^2}$;

слѣд. ур-ніе будетъ

$$x^2-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot x+\frac{ab}{a^2-b^2}, \quad \text{или} \quad (a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$$

III. *Составить квадратное уравненіе, съ соизмѣримыми коэффиціентами, которое имѣло бы корень* $5-3\sqrt{7}$.

Искомое уравеніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0;$$

такъ какъ, по условію, p и q должны быть *соизмѣримы*, и мы доказали, что ур-ніе съ соизмѣримыми коэффиціентами, имѣющее корень $5-3\sqrt{7}$, имѣетъ другой корень сопряженный съ первымъ; слѣд. второй корень будетъ $5+3\sqrt{7}$; поэтому

$$p=-(5-3\sqrt{7}+5+3\sqrt{7})=-10;$$
$$q=(5-3\sqrt{7})(5+3\sqrt{7})=-38;$$

слѣд. искомое уравненіе есть

$$x^2 - 10x - 38 = 0.$$

Примѣчаніе.—Задача эта опредѣленна только тогда, когда существуетъ условіе, чтобы коэффиціенты искомаго уравненія были соизмѣримы; если этого требованія нѣтъ, то задача неопредѣленна, ибо существуетъ безчисленное множество квадратныхъ уравненій, имѣющихъ данный корень; такъ, уравненія, имѣющія корень $5 - 3\sqrt{7}$ (называя другой корень буквою λ), суть

$$x^2 - (\lambda + 5 - 3\sqrt{7}) + \lambda(5 - 3\sqrt{7}) = 0,$$

гдѣ λ—произвольное количество.

Въ § 471 мы видѣли, что условіе, чтобы квадратное ур-ніе *съ соизмѣримыми коэффиціентами* удовлетворялось несоизмѣримымъ значеніемъ $\alpha + \sqrt{\beta}$ неизвѣстнаго, выражалось двумя соотношеніями между коэффиціентами. Взявъ эти соотношенія, мы имѣли бы два ур-нія, изъ которыхъ могли бы получить уже найденныя значенія для p и q.

IV. *Составить квадратное ур-ніе, съ дѣйствительными коэффиціентами, имѣющее корень* $2 + 3i$.

Искомое ур-ніе имѣетъ видъ

$$x^2 + px + q = 0;$$

для опредѣленія p и q замѣчаемъ, что ур. *съ дѣйствительными коэффиціентами*, имѣющее корень $2 + 3i$, имѣетъ другимъ корнемъ мнимое сопряженное выраженіе $2 - 3i$. Отсюда

$$p = -(2 + 3i + 2 - 3i) = -4, \qquad q = (2 + 3i)(2 - 3i) = 13;$$

и искомое ур-ніе будетъ $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Примѣчаніе. Задача эта опредѣленна потому только, что на коэффиціенты наложено ограниченіе, чтобъ они были *дѣйствительны.* Если этого ограниченія нѣтъ, задача неопредѣленна; называя буквою λ совершенно произвольное количество, дѣйствительное или мнимое, получимъ уравненіе

$$x^2 - (\lambda + 2 + 3i) + \lambda(2 + 3i) = 0.$$

необходимо имѣющее одинъ изъ корней равный $2 + 3i$.

Если бы мы прямо выразили, что $2 + 3i$ удовлетворяетъ ур-нію $x^2 + px + q = 0$, то (см. § 473) въ случаѣ дѣйствительныхъ p и q, нашли бы два ур-нія для опредѣленія p и q, именно:

$$4 - 9 + q + 2p = 0, \qquad 12 + 3p = 0,$$

откуда нашли бы $p = -4$, $q = 13$.

487. *Приложеніе III.* **Преобразованіе корней квадратнаго уравненія.**

Задача I. *Дано квадратное уравненіе* $ax^2 + bx + c = 0$; *составить другое уравненіе, котораго корни отличались бы отъ корней даннаго только знаками.*

Искомое уравненіе будетъ вида

$$x^2 + px + q = 0.$$

если корни даннаго ур-нія обозначимъ буквами x' и x'', то корни новаго должны равняться $-x'$ и $-x''$: подъ этимъ условіемъ и нужно опредѣлить p и q. Итакъ

$$p=-(-x'-x'')=x'+x''=-\frac{b}{a};\qquad q=(-x').(-x'')=x'x''=\frac{c}{a}\cdot$$

Слѣд., искомое уравненіе будетъ

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,\qquad \text{или}\qquad ax^2-bx+c=0.$$

Легко видѣть, что *мы его получимъ прямо изъ даннаго, подставивъ въ послѣднее* $-x$ *вмѣсто* x.

Задача II. *Дано квадратное ур.* $ax^2+bx+c=0$; *составить другое ур-ніе, корни котораго были бы обратны корнямъ даннаго.*

Пусть корни даннаго уравненія будутъ x' и x''. Мы хотимъ составить уравненіе, $x^2+px+q=0$, корнями котораго были бы $\frac{1}{x'}$ и $\frac{1}{x''}$; слѣдовательно

$$p=-\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)=-\frac{x'+x''}{x'+x''}=-\left(-\frac{b}{a}:\frac{c}{a}\right)=\frac{b}{c};$$

$$q=\frac{1}{x'}\cdot\frac{1}{x''}=\frac{1}{x'x''}=1:\frac{c}{a}=\frac{a}{c}\cdot$$

Такимъ образомъ, искомое ур-ніе будетъ

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0,\qquad \text{или}\qquad cx^2+bx+a=0.$$

этотъ же результатъ мы найдемъ, если въ данное ур. подставимъ $\frac{1}{x}$ вмѣсто x; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c=0,\qquad \text{или}\qquad cx^2+bx+a=0.$$

Итакъ: *уравненіе съ обратными величинами корней выводится изъ даннаго замѣною* x *обратнымъ ему количествомъ* $\frac{1}{x}$.

Задача III. *По данному уравненію* $ax^2+bx+c=0$; *составить другое, корни котораго равнялись бы корнямъ даннаго, сложеннымъ съ даннымъ количествомъ* λ.

Пусть корни даннаго уравненія будутъ x' и x''; требуется составить уравненіе $x^2+px+q=0$, корни котораго были бы $x'+\lambda$ и $x''+\lambda$. Слѣдовательно

$$p=-(x'+x''+2\lambda)=-\left(-\frac{b}{a}+2\lambda\right)=\frac{b}{a}-2\lambda;$$

$$q=(x'+\lambda)(x''+\lambda)=x'x''+(x'+x'')\lambda+\lambda^2=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\lambda+\lambda^2\cdot$$

Требуемое уравненіе есть, слѣдоват.,

$$x^2+\left(\frac{b}{a}-2\lambda\right)x+\left(\lambda^2-\frac{b}{a}\lambda+\frac{c}{a}\right)=0,$$

или

$$ax^2+(b-2a\lambda)x+(a\lambda^2-b\lambda+c)=0.$$

Этотъ результатъ мы нашли бы, если бы въ данное ур-ніе вмѣсто x подставили $x-\lambda$; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$a(x-\lambda)^2+b(x-\lambda)+c=0,$$

или, раскрывая скобки и приводя члены въ порядокъ,

$$ax^2+(b-2a\lambda)x+(a\lambda^2-b\lambda+c)=0.$$

Итакъ: *уравненіе съ корнями даннаго, сложенными съ* λ, *выводится изъ даннаго замѣною* x *биномомъ* $x-\lambda$.

Примѣръ. *Составить уравненіе, котораго корни были бы больше корней ур-нія* $3x^2-5x-4=0$ *на* 2.

Замѣнивъ въ данномъ уравненіи x разностью $x-2$, имѣемъ:

$$3(x-2)^2-5(x-2)-4=0, \quad \text{или} \quad 3x^2-17x+18=0.$$

488. Эта задача важна по своему отношенію къ слѣдующимъ двумъ вопросамъ, встрѣчающимся при изслѣдованіи задачъ второй степени.

Вопросъ I. *Выразить, что оба корня квадратнаго уравненія*

$$ax^2+bx+c=0$$

больше даннаго количества λ.

Если корни уравненія назовемъ буквами x' и x'', то по условію должно быть

$$x'>\lambda \text{ и } x''>\lambda, \quad \text{или, что то же,} \quad x'-\lambda>0 \text{ и } x''-\lambda>0 \ . \ . \ . \ (1).$$

Если теперь по данному уравненію мы составимъ такое, котораго корни равнялись бы $x'-\lambda$ и $x''-\lambda$, то найдемъ требуемыя условія, выразивъ, что корни новаго уравненія должны быть положительны (въ силу 1).

Для составленія новаго уравненія, нужно въ данномъ замѣнить x разностью $x+\lambda$; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$ax^2+(b+2a\lambda)x-(a\lambda^2+b\lambda+c)=0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Чтобы корни этого ур-нія были положительны, необходимо, чтобы: 1) ихъ произведеніе было положительно; 2) ихъ сумма была положительна. Итакъ, требуемыя условія будутъ:

1) $\frac{a\lambda^2+b\lambda+c}{a}>0$, или, умноживъ обѣ части на a^2;

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0;$$

2) $-\frac{b+2a\lambda}{a}>0$, или, умноживъ обѣ части на $-a^2$:

$$a(b+2a\lambda)<0.$$

Примѣчаніе. Чтобы выразить, что корни даннаго ур-нія оба меньше λ, необходимо выразить, что корни ур-нія (2) оба отрицательны; сдѣлавъ это, получимъ условія:

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0; \qquad a(b+2a\lambda)>0.$$

Вопросъ II. *Выразить, что данное количество* λ *заключается между корнями ур-нія* $ax^2+bx+c=0$.

Пусть корни даннаго уравненія будутъ x' и x'', причемъ $x' < x''$.

По условію должно быть:

$$x' < \lambda \quad \text{и} \quad x'' > \lambda, \quad \text{или} \quad x' - \lambda < 0 \quad \text{и} \quad x'' - \lambda > 0 \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Ур-ніе, имѣющее корни $x' - \lambda$ и $x'' - \lambda$, есть

$$ax^2 + (b + 2a\lambda)x + (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Въ силу неравенствъ (1) корни этого ур-нія должны имѣть противоположные знаки, слѣд., необходимо и достаточно, чтобы ихъ произведеніе было отрицательно, т. е. чтобы

$$\frac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{a} < 0, \quad \text{или} \quad a(a\lambda^2 + b\lambda + c) < 0.$$

489. *Приложеніе IV.* **Найти соотношеніе между коэффиціентами квадратнаго уравненія подъ условіемъ, чтобы между корнями уравненія существовала данная зависимость.**

Задача I. *Какая связь должна существовать между коэффиціентами уравненія* $ax^2 + bx + c = 0$, *чтобы его корни* x' *и* x'' *удовлетворяли условію* $px' - qx'' = r$?

Рѣшивъ данное уравненіе и подставивъ найденные корни въ равенство $px' - qx'' = r$, найдемъ требуемое условіе. Но обыкновенно требуется дать искомое условіе, не рѣшая ур-нія; этого достигнемъ слѣдующимъ пріемомъ.

Говоря, что x' и x'' суть корни даннаго ур-нія, мы выражаемъ этимъ, что они удовлетворяютъ ур-мъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x'x'' = \frac{c}{a},$$

и наоборотъ. Слѣд., задачу можно формулировать такъ:

Какова должна быть связь между коэффиціентами даннаго ур-нія, чтобы x' *и* x'' *удовлетворяли тремъ ур-мъ.*

$$px' - qx'' = r, \qquad x' + x'' = -\frac{b}{a}, \qquad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Очевидно, рѣшивъ два изъ этихъ ур-ній (и проще первыя два, какъ ур-нія 1-й степени), мы найдемъ требуемое условіе, подставивъ найденныя рѣшенія въ 3-е. Первыя два даютъ:

$$x' = \frac{ar - bq}{a(p + q)}, \qquad x'' = -\frac{bp + ar}{a(p + q)};$$

подставляя въ третье, найдемъ:

$$-\frac{(ar - bq)(ar + bp)}{a^2(p + q)^2} = \frac{c}{a}, \quad \text{или} \quad (ar - bq)(ar + bp) + ac(p + q)^2 = 0.$$

Это и есть требуемое соотношеніе.

Задача II. *Опредѣлить* λ *такъ, чтобы корни* x' *и* x'' *уравненія*

$$(2\lambda - 1)x^2 + (5\lambda + 1)x + (3\lambda + 1) = 0$$

имѣли отношеніе $\frac{3}{2}$.

Согласно условію, корни должны удовлетворять уравненіямъ

$$2x' = 3x'', \qquad x' + x'' = -\frac{5\lambda+1}{2\lambda-1}, \qquad x'x'' = \frac{3\lambda+1}{2\lambda-1}.$$

Рѣшая первыя два, находимъ

$$x' = -\frac{3(5\lambda+1)}{5(2\lambda-1)}, \qquad x'' = -\frac{2(5\lambda+1)}{5(2\lambda-1)};$$

внося въ третье уравненіе, имѣемъ

$$\frac{6(5\lambda+1)^2}{25(2\lambda-1)^2} = \frac{3\lambda+1}{2\lambda-1}, \quad \text{или} \quad 6(5\lambda+1)^2 - 25(3\lambda+1)(2\lambda-1) = 0:$$

это и есть соотношеніе, которому должно удовлетворять λ; располагая по степенямъ λ, имѣемъ

$$0 \times \lambda^2 + 85\lambda + 31 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \infty, \quad \lambda_2 = -\frac{31}{85}.$$

Провѣримъ, дѣйствительно-ли эти значенія λ суть требуемыя.

Во-первыхъ посмотримъ, каковы корни даннаго ур-нія при $\lambda = \infty$; для этого выносимъ λ за скобки:

$$\lambda\left[\left(2-\frac{1}{\lambda}\right)x^2 + \left(5+\frac{1}{\lambda}\right)x + \left(3+\frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0;$$

отсюда видно, что когда λ приближается къ безконечности, корни даннаго ур-нія стремятся къ предѣламъ, удовлетворяющимъ ур-нію $2x^2 + 5x + 3 = 0$, откуда $x' = -\frac{3}{2}$ и $x'' = -1$; отношеніе $x' : x''$ дѣйствительно $= 3 : 2$.

Во вторыхъ, при $\lambda = -\frac{31}{85}$ данное ур-ніе беретъ видъ $147x^2 + 70x + 8 = 0$, откуда $x' = -\frac{2}{7}$, $x'' = -\frac{4}{21}$; дѣйствительно $x' : x'' = 3 : 2$.

490. *Приложеніе V.* **Какому условію должны удовлетворять коэффиціенты двухъ квадратныхъ уравненій**

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \ldots (1) \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0, \quad \ldots (2)$$

чтобы эти ур-нія имѣли одинъ общій корень?

Первое рѣшеніе. Пусть корни ур-нія (1) суть α и β; ур-нія (2) α и β', гдѣ α—общій корень; мы имѣемъ 4 уравненія

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \quad \ldots (3) \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \quad \ldots (4) \\ \alpha + \beta' = -\dfrac{b'}{a'} \quad \ldots (5) \\ \alpha\beta' = \dfrac{c'}{a'} \quad \ldots (6) \end{cases}$$

Докажемъ, что для того чтобы данныя ур-нія имѣли одинъ общій корень, необходимо и достаточно, чтобы ур-нія (7) съ тремя неизвѣстными α, β и β' имѣли по крайней мѣрѣ одно общее рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Если ур-нія (1) и (2) имѣютъ общій корень α, то ур-нія системы (7) будутъ удовлетворены этимъ корнемъ α и двумя не общими корнями β и β'.

2) Если ур-нія (7) имѣютъ общее рѣшеніе (α, β и β'), то: корни α и β, удовлетворяя ур-мъ (3) и (4), служатъ корнями (1), а α и β', удовлетворяя (5) и (6), будутъ корнями ур-нія (2); т. е. α и будетъ общимъ корнемъ данныхъ ур-ній.

Итакъ, искомое условіе есть условіе, при которомъ система (7) имѣетъ общее рѣшеніе; это условіе найдемъ, исключивъ α, β и β' изъ ур-ній системы (7). Комбинируя (3) и (5), имѣемъ

$$\beta - \beta' = \frac{ab' - ba'}{aa'}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

комбинируя (4) съ (6), получимъ

$$\alpha(\beta - \beta') = \frac{ca' - ac'}{aa'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Отсюда:
$$\alpha = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Слѣд. изъ (4) имѣемъ $\beta = \frac{c(ab' - ba')}{a(ca' - ac')}$.

Подставляя эти величины въ (3), и найдемъ искомое условіе:

$$\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{c(ab' - ba')}{a(ca' - ac')} + \frac{b}{a} = 0,$$

что не трудно привести къ виду

$$(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0.$$

Второе рѣшеніе. Полагая a и a' отличными отъ нуля, и умноживъ ур. (1) на a', а (2) на a, замѣнимъ ихъ двумя слѣдующими, имъ тождественными:

$aa'x^2 + ba'x + ca' = 0, \ . \ . \ . \ . \ (10)$, $\qquad aa'x^2 + ab'x + ac' = 0, \ . \ . \ . \ . \ (11)$

изъ которыхъ тотчасъ выводимъ слѣдующія замѣчанія:

1) Если $ab' - ba' = 0$, то ур-нія не могутъ имѣть никакого общаго рѣшенія, если въ то же время не будетъ и $ac' - ca' = 0$; но въ такомъ случаѣ оба ур-нія дѣлаются тождественными, иначе говоря, имѣютъ *два* общихъ корня.

2) Если $ac' - ca' = 0$, то ур-нія не могутъ имѣть ни одного общаго корня, если приэтомъ не будетъ и $ab' - ba' = 0$; но тогда опять оба ур-нія будутъ тождественны.

3) Изъ сопоставленія этихъ замѣчаній выводимъ то заключеніе, что если два квадратныя ур-нія имѣютъ *одинъ только* общій корень, то разности $ab' - ba'$ и $ac' - ca'$ отличны отъ нуля; слѣд. по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ c и c' не есть ноль.

Зная это, вычтемъ изъ (10) ур-ніе (11); найдемъ

$$(ab' - ba')x + ac' - ca' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

По извѣстному принципу, система (1) и (2) тождественна системѣ (1) и (12); слѣд., общій корень, м. б. найденъ изъ послѣдней системы; а какъ ур. (12) есть ур-ніе 1-й степени и слѣд., имѣетъ только одинъ корень, значитъ, если данныя ур-нія имѣютъ общій корень, онъ долженъ быть

$$x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Будучи общимъ корнемъ системы (1) и (12), онъ долженъ удовлетворять ур-нію (1); такъ что искомое условіе найдемъ, подставивъ найденное для x значеніе въ ур-ніе (1). Итакъ

$$\frac{a(ac'-a'c)^2}{(ab'-a'b)^2}-\frac{b(ac'-a'c)}{ab'-a'b}+c=0,$$

что легко привести къ виду

$$(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0, \quad \ldots\ldots (13).$$

соотношеніе это просто, симметрочно и легко удерживается въ памяти.

Его можно представить въ другой формѣ. Раскрывъ скобки и умноживъ всѣ члены на 4, найдемъ:

$$4a^2c'^2+4c^2a'^2-8aca'c'-4ab'bc'-4ba'cb'+4b^2a'c+4b'^2ac=0,$$

или, придавъ и вычтя $b^2b'^2$, можемъ дать ему видъ:

$$b^2b'^2+4a^2c'^2+4c^2a'^2-4bb'ac'-4bb'ca'+8ac'ca'-b^2b'^2+4acb'^2$$
$$+4a'c'b^2-16aca'c'=0,$$

или $$(bb'-2ac'-2ca')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')=0 \quad \ldots . (14).$$

Примѣчаніе I. Общій корень раціоналенъ; слѣд. онъ не м. б. мнимымъ. Слѣд., когда два квадратныя ур-нія имѣютъ одинъ общій корень, всѣ ихъ корни дѣйствительны и потому

$$b^2-4ac>0 \quad \text{и} \quad b'^2-4a'c'>0.$$

Это же можно видѣть и непосредственно. Если квадратное ур-ніе имѣетъ корень $\alpha+\beta i$, то другой его корень будетъ $\alpha-\beta i$; а слѣд. если два ур-нія имѣютъ одинъ общій мнимый корень, то они имѣютъ два общихъ корня и слѣд. тождественны.

Примѣчаніе II. Мы замѣтили, что два квадратныхъ ур-нія не могутъ имѣть общаго корня, если $ac'-ca'=0$, и приэтомъ $ab'-ba'$ отлично отъ нуля. Слѣдуетъ прибавить: *исключая случая, когда* $c=c'=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $ac'-ca'=0$ и ур-нія будутъ

$$ax^2+bx=0, \qquad a'x^2+b'x=0;$$

очевидно, что они имѣютъ общій корень $x=0$, и что два другіе корня, опредѣляемые ур-ми

$$ax+b=0, \qquad a'x+b'=0$$

различны, ибо по положенію, $ab'-ba'$ не равно нулю.

Замѣтимъ, что соотношеніе (13) удовлетворяется и при $c=c'=0$; слѣд., оно *общее* и примѣнимо и къ исключительному случаю, о которомъ идетъ рѣчь.

491. *Приложеніе VI.* **Условіе, при которомъ два квадратныхъ ур-нія имѣютъ два общихъ корня.**

I. Называя общіе корни уравненій $ax^2+bx+c=0$ и $a'x^2+b'x+c'=0$ буквами α и β, будемъ имѣть

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha+\beta=-\frac{b'}{a'}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c'}{a'};$$

откуда необходимо, чтобы

$$-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'},$$ что можно представить въ видѣ

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c} \; \ldots\ldots \; (1)$$

Эти условія, будучи необходимы, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны, ибо, какъ скоро они выполнены, то называя общую величину равныхъ отношеній (1) буквою К, имѣемъ: $a'=a\mathrm{K}$, $b'=b\mathrm{K}$, $c'=c\mathrm{K}$ и потому второе уравненіе беретъ видъ $\mathrm{K}(ax^2+bx+c)=0$ или $ax^2+bx+c=0$, т. е. ничѣмъ не отличается отъ перваго, а слѣд. имѣетъ тѣже корни какъ и первое. Итакъ:

Чтобы два квадратныхъ уравненія имѣли два общихъ корня, необходимо и достаточно, чтобы ихъ коэффиціенты были пропорціональны.

II. Можно это условіе вывести иначе. Выше мы видѣли (§ 490), что полагая a и a' отличными отъ нуля, можно одно изъ данныхъ уравненій замѣнить ур-мъ

$$(ab'-ba')x+(ac'-ca')=0.$$

Слѣд., если данныя ур-нія имѣютъ два общихъ корня, то полиномъ $(ab'-ba')x+(ac'-ca')$, будучи *первой степени*, долженъ обращаться въ ноль при *двухъ* различныхъ значеніяхъ x, а потому (§ 71) онъ долженъ быть тождественно равенъ нулю, а для этого (§ 72) необходимо и достаточно, чтобы его коэффиціенты равнялись нулю, т. е. чтобы

$$ab'-ba'=0 \quad \text{и} \quad ac'-ca'=0, \quad \text{откуда} \quad \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

492. *Приложеніе VII.* — **Найти два числа, зная ихъ сумму S и произведеніе P.**

Очевидно, искомыя числа суть корни уравненія

$$x^2-\mathrm{S}x+\mathrm{P}=0 \; \ldots\ldots \; (1)$$

въ самомъ дѣлѣ, сумма корней этого ур-нія равна S, а произведеніе P.

Примѣръ.—Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы 13, а произведеніе 40.

Искомыя числа суть корни ур-нія $x^2-13x+40=0$; рѣшая его, находимъ: $x'=8$, $x''=5$. И въ самомъ дѣлѣ: $8+5=13$, $8\times5=40$.

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы ур. (1) имѣло корни дѣйствительные, т. е чтобы разность $\mathrm{S}^2-4\mathrm{P}$ была положительна или нуль:

$$\mathrm{S}^2-4\mathrm{P} \geqq 0;$$

отсюда

$$\mathrm{P} \leqq \left(\frac{\mathrm{S}}{2}\right)^2,$$

т. е. *наибольшая величина* (maximum) *произведенія двухъ чиселъ, положительныхъ или отрицательныхъ, имѣющихъ постоянную сумму, равна квадрату ихъ полусуммы.*

Если бы требовалось *найти два числа, зная ихъ разность* δ *и произве-*

деніе P, то задачу эту можно бы было свести къ предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, если искомыя числа будутъ x' и y', то по условію задачи имѣемъ

$$x' - y' = \delta \quad \text{и} \quad x'y' = P:$$

но положивъ $-y' = x''$, дадимъ этимъ ур-мъ видъ

$$x' + x'' = \delta, \qquad x'x'' = -P,$$

слѣд. x' и x'' суть корни уравненія

$$x^2 - \delta x - P = 0.$$

Если δ *положительно*, слѣд. $x' - y' > 0$, то для x' нужно взять большій корень ур-нія, а другой корень, взятый съ обратнымъ знакомъ, дастъ y'. Если δ *отрицательно*, нужно сдѣлать наоборотъ.

Условіе возможности задачи выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\delta^2}{4} + P \geqq 0,$$

откуда видно, что при P положительномъ задача всегда возможна, ибо $\frac{\delta^2}{4} + P$ будетъ представлять сумму двухъ существенно положительныхъ количествъ.

493. *Приложеніе VIII.* — **Найти сумму одинаковыхъ степеней корней квадратнаго уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.**

Пусть корни будутъ x_1 и x_2; требуется вычислить $x_1^m + x_2^m$, не рѣшая ур-нія. Сумму эту для краткости будемъ обозначать знакомъ S_m.

I. Во-первыхъ, мы имѣемъ

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

II. Чтобы найти S_2, возьмемъ тождества

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \;.\;.\;.\;.\; (1), \qquad ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

сложивъ ихъ, найдемъ

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0, \quad \text{откуда} \quad S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Этотъ результатъ можно найти иначе, замѣчая, что

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.$$

III. Чтобы найти S_3, помножимъ ур. (1) на x_1, ур. (2) на x_2 и сложимъ ихъ почленно, что дастъ:

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad S_3 = -\frac{bS_2 + cS_1}{a},$$

или, замѣняя S_2 и S_1 ихъ величинами:

$$S_3 = -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}.$$

Этотъ результатъ можно найти иначе, замѣчая, что

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}.$$

IV. Помножая тождества (1) и (2) соотвѣтственно на x_1^2 и x_2^2 и складывая, найдемъ

$$aS_4+bS_3+cS_2=0, \quad \text{откуда} \quad S_4=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}.$$

Иначе найдемъ этотъ результатъ, замѣчая, что

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}.$$

Вообще, легко найти S_m, зная суммы S_{m-1} и S_{m-2}; ибо, помноживъ тождества: (1) на x_1^{m-2}, (2) на x_2^{m-2}, и сложивъ, имѣемъ соотношеніе

$$aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0,$$

въ которомъ и содержится общее рѣшеніе задачи: при ея помощи можно попорядку вычислять S_2, S_3, S_4, ...

Такъ, полагая $m=2$, имѣемъ уравненіе $aS_2+bS_1+cS_0=0$, въ которомъ $S_1=-\frac{b}{a}$, $S_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2$; слѣд.

$$S_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}.$$

Положивъ $m=3$, имѣемъ $aS_3+bS_2+cS_1=0$, откуда

$$S_3=-\frac{b}{a}\cdot S_2-\frac{c}{a}S_1=-\frac{b}{a}\times\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)-\frac{c}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}, \text{ и т. д.}$$

494. Пусть требуется *найти сумму одинаковыхъ степеней обратныхъ величинъ корней квадратнаго уравненія.*

Называя эту сумму черезъ S_{-m}, имѣемъ

$$S_{-m}=\left(\frac{1}{x_1}\right)^m+\left(\frac{1}{x_2}\right)^m=\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m}=\frac{x_1^m+x_2^m}{x_1^m x_2^m}=\frac{S_m}{\left(\frac{c}{a}\right)^m}, \text{ или}$$

$$S_{-m}=\frac{a^m}{c^m}\cdot S_m.$$

Такъ напр., отсюда найдемъ:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{c}; \quad \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}; \quad \frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=-\frac{b(b^2-3ac)}{c^3};$$

$$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}; \text{ и т. д.}$$

495. Построеніе корней квадратнаго уравненія.

Рѣшая геометрическій вопросъ съ помощію алгебры, всегда получаемъ уравненія однородныя; такія ур-нія мы и будемъ разсматривать.

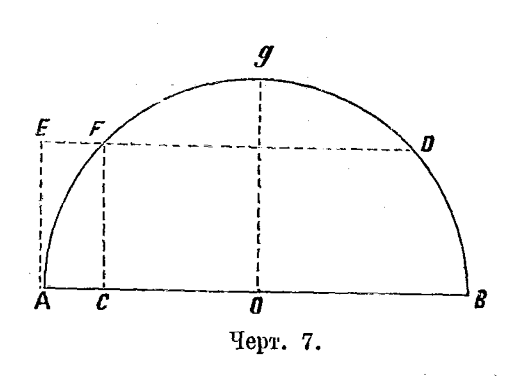
1. Уравненіе вида $x^2=m.n$ даетъ пропорцію $m:x=x:n$; сл. построеніе линіи x приводится къ нахожденію средней пропорціональной между линіями m и n.

2. Полное уравненіе. Обозначая буквами p и k отношенія двухъ линій къ линейной единицѣ, имѣемъ четыре вида ур-ній:

$$x^2+px+k^2=0; \quad x^2-px+k^2=0; \quad x^2+px-k^2=0; \quad x^2-px-k^2=0.$$

Такъ какъ первое выводится изъ втораго, а третье изъ четвертаго перемѣною x на $-x$, то достаточно построить корни 2-го и 4-го.

Представивъ 2-е съ видѣ $x(p-x)=k^2$, замѣчаемъ, что вопросъ приводится къ построенію сторонъ x и $p-x$ прямоугольника, равновеликаго квадрату стороны k, зная сумму измѣреній прямоугольника.



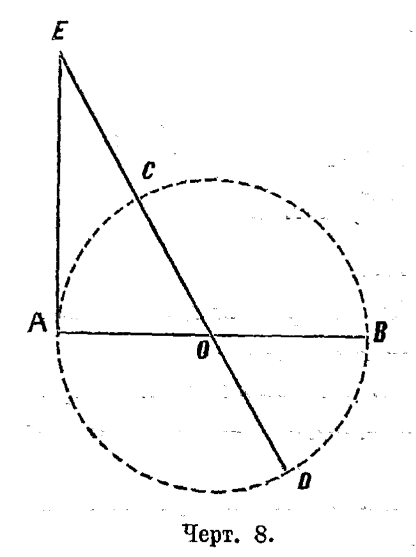
Черт. 7.

Для этого на прямой $AB=p$ описываемъ полуокружность; въ точкѣ A возставляемъ къ линіи AB перпендикуляръ $AE=k$ и черезъ точку E проводимъ прямую ED параллельно AB, пересѣкающую окружность въ D и F. Легко видѣть, что прямая $EF=AC$ изображаетъ одинъ корень ур-нія, а линія $DE=BC$ — другой. Въ самомъ дѣлѣ

$$AC+BC=AB=p,$$

$$AC\times BC=CF^2=AE^2=k^2.$$

Для возможности задачи необходимо, чтобы прямая ED встрѣчала окружность; слѣд. задача невозможна, когда $AE>OG=\frac{AB}{2}$, или когда $k>\frac{p}{2}$, потому-что при этомъ условіи ED не встрѣчаетъ окружности. Когда $AE=OG=\frac{AB}{2}$, или $k=\frac{p}{2}$, прямая ED касается окружности въ точкѣ G, и корни получаются равные $AO=OB=\frac{p}{2}$. Наконецъ, когда $AE<OG=\frac{AB}{2}$, или $k<\frac{p}{2}$, прямая ED пересѣкаетъ окружность, и корни получаются неравные: AC и CB. Все это вполнѣ согласно съ тѣмъ, что при условіи $k^2>\frac{p^2}{4}$ корни уравненія мнимы, при $k^2=\frac{p^2}{4}$ дѣйствительные равные, а при $k^2<\frac{p^2}{4}$ дѣйствительные неравные.



Черт. 8.

Четвертое ур-ніе приводится къ виду $x(x-p)=k^2$ и соотвѣтствуетъ вопросу: построить измѣренія прямоугольника равновеликаго данному квадрату, по разности p этихъ измѣреній. На прямой $AB=p$, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность; въ точкѣ A проводимъ къ ней касательную $AE=k$ и изъ точки E проводимъ сѣкущую ECD черезъ центръ. Имѣемъ

$$ED=x',\ EC=-x'',$$

ибо $$DE-CE=DC=AB=p,$$

$$EC\times ED=AE^2=k^2.$$

Очевидно, построеніе всегда возможно; и это обстоятельство вполнѣ согла-

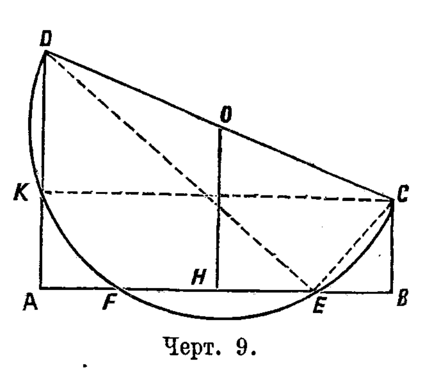
сно съ тѣмъ, что ур-ніе 4-е; имѣя свободный членъ отрицательный, имѣетъ всегда дѣйствительные корни.

Другой пріемъ. — Если ур-нія 2-е и 4-е имѣютъ видъ

$$x^2-px+m.\ n=0\ .\ .\ .\ .\ (2)\qquad x^2-px-m.\ n=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

то для примѣненія указаннаго пріема, слѣдовало бы предварительно найти среднюю пропорціональную k между m и n; нижеслѣдующее построеніе позволяетъ избѣжать этого предварительнаго построенія, давая, къ тому-же, способъ, примѣнимый во всѣхъ случаяхъ.

Для построенія корней ур-нія (2) беремъ $AB=p$; въ точкѣ A возставляемъ къ ней перпендикуляръ $AD=m$, въ точкѣ B перпендикуляръ $BC=n$, проводя ихъ въ одну сторону отъ прямой AB.



Черт. 9.

Проведя прямую CD, описываемъ на ней, какъ на діаметрѣ, окружность, которая, вообще, пересѣчетъ AB въ двухъ точкахъ E, F; искомыя линіи будутъ AE и EB, или AF и FB. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ DAE и ECB имѣемъ: $AE: CB=AD: EB$, откуда $AE\times EB=m.\ n$; кромѣ того, по построенію, $AE+EB=AB=p$.

Перпендикуляръ, опущенный изъ средины 0 линіи DC на AB, пересѣкаетъ хорду FE въ ея рединѣ H; отсюда выходитъ, что $AF=EB$, и слѣд. $AE=FB$.

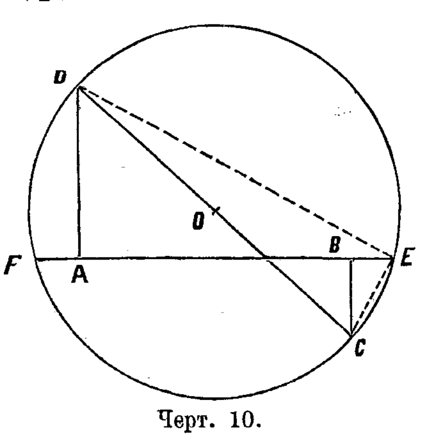
Для возможности задачи нужно, чтобы окружность CD встрѣчала AB, а это требуетъ, чтобы OH было не больше $\frac{CD}{2}$.

Но $OH=\frac{m+n}{2}$; $CD^2=CK^2+DK^2=AB^2+(m-n)^2$; отсюда легко видѣть, что условіе возможности будетъ $mn\leqslant\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Примѣчаніе. Если $m=n$, CD будетъ параллельна AB, AD — касательна къ окружности въ D, и перевернувъ чертежъ, найдемъ обыкновенное построеніе.

Для построенія корней (4), къ AB, равной данной разности p, возставляемъ въ точкахъ A и B перпендикуляры $AD=m$ и $BC=n$, по разныя стороны отъ AB; на прямой CD, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность, пересѣкающую прямую AB въ точкахъ E и F. Корни будутъ

$$x'=AE,\ x''=-BE.$$



Черт. 10.

Въ самомъ дѣлѣ, разность абсолютныхъ величинъ этихъ линій (или ихъ алгебраическая сумма) есть $AE-BE=AB=p$, а произведеніе ихъ $=m.\ n$, ибо по-

добные треугольники ADE и BCE даютъ: AD: AE = BE: BC, или AE × BE = AD × BC = $m.\ n$.

Задача всегда возможна, ибо всегда имѣетъ мѣсто пересѣченіе прямой AB съ окружностью DC, такъ какъ послѣдняя, по самому построенію, имѣетъ точки C и D по обѣ стороны прямой AB.

Такимъ образомъ, измѣняя направленіе перпендикуляра, соотвѣтствующаго тому изъ множителей m и n, который отрицателенъ, мы тѣмъ же самымъ построеніемъ находимъ оба корня ур-нія, причемъ отрицательный корень приходится на продолженіи AB: противоположности въ знакѣ соотвѣтствуетъ противоположность направленія.

Примѣчаніе. — Если m и n равны, средина прямой AB будетъ въ центрѣ окружности; если на AB, какъ на діаметрѣ, описать окружность концентричную первой, BC будетъ касательною къ ней, и какъ OC = OE, найдемъ обыкновенное построеніе.

496. Задачи.

1. Изслѣдовать, a priori, корни уравненій:

$$x^2-12x+35=0;\quad x^2-10x+26=0;\quad 40x^2-51x+14=0;$$
$$11x^2+37x-28=0;\quad 81x^2-144x+64=0;\quad 25x^2-20x+7=0;$$
$$5x^2-17x+3=0;\quad 6x^2+15x-21=0;\quad 4x^2-11x-6=0;$$
$$7x^2-5x+11=0;\quad 9x^2-6x+1=0;\quad 4x^2+24x+36=0.$$

2. Составить для каждаго изъ этихъ уравненій: 1) ур-ніе съ противоположными знаками корней; 2) ур-ніе, корни котораго были бы обратны корнямъ даннаго; 3) ур-ніе съ корнями, уменьшенными на λ; 4) ур-ніе съ корнями, умноженными на λ.

3. Составить квадратное ур-ніе, корнями котораго были бы: 1) 10 и —5, 2; 2) $-\frac{7}{8}$ и $-\frac{2}{5}$ 3) $\frac{7}{11}$ и -4; 4) $\frac{8}{9}$; 5) $\frac{3a+b}{2}$ и $\frac{3a-b}{2}$; 6) $\frac{a-b}{2a+b}$, $\frac{a+b}{2a-b}$.

4) Составить квадратное ур-ніе съ соизмѣримыми коэффиціентами, имѣющее корнемъ:

$$\sqrt{7}-4,\ \text{или}\ \frac{3}{4}+\sqrt{2},\ \text{или}\ \frac{5}{3-\sqrt{2}},\ \text{или}\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

5. Составить квадратное ур-ніе съ дѣйствительными коэффиціентами, имѣющее корнемъ:

$$3\sqrt{-5},\ \text{или}\ 3\sqrt{2}\,.\,i-4,\ \text{или}\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \text{или}\ \frac{1}{2+\sqrt{5}\,.\,i}\ \text{или}$$
$$(3+\sqrt{2\,.\,i})\,(4+3\sqrt{2\,.\,i}),\ \text{или}\ \frac{5+\sqrt{-3}}{5-\sqrt{-3}}.$$

6. Опредѣлить λ такъ, чтобы корни x_1 и x_2 уравненія

$$2x^2+(2\lambda-1)\,x+(\lambda-2)=0$$

удовлетворяли соотношенію $3x_1-4x_2=11$.

7. Опредѣлить λ такъ, чтобы одинъ корень уравненія

$$(\lambda^2-5\lambda+3)\,x^2+(3\lambda-1)\,x+2=0$$

былъ вдвое больше другаго.

8. Опредѣлить λ такъ, чтобы корни уравненія $9x^2-(2-\lambda)x-6+\lambda=0$ были: 1) равны по величинѣ и съ одинаковымъ знакомъ; 2) равны по величинѣ, но противоположны по знаку.

9. Если x_1 и x_2 суть корни уравненія $x^2+px+q=0$, опредѣлить, при какомъ соотношеніи между p и q будетъ:

$$1)\ \frac{x'}{x''}=m;\quad 2)\ x_1^2+x_2^2=m^2;\quad 3)\ x_1^2-x_2^2=m^2;\quad 4)\ x_1^3+x_2^3=m;$$

$$5)\ x_1^3-x_2^3=m.$$

10. Въ уравненіи $x^2-5x+q=0$ опредѣлить q такъ, чтобы:
1) одинъ изъ корней былъ $3^1/_2$; 2) $5x'-3x''=3$; 3) $x''=4x'$; 4) $x_1^2+x_2^2=17$; 5) $x_2^2-x_1^2=15$.

11. Въ уравненіи $x^2-4ax+a^2=0$ опредѣлить a такъ, чтобы:

1) $x_1-x_2=2\sqrt{3}$; 2) $x_1^2+x_2^2=56$; 3) $x_1^3+x_2^3=192$; 4) $5x'+7x_2=72-\sqrt{108}$.

12. Въ уравненіи $x^2+4(p-2)x+3p^2+5=0$ опредѣлить p такъ, чтобы одинъ изъ корней былъ вдвое больше другаго.

13. Дано ур-ніе $x^2+px+q=0$, имѣющее корни x_1 и x_2. Составимъ ур-ніе, корнями котораго были бы: 1) $x^1+\frac{1}{x'}$ и $x_2+\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{1}{x_1^2}$ и $\frac{1}{x_2^2}$; условіе дѣйствительности корней этого ур-нія; 3) x_1+2x_2 и x_2+2x_1.

14. Составить квадратное ур., котораго корни x' и x'' удовлетворяли бы условіямъ:

$$x'.x''+x'+x''-a=0,\qquad x'.x''-a(x'+x'')+1=0;$$

каково должно быть a, чтобы корни этого уравненія были дѣйствительны? чтобы они были положительны?

15. Найти соотношенія, связывающія корни ур-ній

$$x^2-2x\sqrt{p^2-2q}+p^2-2q=0 \text{ и } x^2+px+q-0.$$

Предполагая, что построенъ прямоугольникъ изъ корней 2-го, указать линіи, выражающія корни 1-го.

16. Предполагая, что ур-нія $x^2+px+q=0$ и $x^2+p'x+q'=0$ имѣютъ одинъ общій корень, требуется составить уравненіе, корнями котораго были бы не общіе корни данныхъ ур-ній.

17. Даны уравненія: $x^2+ax+1=0$, $x^2+x+a=0$. Опредѣлить a такъ, чтобы оба ур-нія имѣли одинъ общій корень.

18. Какова должна быть связь между коэффиціентами ур-нія $ax^2+bx+c=0$, чтобы одинъ изъ корней былъ квадратомъ другаго?

19. Какую величину нужно дать коэффиціенту b ур-нія $ax^2+bx+ad^4=0$, чтобы одинъ изъ корней былъ кубомъ другаго?

20. Опредѣлить λ и μ такъ, чтобы ур-нія

$$(2\lambda+1)x^2-(3\lambda-1)x+2=0 \text{ и } (\mu+2)x^2-(2\mu+1)x-1=0$$

имѣли два общихъ корня.

21. Опредѣлить λ такъ, чтобы ур-нія

$$3x^2-(\lambda-\ )x+\lambda+1=0 \text{ и } 2x^2+(2\lambda-1)x+2\lambda+2=0$$

имѣли одинъ общій корень; каковъ этотъ корень?

22. Доказать, что условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы ур-нія

$$ax^2+bx+c=0 \text{ и } (ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')=0$$

имѣли одинъ общій корень, состоитъ въ томъ, чтобы то или другое изъ нихъ имѣло равные корни.

23. По примѣру § 484 рѣшить ур-нія

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}=\frac{c}{c-a}+\frac{c}{c-b};$$

$$\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}=1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}.$$

ГЛАВА XXXII.

Квадратный триномъ: разложеніе его на множители первой степени; теорема объ измѣненіи знака. — Приложенія. — Задачи.

497. Квадратный триномъ.—Если въ полиномѣ ax^2+bx+c подъ a, b и c разумѣть *постоянныя* количества, а подъ x *перемѣнное*, измѣняющееся въ области дѣйствительныхъ чиселъ (отъ $-\infty$ до 0, и отъ 0 до $+\infty$), то полиномъ этотъ, называемый *квадратнымъ триномомъ*, будетъ измѣняться по величинѣ и знаку. Такъ, при $x=0$, онъ $=c$; при $x=1$, равенъ $a+b+c$; при $x=-10$, равенъ $100a-10b+c$; и т. д. Между этими величинами одни могутъ быть положительны, другія отрицательны. Тѣ значенія x, при которыхъ триномъ обращается въ 0, называются *корнями тринома*; ихъ мы найдемъ, приравнявъ триномъ нулю, и рѣшивъ квадратное ур-ніе $ax^2+bx+c=0$.

Квадратный триномъ обладаетъ замѣчательными свойствами, изъ числа которыхъ въ этой главѣ мы изучимъ: 1) разложеніе тринома на множители; 2) измѣненіе его знака, и затѣмъ займемся приложеніями этихъ свойствъ.

Разложеніе квадратнаго тринома на множители первой степени.

498. Теорема.—*Квадратный триномъ равенъ произведенію коэффиціента при x^2 на два двучленныхъ множителя, равныхъ разностямъ между x и каждымъ изъ корней тринома.*

Первое доказательство. Обозначивъ триномъ буквою y и вынеся за скобки a, найдемъ

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right);$$

дополнимъ квадратъ бинома, первые два члена котораго суть: $x^2+\frac{b}{a}x$; прини-

мая x за первый членъ бинома, второй найдемъ, раздѣливъ $\frac{b}{a}x$ на $2x$, что даетъ $\frac{b}{2a}$; прибавляя въ скобки и вычитая $\frac{b^2}{4a^2}$, получимъ

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Различаемъ три случая: $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

I. $b^2 - 4ac > 0$. Въ этомъ случаѣ дробь $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положительна, а потому $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ величина *дѣйствительная*; триномъ беретъ видъ

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Примѣняя сюда формулу разложенія $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$, найдемъ:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

причемъ *всѣ три множителя дѣйствительные.*

Этому разложенію можно дать видъ:

$$y = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

и замѣчая, что $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ суть корни ур-нія $ax^2 + bx + c = 0$, или, что тоже, корни тринома, можемъ, назвавъ эти корни черезъ x' и x'', дать триному видъ

$$y = a(x - x')(x - x'') \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1')$$

гдѣ всѣ множители дѣйствительны.

II. $b^2 - 4ac = 0$. Триномъ (форм. 1) приводится къ виду

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Замѣтивъ, что $x + \frac{b}{2a} = x - \left(-\frac{b}{2a}\right)$, и что $-\frac{b}{2a}$ есть общая величина равныхъ корней при условіи $b^2 - 4ac = 0$, мы назвавъ эту величину буквою x', можемъ дать триному видъ

$$y = a(x - x')^2.$$

Таково разложеніе тринома въ случаѣ дѣйствительныхъ равныхъ корней.

III. $b^2 - 4ac < 0$. При этомъ условіи триномъ имѣетъ корни мнимые; ему можно дать такой же видъ, какъ и при дѣйствительныхъ неравныхъ корняхъ, т. е. (1) или (1′), но оба двучленные множители будутъ мнимые.

Впрочемъ, для дальнѣйшихъ изслѣдованій удобнѣе дать триному въ этомъ случаѣ иной видъ. Замѣтивъ, что изъ неравенства $b^2 - 4ac < 0$ слѣдуетъ

$4ac - b^2 > 0$, такъ-что дробь $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ будетъ положительная, представимъ y въ видѣ

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

и замѣтимъ, что въ квадратныхъ скобкахъ находится *сумма двухъ существенно—положительныхъ количествъ.*

499. Второе доказательство.—Представивъ триномъ въ видѣ

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

замѣчаемъ, что $\frac{b}{a} = -(x' + x'')$ и $\frac{c}{a} = x'.x''$, гдѣ x' и x'' суть корни тринома. Подстановка дастъ

$$y = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = a[x^2 - x'x - x''x + x'x''].$$

Вынося въ первыхъ двухъ членахъ за скобки x, а въ двухъ остальныхъ $-x''$, послѣдовательно имѣемъ

$$y = a[(x - x')x - x''(x - x')] = a(x - x')(x - x'').$$

Такъ какъ соотношенія между коэффиціентами и корнями, на которыхъ основано это доказательство, существуютъ и для дѣйствительныхъ и для мнимыхъ корней, то и полученное разложеніе имѣетъ мѣсто для тѣхъ и другихъ.

Когда дѣйствительные корни равны между собою, то, положивъ въ предыдущей формулѣ $x' = x''$, найдемъ

$$y = a(x - x')^2 = [\sqrt{a}\,(x - x')]^2:$$

триномъ представляетъ точный квадратъ выраженія $\sqrt{a}\,(x - x')$.

500. Третье доказательство. — Если x' и x'' будутъ корни тринома $ax^2 + bx + c$, то, предполагая, что они различны, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ ноль при подстановкѣ въ него двухъ *различныхъ* значеній x' и x'' вмѣсто x; а потому онъ дѣлится на произведеніе биномовъ $x - x'$ и $x - x''$; слѣд.

$$ax^2 + bx + c = (x - x')(x - x'')\,.\,Q.$$

Q есть цѣлое относительно x частное нулевой степени, ибо дѣлитель одинаковой степени съ дѣлимымъ; слѣд. Q найдемъ, раздѣливъ высшій членъ ax^2 дѣлимаго на высшій членъ x^2 дѣлителя; слѣд. $Q = a$, и потому

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Примѣчаніе. — Доказательство предполагаетъ, что x' и x'' неравны; но если теорема вѣрна для x' и x'' неравныхъ, то она остается вѣрна, какъ бы мала ни была разность между x' и x''; значитъ она вѣрна и въ предѣльномъ случаѣ, когда корни равны.

Впрочемъ, для случая равныхъ корней можно дать самостоятельное доказательство теоремы. Въ самомъ дѣлѣ, при равныхъ корняхъ $b^2 = 4ac$, откуда $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$; слѣд.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right);$$

но каждый изъ равныхъ корней $=-\frac{b}{2a}$, такъ-что и въ данномъ случаѣ

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x''),$$

только здѣсь $x'=x''=-\frac{b}{2a}$

501. Примѣры.—I. Разложить на множители триномъ $y=-3x^2+5x+8$.

Рѣшивъ уравненіе $-3x^2+5x+8=0$, находимъ корни тринома: $x'=-1$, $x''=\frac{8}{3}$; слѣд.

$$y=-3(x+1)\left(x-\frac{8}{3}\right)=-(x+1)(3x-8).$$

II. Разложить на множители триномъ $y=49x^2-70x+25$.

Рѣшивъ уравненіе $49x^2-70x+25=0$, находимъ равные корни: $x'=x''=\frac{5}{7}$; слѣд.

$$y=49\left(x-\frac{5}{7}\right)^2=(7x-5)^2.$$

III. Разложить триномъ $y=-9x^2+6x+1$.

Корни тринома равны: $x'=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$, $x''=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; слѣд.

$$y=-9\left(x-\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right).$$

IV. Разложить триномъ $y=4x^2-12x+13$.

Корни тринома суть: $x'=\frac{3-2i}{2}$, $x''=\frac{3+2i}{2}$; слѣд.

$$y=4\left(x-\frac{3-2i}{2}\right)\left(x-\frac{3+2i}{2}\right)=(2x-3+2i)(2x-3-2i).$$

Такъ какъ корни тринома мнимые, то его нужно представить въ иной формѣ—въ видѣ суммы квадратовъ; найдемъ:

$$y=(2x-3)^2+4.$$

502. *Приложенія.* — I. Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное ур-ніе съ корнями $x'=-\frac{3}{5}$, $x''=\frac{7}{15}$. Оно должно быть вида $(x-x')(x-x'')=0$; сл. найдемъ $\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{7}{15}\right)=0$, или $x^2+\frac{2x}{15}-\frac{21}{75}=0$, или

$$75x^2+10x-21=0.$$

II. Часто можно примѣнять разложеніе квадратнаго тринома на множители къ сокращенію дробей.

Пусть требуется сократить дробь $\frac{6x^2-5x-6}{4x^3-9x}$. Разложивъ на множители числителя, получимъ

$$6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(2x-3)(3x+2);$$

знаменатель $=x(4x^2-9)=x(2x+3)(2x-3)$.

Сокративъ дробь на $2x-3$, найдемъ $\frac{3x+2}{2x^2+3x}$.

Другой примѣръ: сократить дробь $\frac{x^3-19x^2+119x-245}{3x^2-38x+119}$.

Разлагая на множителей знаменателя, найдемъ

$$3x^2-38x+119=3(x-7)\left(x-\frac{17}{3}\right)=(x-7)(3x-17);$$

для сокращенія дроби, надо попытаться, не дѣлится ли числитель на $x-7$ или на $3x-17$; найдемъ

$$x^3-19x^2+119x-245=(x^2-12x+35)(x-7);$$

сокращая дробь на $x-7$, получимъ дробь $\frac{x^2-12x+35}{3x-17}$, не подлежащую дальнѣйшему упрощенію.

Измѣненія знака квадратнаго тринома.

502. Теорема. *Когда корни тринома* ax^2+bx+c *мнимые или дѣйствительные равные, т. е. когда* $b^2-4ac\leq 0$, *то при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ* x, *триномъ неизмѣнно сохраняетъ знакъ коэффиціента* a. *Если же корни тринома дѣйствительные неравные, т. е. если* $b^2-4ac>0$, *то при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго* x, *лежащихъ внѣ корней* (т. е. меньшихъ меньшаго, а также большихъ большаго корня), *онъ сохраняетъ знакъ коэффиціента* a; *при всѣхъ же значеніяхъ* x, *лежащихъ между корнями, знакъ тринома противоположенъ знаку коэффиціента* a.

I. Когда $b^2-4ac<0$, триномъ имѣетъ мнимые сопряженные корни; слѣд. $x'=\alpha+\beta i$, $x''=\alpha-\beta i$, гдѣ α и β—количества дѣйствительныя. Разложеніе будетъ:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=a[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

Изъ этой формы тринома видно, что при всякомъ дѣйствительномъ значеніи x, положительномъ или отрицательномъ, выраженіе въ скобкахъ, какъ сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ, всегда положительно; а стало быть произведеніе этого выраженія на a всегда будетъ имѣть знакъ количества a,

каково бы ни было x. Итакъ, если $a > 0$, триномъ будетъ всегда положителенъ; если $a < 0$, онъ всегда будетъ отрицателенъ.

Можно дать другое доказательство. Изъ неравенства $b^2 - 4ac < 0$ имѣемъ $4ac > b^2$, а раздѣливъ обѣ части на существенно положительное количество $4a^2$, находимъ: $\frac{c}{a} > \frac{b^2}{4a^2}$. Слѣдовательно, можно положить $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + \mathrm{K}^2$, гдѣ K дѣйствительно и отлично отъ нуля. Триномъ беретъ видъ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \mathrm{K}^2\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \mathrm{K}^2\right],$$

аналогичный уже найденному. Далѣе доказательство ведется вышеуказаннымъ способомъ.

II. Пусть $b^2 - 4ac = 0$: корни тринома дѣйствительные равные; означая общую величину ихъ буквою x', и имѣемъ

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x')^2.$$

Произведеніе неизмѣнно сохраняетъ знакъ a, каково бы ни было дѣйствительное значеніе x, ибо факторъ $(x - x')^2$ положителенъ при всякомъ дѣйствительномъ x.

Можно вести доказательство еще такъ: изъ $b^2 - 4ac = 0$ имѣемъ $4ac = b^2$; раздѣливъ обѣ части на $4a^2$, находимъ $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$. Представивъ триномъ въ видѣ $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ и замѣнивъ $\frac{c}{a}$ дробью $\frac{b^2}{4a^2}$, получимъ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

откуда очевидно, что триномъ неизмѣнно сохраняетъ знакъ коэффиціента a при сякомъ дѣйствительномъ x.

III. Пусть, наконецъ, $b^2 - 4ac > 0$: триномъ имѣетъ корни дѣйствительные неравные; пусть они будутъ x' и x'', причемъ $x' < x''$. Триномъ можно представить въ видѣ

$$a(x - x')\,(x - x'').$$

Разобьемъ скалу возрастающихъ значеній x на три области: 1) отъ $-\infty$ до меньшаго корня x'; 2) отъ меньшаго корня x' до большаго x''; 3) отъ большаго корня x'' до $+\infty$:

$$\underbrace{-\infty\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,x'}_{1}\underbrace{.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,x''}_{2}\underbrace{.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,+\infty}_{3}.$$

Когда x остается въ первой области, т. е. меньше меньшаго корня x', а слѣдовательно и подавно меньше x'', обѣ разности $x - x'$ и $x - x''$ будутъ отрицательны; произведеніе ихъ положительно, а потому все произведеніе $a\,(x - x')\,(x - x'')$ сохраняетъ знакъ коэффиціента a.

Когда x находится во второй области, т. е. больше x', но меньше x'', тогда $x - x' > 0$, а $x - x'' < 0$; произведеніе разностей отрицательно, а потому все произведеніе $a\,(x - x')\,(x - x'')$ имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента a.

Наконецъ, когда x лежитъ въ области (3), т. е. больше x'', а потому и подавно больше x', оба бинома $x - x'$ и $x - x''$ положительны; ихъ произведеніе положительно, а потому все произведеніе $a(x - x')(x - x'')$ имѣетъ знакъ коэффиціента a.

Такимъ образомъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ два раза мѣняетъ знакъ; причемъ перемѣнѣ знака предшествуетъ обращеніе тринома въ ноль (при $x = x'$ и при $x = x''$).

Резюме:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

(x' и x''—корни тринома, причемъ $x' < x''$).

I. $b^2 - 4ac \lesseqgtr 0$ . . . . y имѣетъ знакъ $+a$.

II. $b^2 - 4ac > 0$ $\begin{cases} x < x' \ldots\ldots\ldots & y \text{ имѣетъ знакъ } +a. \\ x' < x < x'' \ldots\ldots & y \text{ имѣетъ знакъ } -a. \\ x > x'' \ldots\ldots\ldots & y \text{ имѣетъ знакъ } +a. \end{cases}$

504. Примѣры.—I. Триномъ $x^2 - 2x + 3$ имѣетъ корни мнимые, ибо $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 3 < 0$; приэтомъ коэффиціентъ при x^2 положителенъ, слѣд. при всѣхъ значеніяхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ остается неизмѣнно положительнымъ.

II. Триномъ $-4x^2 + 12x - 9$ имѣетъ корни дѣйствительные равные, ибо $b'^2 - ac = 6^2 - (-4) . (-9) = 0$; приэтомъ, коэффиціентъ при x^2 отрицателенъ, слѣд. при всѣхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ остается неизмѣнно отрицательнымъ.

III. Триномъ $x^2 - 6x + 5$ имѣетъ корни дѣйствительные неравные: $x' = +1$ и $x'' = +5$. Слѣд. при всякомъ значеніи x отъ $-\infty$ до $+1$, а также при всѣхъ x-хъ отъ $+5$ до $+\infty$ триномъ положителенъ; при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ между $+1$ и $+5$, онъ отрицателенъ.

IV. Корни тринома $15 + 2x - 8x^2$ суть $-\frac{5}{4}$ и $+\frac{3}{2}$; слѣд. при всѣхъ x между $-\infty$ и $-\frac{5}{4}$, а также между $+\frac{3}{2}$ и $+\infty$, онъ отрицателенъ; при всякомъ x между предѣлами $-\frac{5}{4}$ и $+\frac{3}{2}$ положителенъ.

505. Слѣдствія.—I. *Если триномъ $ax^2 + bx + c$ мѣняетъ знакъ при подстановкѣ въ него послѣдовательно вмѣсто x сначала количества α, потомъ β, то уравненіе*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имѣетъ корни дѣйствительные неравные и одинъ изъ нихъ заключается между α и β.

Во-первыхъ ур. имѣетъ корни дѣйствительные неравные, ибо въ противномъ случаѣ имѣли бы $b^2 - 4ac \leqq 0$, а при этомъ условіи триномъ при всякомъ x сохранялъ бы знакъ коэффиціента a, что противорѣчитъ условію.

Во-вторыхъ, обозначивъ корни черезъ x' и x'' и полагая $x' < x''$, имѣемъ слѣдующую скалу дѣйствительныхъ значеній x:

$$-\underbrace{\infty \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x'}_{1}\;\underbrace{.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x''}_{2}\;\underbrace{.\;.\;.\;.\;.\;.\;. +\infty}_{3}$$

Сказано, что при подстановкѣ вмѣсто x количествъ α и β триномъ мѣняетъ знакъ; слѣд. если напр. при $x = \alpha$ триномъ имѣетъ знакъ коэффиціента a, то α заключается внѣ корней, т. е. или въ (1), или въ (3) области; при $x = \beta$, триномъ, мѣняя знакъ, получитъ знакъ $-a$, а потому β содержится между корнями, т. е. во (2) области. Такимъ образомъ, если α находится въ (1) области, то между α и β заключается корень x'; если же α лежитъ въ области (3), то между α и β будетъ корень x''.

Обратно: *Если между двумя числами α и β заключается корень ур-нія $ax^2 + bx + c = 0$, и только одинъ, то знаки, принимаемые первою частью ур-нія при подстановкѣ вмѣсто x чиселъ α и β, противоположны.*

По условію, между α и β заключается только одинъ корень: пусть это будетъ меньшій корень x', и пусть $\alpha < \beta$; тогда скала дѣйствительныхъ значеній x будетъ

$$-\infty \;.\;.\;.\;.\;.\; \alpha \;.\;.\;.\;.\;.\; x' \;.\;.\;.\;.\;.\; \beta \;.\;.\;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.\;.\;.\;. +\infty,$$

откуда видно, что при $x = \alpha$, какъ лежащемъ внѣ корней, триномъ имѣетъ знакъ $+a$, а при $x = \beta$, какъ лежащемъ между корнями, знакъ $-a$, противоположный первому.

II. *Когда триномъ $ax^2 + bx + c$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ при подстановкѣ вмѣсто x количествъ α и β, то между α и β заключается четное число* (0 или 2) *корней уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ имѣетъ два корня, слѣд. между α и β могутъ заключаться 0, или 1, или 2 корня; но въ данномъ случаѣ между α и β не можетъ содержаться только *одинъ* корень, ибо въ этомъ предположеніи, на осн. слѣд. I, обр., результаты подстановокъ α и β вмѣсто x имѣли бы разные знаки, что противорѣчитъ условію. Слѣд. или между α и β заключаются оба корня, или ни одного не содержится.

Приложенія.

506. I. *Когда $ac < 0$, корни ур-нія $ax^2 + bx + c = 0$ — дѣйствительные, неравные и имѣютъ противоположные знаки.*

Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ вмѣсто x ноль, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ c, а слѣд. знакъ его противоположенъ знаку коэффиціента a. Слѣд. ур. имѣетъ корни дѣйствительные, неравные, и такъ какъ 0 заключается между этими корнями, они имѣютъ противоположные знаки.

507. II. *Когда A и B имѣютъ одинаковые знаки, уравненіе $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} = C$ имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и одинъ изъ нихъ, и только одинъ, заключается между α и β.*

Дадимъ ур-нію цѣлый видъ, собравъ всѣ члены въ первую часть; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$A(x-\beta)+B(x-\alpha)-C(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Замѣнивъ x сначала количествомъ α, потомъ β, получимъ результаты: $A(\alpha-\beta)$, $B(\beta-\alpha)$; такъ какъ A и B — одного знака, разности же $\alpha-\beta$ и $\beta-\alpha$ имѣютъ знаки противоположные, то заключаемъ, что оба результата имѣютъ противоположные знаки, а потому: уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и одинъ, и только одинъ изъ нихъ, содержится между α и β.

508. III. *Дано ур-ніе* $ax^2+bx+c=0$, *имѣющее дѣйствительные неравные корни. Узнать, не рѣшая ур-нія, будетъ-ли данное количество* λ *меньше меньшаго корня, или оно заключается между корнями, или же больше большаго корня?*

Для рѣшенія вопроса подставляемъ λ вмѣсто x въ первую часть ур-нія; если окажется, что результатъ $a\lambda^2+b\lambda+c$ этой подстановки имѣетъ знакъ количества $-a$, то этимъ будетъ доказано, что λ содержится между корнями; если, напротивъ, результатъ $a\lambda^2+b\lambda+c$ будетъ имѣть знакъ количества $+a$, то должны заключить, что λ находится внѣ корней, т. е. что оно или меньше меньшаго корня, или больше большаго. Чтобы рѣшить, какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, замѣтимъ, что полусумма корней, равная $-\frac{b}{2a}$, есть количество содержащееся между корнями; а потому, если λ, находясь внѣ корней, будетъ меньше $-\frac{b}{2a}$, то очевидно, λ будетъ меньше меньшаго корня; если же λ будетъ больше $-\frac{b}{2a}$, то оно больше большаго корня.

Примѣръ 1. — *Пусть дано ур-ніе* $x^2-22x+80=0$, *имѣющее дѣйствительные неравные корни:* x' *и* x'', *и пусть* $x'<x''$. *Требуется расположить корни* x' *и* x'' *и число* 12 *въ порядкѣ возрастающихъ величинъ?*

Подставляя въ первую часть 12 вмѣсто x, находимъ; $12^2-22\times12+80=-40$: результатъ подстановки имѣетъ знакъ противоположный коэффиціенту при x^2; слѣд. 12 заключается между корнями:

$$x'<12<x''.$$

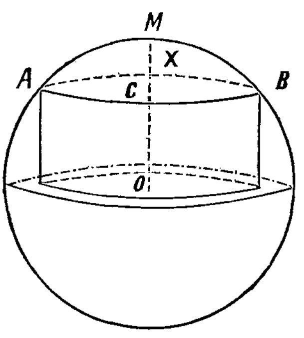
Примѣръ 2. — *Расположить въ порядкѣ возрастающихъ величинъ корни* x' *и* x'' *того-же ур-нія и числа 4 и 20.*

Результатъ подстановки 4 вмѣсто x въ первую часть есть: $4^2-22\times4+80>0$, т. е. того же знака, какъ коэффиціентъ при x^2; слѣд. 4 находится внѣ корней. Далѣе: полусумма корней равна 11; а какъ $4<11$, то заключаемъ, что 4 меньше меньшаго корня.

Подстановка 20 вмѣсто x даетъ $20^2-22\times20+80>0$, слѣд. 20 находится внѣ корней. Далѣе: $20>$ полусуммы корней 11, слѣд. 20 больше большаго корня. Итакъ

$$4<x'<12<x''<20.$$

Примѣръ 3. — *Пересѣчь шаръ радіуса R плоскостью такъ, чтобы объемъ сферическаго сегмента AMB былъ равновеликъ объему цилиндра, имѣющаго тоже основаніе, а высоту равную разстоянію центра шара отъ этого общаго основанія.*



Черт. 11.

Пусть $MC = x$; ур-ніе задачи будетъ

$$\frac{\pi x^2}{3}(3R - x) = \pi(R - x).\overline{AC}^2 = \pi(R - x)x(2R - x).$$

Одинъ изъ корней $x = 0$, очевидный à priori; раздѣливъ ур. на πx, получимъ

$$3(R - x)(2R - x) - x(3R - x) = 0,$$

или

$$2x^2 - 6Rx + 3R^2 = 0.$$

Чтобы рѣшеніе этого ур-нія служило отвѣтомъ на задачу, нужно, чтобы оно было дѣйствительнымъ, положительнымъ и $< R$.

$b'^2 - ac = (3R)^2 - 6R^2 = 3R^2$, — количеству положительному: слѣд. оба корня дѣйствительны. Ихъ произведеніе, равное $\frac{3}{2}R^2$, положительно, слѣд. оба корня имѣютъ одинаковые знаки; сумма ихъ, равная $3R$, положительна: сл. оба корня положительны. Подставивъ въ первую часть R вмѣсто x, находимъ въ результатѣ $-R^2$: слѣд. R заключается между корнями, т. е., называя корни буквами x' и x'', и полагая $x' < x''$, имѣемъ

$$x' < R < x'':$$

заключаемъ, что одинъ изъ корней меньше R, другой больше R.

Такимъ образомъ задача имѣетъ *одно рѣшеніе*, выражаемое меньшимъ корнемъ

$$x' = \frac{R\,(3 - \sqrt{3})}{2}.$$

Примѣръ 4. — *Описать около шара такой конусъ, чтобы отношеніе его полной поверхности къ поверхности шара было равно данному числу m.*

Легко видѣть, что если за неизвѣстное принять высоту конуса x, уравненіе задачи будетъ

$$x^2 - 4mRx + 8mR^2 = 0.$$

Чтобы x, выведенный изъ этого ур-нія, представлялъ рѣшеніе данной задачи, необходимо, чтобы онъ былъ количествомъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и $> 2R$. — Корни будутъ дѣйствительны, если $(2Rm)^2 - 8R^2m \gtrless 0$, или $m(m-2) \gtrless 0$, или, наконецъ, такъ какъ $m > 0$, если $m \gtrless 2$. Пусть это условіе удовлетворено. — Произведеніе корней положительно, слѣд. они имѣютъ одинаковые знаки; сумма ихъ $(4mR)$ положительна, сл. оба они положительны. — Остается разсмотрѣть, какова ихъ величина сравнительно съ $2R$. Подстановка $2R$ вмѣсто x въ первую часть даетъ $+4R^2$, т. е. результатъ одинаковаго знака съ коэффиціентомъ при x^2; заключаемъ, что $2R$ лежитъ внѣ корней; слѣд. или оба корня $< 2R$, или оба $> 2R$. Полусумма корней $= 2mR$, а

какъ $m \geqslant 2$, то она не меньше 4R; но 2R меньше этой величины, сл. оба корня больше 2R, и задача имѣетъ *2 рѣшенія.*

509. Задача. — *Дать общую форму условій, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы корни уравненія*

$$ax^2+bx+c=0,$$

предполагая, что они дѣйствительны, были оба больше, или оба меньше даннаго количества λ.

Во-первыхъ, согласно требованію, необходимо, чтобы λ лежало внѣ корней, а потому подстановка этого числа на мѣсто x въ триномъ ax^2+bx+c должна давать результатъ одинаковаго знака съ a, т. е. должно быть

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0.$$

Это условіе выражаетъ только, что λ не содержится между корнями; остается выразить, что:

1) въ первомъ случаѣ оба корня больше λ, т. е.

$x'>\lambda$ и $x''>\lambda$, откуда $x'+x''>2\lambda$, или $\frac{x'+x''}{2}>\lambda$, или, наконецъ,

$$-\frac{b}{2a}>\lambda.$$

Итакъ, условія, *необходимыя* для того, чтобы оба корня были больше λ, таковы:

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0 \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2a}>\lambda.$$

Будучи необходимы, они вмѣстѣ съ тѣмъ и *достаточны*, ибо какъ скоро они выполнены, то изъ перваго слѣдуетъ, что λ не содержится между корнями, а изъ втораго должно заключить, что λ меньше каждаго изъ корней, ибо, допустивъ, что корни меньше λ, имѣли-бы

$$x'+x''<2\lambda, \quad \text{или} \quad -\frac{b}{2a}<\lambda.$$

2) Такимъ же образомъ найдемъ, что условія, *необходимыя* и *достаточныя* для того, чтобы оба корня были меньше λ, будутъ:

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0 \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2a}<\lambda.$$

510. Задача. *Дать общую форму условія, необходимаго и достаточнаго для того, чтобы данное количество* λ *содержалось между корнями ур-нія* $ax^2+bx+c=0$.

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки числа λ на мѣсто x въ триномъ ax^2+bx+c имѣлъ знакъ, противоположный знаку a.

Каковъ бы ни былъ знакъ a, это условіе будетъ

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)<0.$$

511. Задачи.

1. Разложить на множителей первой степени триномы:

$2x^2-3x-5$; $\quad -2x^2-3x+5$; $\quad 9x^2-9x+2$; $\quad x^2+x+1$;

$4x^2+17$; $2+11x-5x^2$; $x^2+17x+16$; $20x-x^2+69$; $x^2+8x+28$; $4x^2-12x+9$; $48x-27x^2-13$; x^2+3; $x^2-ax-6a^2$; $x^2+a^2x-2a^4$; $x^2-2ax+a^2-b^2$; $x^2-4m(x-m)-n^2$; $x^2-2(a+b)x+10ab-3(a^2+b^2)$; $x^2-ax-a\sqrt{b}-b$; $x^2+2mx+m^2+a^2$; $4m^2x^2-4mpx+p^2-1$; $a^4x^2-2a^2mx+m^2+4$.

2. Сократить дроби:

$$\frac{15x^2+41x+28}{20x^2+43x+21};\quad \frac{12y^2-y-6}{3y^2+5y+2};\quad \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x-x\sqrt{3}-3\sqrt{3}};$$

$$\frac{x^2-2bx-4a(a-2b)-3b^2}{x^2-4ax+4a^2-b^2},\quad \frac{2x^3-28x^2+90x}{10x^4-150x^3+590x^2-450x}.$$

3. Какъ расположены числа 15 и 17 относительно корней уравненія

$$x^2-18x+32=0?$$

4. Расположить корни ур-нія $3x^2-17x+10=0$ и числа 0, 3 и 6 въ порядкѣ возрастающихъ значеній, не рѣшая ур-нія.

5. Изслѣдовать измѣненія знака тринома $-acx^2+x(ad-bc)+bd$, въ которомъ a, b, c и d — числа положительныя.

6. Показать, что корни ур-нія $(A-x)(C-x)-B^2=0$ всегда дѣйствительны, пользуясь теоремою объ измѣненіи знака тринома.

7. Дано уравненіе $3(x-\alpha)-4(x-\beta)=2(x-\alpha)(x-\beta)+8(x-\alpha)$, въ которомъ $\alpha>\beta$. Узнать, имѣетъ-ли оно дѣйствительные корни или мнимые, не приводя его къ виду $ax^2+bx+c=0$.

8. Опредѣлить λ такъ, чтобы триномъ

$$(\lambda+3)x^2+(\lambda+1)x-(\lambda-1)$$

былъ точнымъ квадратомъ, и привести его къ новому виду, въ которомъ онъ приэтомъ м. б. представленъ.

ГЛАВА XXXIII.

Рѣшеніе неравенствъ: квадратныхъ, высшихъ степеней, ирраціональныхъ. — Приложенія. — Задачи.

Цѣлое квадратное неравенство.

512. Цѣлыя квадратныя неравенства могутъ быть двоякаго вида:

$$ax^2+bx+c>0,\quad \text{или}\quad ax^2+bx+c<0;$$

но умноживъ второе на -1, приведемъ его къ виду перваго; слѣд. съ теоретической точки зрѣнія достаточно указать рѣшеніе неравенства

$$ax^2+bx+c>0\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Слѣдуетъ различать два случая: $b^2-4ac\leqslant 0$ и $b^2-4ac>0$.

1-й случай: $b^2 - 4ac \leqq 0$.

При этомъ условіи корни тринома будутъ дѣйствительные равные, или мнимые; а извѣстно, что какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ сохраняетъ неизмѣнно знакъ коэффиціента a. Поэтому надо различать случаи: $a > 0$ и $a < 0$.

Если $a > 0$, триномъ всегда останется положительнымъ, и слѣд. неравенству (1) удовлетворяютъ всѣ дѣйствительныя значенія x.

Если-же $a < 0$, триномъ всегда останется отрицательнымъ: неравенство не можетъ быть удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x.

2-й случай: $b^2 - 4ac > 0$.

Въ этомъ случаѣ триномъ имѣетъ корни дѣйствительные неравные; мы ихъ найдемъ, рѣшивъ ур. $ax^2 + bx + c = 0$: пусть они будутъ x' и x'', и пусть $x' < x''$.

Если $a > 0$, то триномъ, сохраняя знакъ перваго члена при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней, останется при всѣхъ этихъ значеніяхъ положительнымъ; слѣд. неравенству будутъ удовлетворять съ одной стороны всѣ значенія x, меньшія меньшаго корня x', съ другой всѣ x-сы, большіе большаго корня x'':

$$x < x' \quad \text{и} \quad x > x''.$$

Если $a < 0$, то триномъ, сохраняя знакъ противоположный первому члену при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ между корнями, будетъ положителенъ при

$$x' < x < x''.$$

513. Примѣръ I. — *Рѣшить неравенство:* $-3x^2 + 7x - 5 < 0$.

Здѣсь $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-3).(-5) = -11$, слѣд. корни тринома мнимые, а потому при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x, сохраняя знакъ перваго члена, онъ будетъ отрицателенъ; такъ что неравенство удовлетворяется всякимъ дѣйствительнымъ значеніемъ перемѣннаго.

Примѣръ II. — *Рѣшить неравенство* $3x^2 - 10x + 3 > 0$.

Здѣсь $b'^2 - ac = 5^2 - 3.\ 3 = 16$: корни тринома дѣйствительные неравные, именно: $x' = \frac{1}{3}$, $x'' = 3$.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, т. е. имѣлъ знакъ перваго члена, а это имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней. Поэтому неравенству удовлетворяютъ всѣ

$$x < \frac{1}{3}, \text{ а также } x > 3.$$

Примѣръ III. — *Рѣшить неравенство* $4x^2 + 5x - 19 < 0$.

Здѣсь $b^2 - 4ac = 5^2 - 4\ .\ 4\ .\ (-19) = 329$: корни тринома дѣйствительные неравные, именно:

$$x' = \frac{-5 - \sqrt{329}}{8}, \quad x'' = \frac{-5 + \sqrt{329}}{8}.$$

Неравенство требуетъ, чтобы знакъ тринома былъ противоположенъ знаку перваго члена, и потому x должно заключаться между корнями, т. е.

$$\frac{5+\sqrt{329}}{8} > x > \frac{-5-\sqrt{329}}{8}.$$

Примѣръ IV. — *Рѣшить неравенство* $\frac{3x-5}{7-x} > 0$.

Чтобы частное было положительно, нужно чтобы дѣлимое и дѣлитель имѣли одинаковые знаки, или, что тоже, надо, чтобы произведеніе ихъ было положительно, т. е. чтобы

$$(3x-5)(7-x) > 0, \quad \text{или} \quad -3x^2+26x-35 > 0.$$

Отсюда, какъ въ примѣрѣ III, найдемъ, что

$$\frac{5}{3} < x < 7.$$

Примѣръ V. — Рѣшить неравенство $x^2+2ax-a^2 > 0$.

Крайніе члены противоположны по знаку, слѣд. корни тринома дѣйствительные неравные; а именно, найдемъ, что

$$x' = a(\sqrt{2}-1). \quad x'' = -a(\sqrt{2}+1).$$

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ сохранялъ знакъ 1-го коэффиціента, а въ случаѣ дѣйствит. неравныхъ корней это имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней.

Отсюда:

1) Если $a > 0$, и слѣд. $x' > x''$, неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія

$$x > a(\sqrt{2}-1), \text{ а также всѣ } x < -a(\sqrt{2}+1).$$

2) Если $a < 0$, и слѣд. $x' < x''$, неравенству удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x < a(\sqrt{2}-1), \text{ а также всѣ } x > -a(\sqrt{2}+1).$$

Примѣръ VI. — *Рѣшить неравенство*

$$(n-3)(n-4)x^2 - 8a(n-3)x - 12a^2 > 0.$$

Находимъ корни тринома; для этого рѣшаемъ ур.

$$(n-3)(n-4)x^2 - 8a(n-3)x - 12a^2 = 0,$$

изъ котораго

$$x = \frac{4a(n-3) \pm \sqrt{16a^2(n-3)^2 + 12a^2(n-3)(n-4)}}{(n-3)(n-4)}.$$

Подрадикальное количество $= 4a^2(n-3)\{4(n-3)+3(n-4)\}$

$= 4a^2(n-3)(7n-24)$; такимъ образомъ найдемъ

$$x' = \frac{2a[2(n-3)+\sqrt{(n-3)(7n-24)}]}{(n-3)(n-4)}; \quad x'' = \frac{2a[2(n-3)-\sqrt{(n-3)(7n-24)}]}{(n-3)(n-4)}.$$

Знакъ тринома зависитъ какъ отъ знака коэффиціента $(n-3)(n-4)$, такъ и отъ природы корней, слѣд. отъ подрадикальнаго количества, а потому

нужно разсмотрѣть нѣсколько случаевъ, давая n всѣ значенія въ слѣдующихъ интервалахъ:

$$n \quad -\infty\underbrace{\ldots\ldots}_{1}+3\underbrace{\ldots\ldots}_{2}+\frac{24}{7}\underbrace{\ldots\ldots}_{3}+4\underbrace{\ldots\ldots}_{4}+\infty.$$

Первый интерваллъ. — Давая n значенія въ первомъ интерваллѣ, т. е. меньшія 3, будемъ имѣть: $n-3<0$, $7n-24<0$, $n-4<0$; слѣд. коэффиціентъ при x^2 больше 0; подрадикальное количество >0, и корни дѣйствительные. Неравенству будутъ удовлетворять значенія x, лежащія внѣ корней; нужно, слѣд., сравнить корни. Пишемъ наугадъ неравенство

$$\frac{2a[2(n-3)+\sqrt{(n-3)\,(7n-24)}]}{(n-3)\,(n-4)} > \frac{2a[2(n-3)-\sqrt{(n-3)\,(7n-24)}]}{(n-3)\,(n-4)} \ldots (1)$$

Такъ какъ $(n-3)\,(n-4)>0$, то можемъ откинуть знаменателя, не измѣняя знака неравенства; затѣмъ, сокращаемъ на 2, откидываемъ отъ обѣихъ частей общіе члены $2a(n-3)$, сокращаемъ на полож. количество $2\sqrt{(n-3)(7n-24)}$ и получимъ такимъ образомъ тождественное съ (1) неравенство

$$a>-a \qquad \text{или} \qquad 2a>0$$

Если $a>0$, это неравенство, а слѣд. и испытуемое, вѣрно; слѣд. будетъ $x'>x''$. Если же $a<0$, то и $2a<0$, а потому въ испытуемомъ неравенствѣ первая часть должна быть меньше второй, т. е. $x'<x''$. Заключаемъ, что, при $a>0$ неравенству удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x<x'', \qquad \text{а также} \qquad x>x';$$

при $a<0$ ему удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x<x', \quad \text{а также всѣ} \quad x>x''$$

Второй интерваллъ. Для значеній n, большихъ 3, но меньшихъ $\frac{24}{7}$, будетъ: $n-3>0$, $7n-24<0$, $n-4<0$. Слѣд. $(n-3)(n-4)<0$; подрадикальное количество <0, значитъ корни мнимые, а потому триномъ будетъ отрицателенъ, и данному неравенству, которое требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, удовлетворить нельзя.

Третій интерваллъ. Для $\frac{24}{7}<n<4$ будетъ: $n-3>0$, $7n-24>0$, $n-4<0$; слѣд. коэффиціентъ при x^2 отрицателенъ, а корни дѣйствительные. Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ противоположный коэффиціенту при x^2, а этому требованію удовлетворяютъ всѣ значенія x, лежащія между корнями.

Для сравненія корней пишемъ неравенство (1); умножая обѣ его части на отрицательное количество $(n-3)(n-4)$, должны измѣнить знакъ неравенства; откинувъ, затѣмъ, общіе члены и сокративъ на полож. количество $2\sqrt{(n-3)(7n-24)}$, найдемъ

$$a<-a, \qquad \text{или} \qquad 2a<0.$$

Если $a>0$, это неравенство невѣрно, а потому смыслъ испытуемаго неравенства надо измѣнить, слѣд. будетъ $x'<x''$. Если $a<0$, то и $2a<0$, а

потому испытуемое неравенство вѣрно; и слѣд. $x' > x''$. Заключаемъ, что при $a > 0$, неравенству удовлетворяютъ всѣ x, большія x', но меньшія x'':

$$x'' > x > x';$$

при $a < 0$, значенія x заключаются въ предѣлахъ

$$x' > x > x''.$$

Четвертый интерваллъ. Когда $n > 4$, то будетъ: $n - 3 > 0$, $7n - 24 > 0$, $n - 4 > 0$; $(n-3)(n-4) > 0$, а корни дѣйствительные.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ перваго коэффиціента, что имѣетъ мѣсто для x, лежащихъ внѣ корней.

Сравненіе корней въ этомъ случаѣ покажетъ, что при $a > 0$ будетъ $x' > x''$, при $a < 0$ будетъ $x' < x''$. Заключаемъ, что при $a > 0$ данному неравенству удовлетворяютъ

$$x > x', \quad \text{а также} \quad x < x''.$$

при $a < 0$ ему удовлетворяютъ

$$x < x' \quad \text{и} \quad x > x''.$$

Примѣръ. VII. *Рѣшить неравенство*

$$\frac{x^2 + x - 6}{2a + 1} > x + 6(2a - 1).$$

Общій знаменатель $= 2a + 1$; но какъ знакъ его неизвѣстенъ, то мы не можемъ, въ видахъ освобожденія неравенства отъ дробей, множить обѣ его части на $2a + 1$, не сдѣлавъ предварительно того или другаго предположенія о знакѣ этого двучлена. Итакъ, нужно разобрать два случая: $2a + 1 > 0$ и $2a + 1 < 0$.

Первый случай: $2a + 1 > 0$, или $a > -\frac{1}{2}$.

Въ такомъ случаѣ, умноживъ обѣ части на $2a + 1$ и не перемѣняя смысла неравенства, получимъ *тождественное съ даннымъ неравенство*:

$$x^2 + x - 6 > (2a + 1)x + 6(2a - 1)(2a + 1).$$

или

$$x^2 - 2ax - 24a^2 > 0;$$

корни тринома первой части дѣйствительные неравные, именно: $-4a$ и $+6a$.

Неравенство требуетъ чтобы триномъ имѣлъ знакъ одинаковый съ коэффиціентомъ при x^2, сл. x должно содержаться внѣ корней $-4a$ и $+6a$. Такимъ образомъ нужно знать, который изъ этихъ корней больше; а это зависитъ отъ знака a. Но a, будучи $> -\frac{1}{2}$, можетъ имѣть значенія отъ $-\frac{1}{2}$ до 0 (отрицательныя), и отъ 0 до $+\infty$ (положительныя). Когда $a < 0$, то очевидно $-4a > 6a$; при $a > 0$, наоборотъ $-4a < 6a$.

Такимъ образомъ

$$a > -\frac{1}{2}\begin{cases} a < 0 \;\ldots\ldots\ldots\; x < 6a, \text{ а также } x > -4a. \\ a > 0 \;\ldots\ldots\ldots\; x < -4a, \text{ а также } x > 6a. \end{cases}$$

Второй случай. $2a + 1 < 0$, или $a < -\frac{1}{2}$.

Умножая обѣ части неравенства на отрицательное количество $2a+1$ и измѣняя смыслъ неравенства, придемъ къ слѣдующему неравенству, тождественному съ даннымъ.

$$x^2-2ax-24a^2<0.$$

Оно требуетъ, чтобы триномъ первой части имѣлъ знакъ, противоположный коэффиціенту при x^2, а этому требованію удовлетворяютъ значенія x, лежащія между корнями $-4a$ и $+6a$ тринома.

Такъ какъ a, будучи $<-\frac{1}{2}$, отрицательно, то $-4a>+6a$. и потому значенія x, удовлетворяющія неравенству при

$$a<-\frac{1}{2} \qquad \text{суть} \qquad +6a<x<-4a.$$

Примѣчаніе. Можно бы было получить тѣ же результаты, умноживъ обѣ части предложеннаго неравенства на положительное количество $(2a+1)^2$.

514. *Приложеніе I. При какихъ условіяхъ* 0 *будетъ заключаться между корнями уравненія.*

$$x(x-1)-p(p-1)-q(q-1)-2pq=0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки нуля вмѣсто x имѣлъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента при x^2, т. е. чтобы

$$-p(p-1)-q(q-1)-2pq<0, \text{ или } (p+q)^2-(p+q)>0 \text{ или, наконецъ, }$$
$$(p+q)(p+q-1)>0,$$

А этому неравенству можно удовлетворить двояко: или полагая $p+q>1$, или $p+q<0$.

515. *Приложеніе II. Какимъ условіямъ должно удовлетворять количество* α *для того, чтобы* $-\frac{1}{2}$ *содержалась между корнями уравненія*

$$x(x+1)(\alpha^2+3\alpha+3)+a^2=0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки $-\frac{1}{2}$ вмѣсто x въ первую часть былъ отрицательный, т. е. чтобы было

$$-\frac{1}{4}(\alpha^2+3\alpha+3)+\alpha^2<0, \quad \text{или} \quad \alpha^2-\alpha-1<0.$$

Этому неравенству удовлетворимъ, взявъ

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<\alpha<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

516. *Приложеніе III. Какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома*

$$z=\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}''xy+\mathrm{A}'y^2+2\mathrm{B}'x+2\mathrm{B}y+\mathrm{A}''$$

для того, чтобы онъ оставался положительнымъ при всякихъ значеніяхъ x *и* y?

Первое условіе состоитъ въ томъ, что A должно быть >0, ибо при $\mathrm{A}<0$, если корни ур-нія относительно x

$$\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}''xy+\mathrm{A}'y^2+2\mathrm{B}'x+2\mathrm{B}y+\mathrm{A}''=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

будутъ дѣйствительны, полиномъ z будетъ отрицателенъ при тѣхъ значеніяхъ x, которыя содержатся между корнями, а если мнимы, то z постоянно будетъ отрицателенъ; слѣд. онъ не былъ бы положителенъ при всякомъ x.

Если $A>0$, то полиномъ z будетъ всегда положителенъ, если корни ур-нія (1), рѣшеннаго относительно x, будутъ мнимыми, что ведетъ къ неравенству:

$$(B''^2-AA')y^2+2(B'B''-AB)y+B'^2-AA''<0;$$

а этотъ квадратный относительно y триномъ будетъ постоянно отрицателенъ, если

$$B''^2-AA'<0 \quad \text{и} \quad (B'B''-AB)^2-(B''^2-AA')(B'^2-AA'')<0.$$

Слѣд., искомыя условія таковы:

$$A>0,\quad B''^2-AA'<0 \quad \text{и} \quad (B'B''-AB)^2-(B''^2-AA')(B'^2-AA'')<0.$$

517. *Приложеніе* IV. — *Изслѣдовать корни уравненія*

$$(\lambda+2)x^2+2(\lambda+1)x-(\lambda-1)=0$$

при измѣненіи λ *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Прежде всего нужно знать, какъ взять λ, для того чтобы корни ур-нія были дѣйствительны. Необходимо и достаточно для этого, чтобы было

$$(\lambda+1)^2+(\lambda+2)(\lambda-1) \geqq 0, \quad \text{или} \quad 2\lambda^2+3\lambda-1 \geqq 0 \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Корни тринома $2\lambda^2+3\lambda-1$, какъ видно à priori, дѣйствительные неравные; именно

$$\lambda_1=-\frac{3+\sqrt{17}}{4},\quad \lambda_2=\frac{\sqrt{17}-3}{4}.$$

Чтобы удовлетворить неравенству (1), нужно λ давать значенія, лежащія внѣ корней. Итакъ, при $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ ур-ніе имѣетъ мнимые корни; при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$ — дѣйствительные равные, а при $\lambda<\lambda_1$ и $\lambda>\lambda_2$ — дѣйствительные неравные. Изслѣдуемъ теперь знаки дѣйствительныхъ корней при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до λ_1 и отъ λ_2 до $+\infty$; они зависятъ отъ знаковъ коэффиціентовъ, а послѣдніе мѣняютъ свой знакъ при переходѣ черезъ 0; поэтому, надо знать тѣ значенія λ, при которыхъ коэффиціенты обращаются въ нули: эти значенія суть

$$\lambda_3=-2,\quad \lambda_4=-1,\quad \lambda_5=+1.$$

Составимъ теперь нижеслѣдующую скалу возрастающихъ значеній λ:

$$\underset{}{-\infty}\ldots\ldots\underset{\lambda_3}{-2}\ldots\ldots\underset{\lambda_1}{-\frac{3+\sqrt{17}}{4}}\ldots\ldots\underset{\lambda_4}{-1}\ldots\ldots\underset{\lambda_2}{+\frac{\sqrt{17}-3}{4}}\ldots\ldots\underset{\lambda_5}{+1}\ldots\ldots+\infty$$

1. — При $\lambda=\mp\infty$ уравненіе, если въ немъ вынести λ за скобки, беретъ видъ

$$\lambda\left[\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)x^2+2\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)x-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]=0;$$

и слѣд. при $\lambda=\mp\infty$ корни его должны удовлетворять ур-нію

$$x^2+2x-1=0.$$

Эти корни суть:

$$x'=-(1+\sqrt{2}),\quad x''=\sqrt{2}-1.$$

2. — $\lambda < -2$. Произведеніе корней $= -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 2}$; но если $\lambda < -2$, то и подавно $\lambda < 1$; слѣд. $\lambda + 2 < 0$ и $\lambda - 1 < 0$, а потому произведеніе корней отрицательно, и слѣд. *знаки ихъ противоположны.*

Сумма корней $= -\frac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2}$; но λ, будучи меньше -2, меньше и -1; слѣд. $\lambda + 2 < 0$ и $\lambda + 1 < 0$, и потому сумма корней отрицательна; заключаемъ, что *отрицательный корень имѣетъ большую абсолютную величину.*

3. — $\lambda = -2$. Отсюда $\lambda + 2 = 0$, и слѣд. *одинъ корень безконеченъ, другой удовлетворяетъ ур-нію*

$$2(-2+1)x - (-2-1) = 0, \quad \text{или} \quad -2x + 3 = 0,$$

откуда: $\quad x' = -\infty, \qquad x'' = \frac{3}{2}.$

4. — $-2 < \lambda < -\frac{3+\sqrt{17}}{4}$. — Въ этомъ случаѣ $\lambda + 2 > 0$; затѣмъ, λ, будучи меньше $-\frac{3+\sqrt{17}}{4}$, будетъ меньше и -1 и $+1$, сл. $\lambda + 1 < 0$ и $\lambda - 1 < 0$. Произведеніе корней, равное $-\frac{\lambda - 1}{\lambda + 2}$, положительно: *знаки корней одинаковы.* — Сумма корней, равная $-\frac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2}$, положительна, слѣд: оба корня *дѣйствительные, неравные* и *положительные.*

5. — $\lambda = -\frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Въ этомъ случаѣ, количество $b'^2 - ac$ обращается въ ноль, и ур. имѣетъ корни дѣйствительные равные; общая величина ихъ выражается формулою $-\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}$. Вычисливъ ее, имѣемъ

$$x' = x'' = \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

6. — $-\frac{3+\sqrt{17}}{4} < \lambda < \frac{\sqrt{17}-3}{4}$. — Количество $b'^2 - ac$ становится отрицательнымъ, и ур-ніе имѣетъ *корни мнимые сопряженные.*

7. — При $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$ снова $b'^2 - ac = 0$, и ур-ніе имѣетъ *корни дѣйствительные равные.*

$$x' = x'' = \frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

8. — $\frac{\sqrt{17}-3}{4} < \lambda < +1$. — При этомъ будетъ: $\lambda - 1 < 0$, $\lambda + 1 > 0$, $\lambda + 2 > 0$, откуда легко убѣдиться, что произведеніе корней положительно, сумма же ихъ отрицательна, а потому ур-ніе имѣетъ *корни дѣйствительные, неравные и оба отрицательные.*

9. — $\lambda = +1$. Въ такомъ случаѣ $\lambda - 1 = 0$, слѣд. произведеніе корней

равно нулю: одинъ корень равенъ нулю, другой удовлетворяетъ ур-нію $3x+4=0$; слѣд.

$$x'=-\frac{4}{3},\quad x''=0.$$

10. — $\lambda>+1$; то, очевидно, $\lambda>-1$ и $\lambda>-2$; слѣд. $\lambda-1>0$, $\lambda+1>0$, $\lambda+2>0$, поэтому произведеніе корней и сумма ихъ отрицательны, а слѣд. ур-ніе имѣетъ *корни дѣйствительные, неравные, съ противоположными знаками, и отрицательный корень имѣетъ большую абсолютную величину.*

11. — $\lambda=+\infty$. Результатъ тотъ же, что въ первомъ случаѣ:

$$x'=-(1+\sqrt{2}),\quad x''=\sqrt{2}-1.$$

Раціональныя дробныя неравенства.

518. Когда неизвѣстное входитъ въ неравенствѣ въ знаменателѣ, то *мы можемъ уничтожить знаменателя, если онъ представляетъ количество существенно-положительное. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ приводятъ всѣ члены неравенства къ одному знаменателю и собираютъ ихъ въ первую часть.* Такимъ образомъ получается неравенство вида

$$\frac{P}{Q}>0,\quad \text{или}\quad \frac{P}{Q}<0,$$

гдѣ P и Q суть полиномы, содержащіе x. Замѣчая, что по правилу знаковъ при умноженіи и дѣленіи, произведеніе количествъ P и Q всегда имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и ихъ частное, можно предыдущія неравенства замѣнить тождественными имъ:

$$PQ>0,\quad \text{или}\quad PQ<0.$$

Къ тому же результату мы пришли бы, умножая обѣ части того или другаго неравенства на существенно положительное количество Q^2.

Затѣмъ разлагаютъ полиномы P и Q на множители 1-ой степени относительно x, и получаютъ неравенство вида:

$$A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\,.\,.\,.\,.>0,$$

гдѣ A не содержитъ x. Затѣмъ распредѣляютъ количества α, β, γ, ... въ порядкѣ возрастающихъ величинъ. Пусть напр. будетъ

$$-\infty<\alpha<\beta<\gamma\,.\,.\,.\,.\,.<+\infty.$$

Очевидно, каждый двучленный множитель будетъ сохранять неизмѣнный знакъ до тѣхъ поръ, пока x, увеличиваясь, не перейдетъ значеніе, обращающее этотъ множитель въ ноль. Такимъ образомъ можно указать знакъ произведенія для всякаго отдѣльнаго интервалла, и слѣд. указать тѣ интерваллы, въ которыхъ произведеніе сохраняетъ требуемый неравенствомъ знакъ.

519. Примѣръ I. — *Въ какихъ предѣлахъ нужно измѣнять x, чтобы удовлетворить неравенству*

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3}>1.$$

Перенеся 1 въ первую часть и приведя къ общему знаменателю, получимъ неравенство

$$\frac{2x^2-4}{2x^2-5x+3}>0.$$

Умноживъ обѣ части на существенно-положительное количество $(2x^2-5x+3)^2$, найдемъ неравенство, *тождественное предложенному*:

$$2(x^2-2)(2x^2-5x+3)>0,$$

или, по разложеніи x^2-2 и $2x^2-5x+3$ (триномовъ, имѣющихъ корни дѣйствительные неравные, и слѣд. измѣняющихъ знакъ при измѣненіи x) на множители 1-й степени:

$$4(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0.$$

Будемъ давать x значенія въ слѣдующихъ интервалахъ, въ которыхъ величины, обращающія каждый биномъ въ ноль, расположены въ возрастающемъ порядкѣ:

$$-\infty\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;}_{1}-\sqrt{2}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;}_{2}+1\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;}_{3}+\sqrt{2}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;}_{4}+\frac{3}{2}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;}_{5}+\infty.$$

Если давать x значенія меньшія $(-\sqrt{2})$, то каждый множитель будетъ отрицателенъ; а какъ ихъ четное число, то все произведеніе будетъ оставаться положительнымъ.

Если давать x значенія, большія $(-\sqrt{2})$, но меньшія $+1$, а слѣд. и подавно меньшія $\sqrt{2}$ и $\frac{3}{2}$, то множитель $x+\sqrt{2}$ будетъ положителенъ, остальные же биномы — отрицательны, и такъ какъ число отрицательныхъ множителей — нечетное, все произведеніе будетъ отрицательно.

Давая x значенія, большія $+1$, но меньшія $+\sqrt{2}$, находимъ, что два множителя: $x+\sqrt{2}$ и $x-1$ будутъ положительны, а два: $x-\sqrt{2}$ и $x-\frac{3}{2}$ отрицательны; слѣд. произведеніе положительно. И такъ далѣе.

Убѣдимся, что данному неравенству удовлетворяютъ значенія x, опредѣляемыя нижеслѣдующими предѣлами:

$$x<-\sqrt{2};\qquad +1<x<+\sqrt{2};\qquad x>+\frac{3}{2}\cdot$$

520. Примѣръ II. *Рѣшить неравенство* $\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2-3x+1)}<0.$

Это неравенство *тождественно* слѣдующему:

$$(5x^2-2x+3)(x-1)(x^2-3x+1)<0.$$

Замѣчая, что для тринома $5x^2-2x+3$ имѣемъ: $1-5\,.\,3<0$, т. е. что корни его мнимые, заключаемъ, что онъ всегда будетъ сохранять знакъ перваго коэффиціента, т. е. всегда положителенъ. Поэтому данное неравенство *тождественно* еще слѣдующему простѣйшему:

$$(x-1)(x^2-3x+1)<0.$$

или $$\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$

Даемъ x послѣдовательно значенія въ интервалахъ:

$$\underbrace{-\infty \;.\;.\;.\;.\;}_{1}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;+1}_{2}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;+}_{3}\frac{3+\sqrt{5}}{2}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;+\infty}_{4}.$$

Когда $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, всѣ три множителя, а слѣд. и произведеніе, будутъ отрицательны. При $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1$, первый множитель положителенъ, два другіе отрицательны, слѣд. произведеніе положительно. При $1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, первые два множителя >0, третій <0, слѣд. произведеніе <0. Наконецъ, при $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ всѣ множители, а съ ними и произведеніе >0. Итакъ, неравенству удовлетворяютъ:

$$x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \qquad 1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

521. Примѣръ III. *Рѣшить неравенство* $\frac{2ax+3b}{5bx-4a}<4.$

Приведя къ общему знаменателю, имѣемъ

$$\frac{2(a-10b)x+3b+16a}{5bx-4a}<0,$$

что тождественно неравенству

$$[2(a-10b)x+3b+16a](5bx-4a)<0,$$

или, по вынесеніи изъ первыхъ скобокъ $2(a-10b)$, а изъ вторыхъ $5b$:

$$10(a-10b)b\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right)<0.$$

Относительно коэффиціента $10(a-10b)b$ могутъ быть предположенія

$$b<0\begin{cases}a<10b\\ a>10b\end{cases}, \qquad b>0\begin{cases}a<10b\\ a>10b\end{cases}.$$

Первый случай: $b<0, \quad a<10b.$

Произведеніе $10(a-10b)b$ положительно; слѣд. неравенство тождественно съ

$$\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right)<0.$$

Триномъ долженъ имѣть знакъ противоположный коэффиціенту при x^2, слѣд. x должно заключаться между $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$ и $\frac{4a}{5b}$.

Нужно знать, который изъ этихъ предѣловъ большій. Положимъ наугадъ $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}>\frac{4a}{5b}$; т. к. $10(a-10b)b>0$, мы можемъ умножить обѣ части на это произведеніе, и не измѣняя смыслъ неравенства, получимъ ему тождествен-

ное: $-(3b+16a)5b > 4a.2(a-10b)$, или $-15b^2-8a^2 > 0$, что невѣрно, ибо первая часть существенно отрицательна.

Заключаемъ, что $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < \frac{4a}{5b}$, а потому x нужно взять такъ, чтобы

$$-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}.$$

Второй случай: $b < 0$, $a > 10b$.

Произведенiе $10(a-10b)b$ отрицательно, слѣд. предложенное неравенство тождественно съ

$$\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right) > 0.$$

а потому x не должно заключаться между корнями тринома: $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$ и $\frac{4a}{5b}$.

Посмотримъ, который изъ нихъ больше. Допустивъ, что $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} > \frac{4a}{5b}$ и замѣчая, что $10(a-10b)b < 0$, умножаемъ допущенное неравенство на это произведенiе и перемѣняемъ смыслъ неравенства; найдемъ тождественное съ нимъ неравенство $-15b^2-8a^2 < 0$, что вѣрно.

Заключаемъ, что предположенiе было правильно, а потому данному неравенству удовлетворяютъ два ряда значенiй x:

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)} \quad \text{и} \quad x < \frac{4a}{5b}.$$

Третiй случай: $b > 0$, $a < 10b$.

Оперируя такимъ же образомъ, найдемъ, что предложенному неравенству удовлетворяютъ:

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)} \quad \text{и} \quad x < \frac{4a}{5b}.$$

Четвертый случай: $b > 0$, $a > 10b$.

Вышеуказаннымъ способомъ придемъ къ результату:

$$-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}.$$

Итакъ, чтобы удовлетворить предложенному неравенству, надо:

При $(a-10b).b > 0$ брать: $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}$.

При $(a-10b).b < 0$ брать: $x > -\frac{3b+15a}{2(a-10b)}$, или $x < \frac{4a}{5b}$.

Рѣшенiе ирращiональныхъ неравенствъ.

522. Когда неизвѣстное встрѣчается подъ знакомъ квадратнаго корня, то, вообще говоря, нужно бываетъ освободить его изъ подъ знака корня, а для этого нужно изолировать радикалъ въ одну часть неравенства. Затѣмъ, слѣдуетъ опредѣлить знакъ второй части неравенства, будетъ-ли онъ неизмѣннымъ, или

же зависѣть отъ предположеній относительно буквъ, входящихъ въ эту часть. *Если знакъ этотъ не одинаковъ съ знакомъ, стоящимъ передъ радикаломъ, смыслъ неравенства очевиденъ. Если же одинаковъ, то нужно возвысить обѣ части въ квадратъ, сохраняя или перемѣняя смыслъ неравенства, смотря потому, будетъ-ли этотъ общій знакъ* $+$ *или* $-$.

523. Примѣръ I. — *Рѣшить неравенство* $\sqrt{(x-1)(x-2)} > x-3$.

Чтобы $\sqrt{(x-1)(x-2)}$ былъ дѣйствителенъ, надо, чтобы подрадикальное количество было >0: этому требованію удовлетворяютъ всѣ x отъ $-\infty$. . . . до 1, и отъ 2 до $+\infty$. Затѣмъ, очевидно, неравенство будетъ удовлетворено всѣми значеніями x, которыя, не содержась между 1 и 2, будутъ меньше 3, ибо въ этомъ случаѣ вторая часть будетъ отрицательна. Итакъ, во-первыхъ, для x можно брать всѣ числа отъ $-\infty$ до $+1$, и отъ $+2$ до $+3$.

Пусть теперь будетъ $x>3$: обѣ части будутъ положительны, а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ знакъ неравенства, ищемъ числа, удовлетворяющія неравенству

$$x^2-3x+2>x^2-6x+9, \quad \text{или} \quad x-\frac{7}{3}>0.$$

Это неравенство удовлетворяется всѣми значеніями x, большими 3.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x отъ $-\infty$ до $+1$ и отъ $+2$ до $+\infty$.

524. Примѣръ II. — *Рѣшить неравенство* $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$, *въ которомъ* $a>0$.

Сначала ищемъ, какъ взять x, чтобы оба радикала были дѣйствительны, иначе, чтобы подкоренныя количества были положительны. Разсматривая a^2-x^2 какъ неполный квадратный триномъ, замѣчаемъ, что онъ будетъ положителенъ, если x взять между его корнями, т. е. если $-a<x<a$ . . . (1). Такимъ же образомъ убѣдимся, что второй радикалъ будетъ дѣйствителенъ при $0<x<2a$ . . . (2). Изъ сопоставленія (1) со (2), заключаемъ, что оба радикала будутъ дѣйствительны, если

$$a>x>0 \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Зная это, перенесемъ первый членъ неравенства во вторую часть; найдемъ: $\sqrt{2ax-x^2}>a-\sqrt{a^2-x^2}$. Такъ какъ вторая часть положительна, какъ и первая, то, возведя въ квадратъ и не перемѣняя смысла неравенства, получимъ тождественное данному неравенство: $2ax>2a^2-2a\sqrt{a^2-x^2}$, или, раздѣливъ обѣ части на положительное количество $2a$ и изолировавъ радикалъ: $\sqrt{a^2-x^2}>a-x$. По (3) $x<a$, слѣд. $a-x>0$, а потому вторичное возвышеніе въ квадратъ дастъ: $x^2-ax<0$. По смыслу этого неравенства x должно заключаться между корнями первой части; слѣд.

$$a>x>0,$$

что не отличается отъ условія дѣйствительности.

525. Примѣръ III. — *Рѣшить неравенство* $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ (1), *въ которомъ* a *и* b *положительны и* $a>b$.

Пусть сначала $x+b>0$, т. е. $x>-b$. Изъ условія $a>b$ слѣдуетъ, что $x+a>x+b$, а потому и $x+a>0$. Обѣ части предложеннаго неравенства положительны, а потому, возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ тождественное съ даннымъ неравенство (по отнятіи 1 отъ обѣихъ частей):

$$\frac{2ax}{x^2+a^2}>\frac{2bx}{x^2+b^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ числа значеній x, большихъ $-b$, возьмемъ сперва положительныя; тогда сокращеніе на положит. количество $2x$ дастъ: $\frac{a}{x^2+a^2}>\frac{b}{x^2+b^2}$, или, по освобожденіи отъ дробей, $ax^2+ab^2>bx^2+a^2b$, или $x^2(a-b)>ab(a-b)$. Сокративъ на положит. количество $a-b$, дадимъ этому неравенству видъ $(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})>0$, и какъ первый множитель >0, то необходимо, чтобы было

$$x>\sqrt{ab}.$$

Разсмотримъ теперь величины x, содержащіяся между 0 и $-b$, отрицательныя; въ этомъ случаѣ сокращеніе (2) на $2x$ дастъ: $\frac{a}{x^2+a^2}<\frac{b}{x^2+b^2}$, или $(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})<0$, а какъ второй множитель <0, то необходимо, чтобы

$$x>-\sqrt{ab}.$$

Но $a>b$, откуда $ab>b^2$ и $\sqrt{ab}>b$, а слѣд. $-\sqrt{ab}<-b$; такимъ образомъ условіе $x>-\sqrt{ab}$ содержится въ условіи $x>-b$.

Пусть теперь $x+b<0$, или $x<-b$, т. е. x содержится между $-b$ и $-\infty$. Дадимъ сначала x значенія между $-b$ и $-a$, т. е. положимъ $x>-a$, откуда $x+a>0$; въ такомъ случаѣ первая часть предложеннаго неравенства будетъ положительна, между тѣмъ какъ вторая отрицательна, и потому неравенство (1) будетъ удовлетворено всѣми значеніями x между $-b$ и $-a$.

Давъ x значенія $<-a$, будемъ имѣть $x+a<0$; а какъ и $x+b<0$, обѣ части даннаго неравенства будутъ отрицательны, а потому возводя въ квадратъ, должны измѣнить смыслъ неравенства; найдемъ

$$\frac{2ax}{a^2+x^2}<\frac{2bx}{x^2+b^2},$$

откуда, сокративъ на $2x<0$ и т. д., получимъ

$$(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})>0;$$

второй множитель для разсматриваемыхъ значеній x отрицателенъ, слѣд. необходимо, чтобы и $x+\sqrt{ab}<0$, откуда

$$x<-\sqrt{ab};$$

такъ какъ это условіе удовлетворено само собою, то неравенство (1) удовлетворено всѣми отрицательными величинами x, меньшими $-a$.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяютъ всѣ отрицательныя значенія x, и положительныя, большія $\sqrt{ab}$; и стало быть неудовлетворяютъ только значенія x, содержащіяся между 0 и $+\sqrt{ab}$.

526. Примѣръ IV.—*Рѣшить неравенство* $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}} < a-1$, *гдѣ* a *данное дѣйствительное количество.*

Во-первыхъ $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}$ долженъ быть дѣйствительнымъ; а для этого надо, чтобы было $(3x+a)(x-a)>0$, т. е. чтобы x не содержалось между $-\frac{a}{3}$ и a. Отсюда видно, что надо различать два случая: $a<0$ и $a>0$.

Если $a<0$, надо брать x такъ, чтобы было: $x<a$, или $x>-\frac{a}{3}$; при $a>0$ должно брать: или $x>a$, или $x<-\frac{a}{3}$.

Но если $a<0$, то и $a-1<0$, и неравенство становится *невозможнымъ*, ибо оно будетъ требовать, чтобы положительное количество было меньше отрицательнаго.

Итакъ, необходимо должно положить $a>0$; затѣмъ необходимо еще, чтобы было $a>1$; тогда обѣ части будутъ положительны, и возвысивъ ихъ въ квадратъ, сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ тождественное ему

$$\frac{3x+a}{x-a}<(a-1)^2, \quad \text{или} \quad \frac{3x+a-(a-1)^2(x-a)}{x-a}<0;$$

а по умноженіи обѣихъ частей на $(x-a)^2$:

$$(x-a)[-(a^2-2a-2)x+(a^2-2a+2)a]<0,$$

что можно представить въ видѣ

$$(a^2-2a-2)(x-a)\left(x-\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a\right)>0.$$

Во-первыхъ, должно быть $a-1>0$; во-вторыхъ, x можно давать только такія значенія, которыя: или $<-\frac{a}{3}$, или $>a$.

Разсмотримъ, каковъ будетъ знакъ коэффиціента a^2-2a-2; корни этого тринома, какъ видно à priori, дѣйствительные и неравные, одинъ положительный, другой отрицательный; замѣняя въ триномѣ a единицей, находимъ въ результатѣ -3, сл. 1 находится между корнями, и слѣд. положит. корень >1; вычисливъ его, находимъ $a_1=1+\sqrt{3}$. Мы можемъ давать a только значенія, большія единицы; но эти значенія могутъ быть или $<$ или $>1+\sqrt{3}$.

Такимъ образомъ, различаемъ два случая:

Первый случай: $1<a<1+\sqrt{3}$.

Такія значенія a лежатъ между корнями тринома a^2-2a-2, а потому онъ отрицателенъ; значитъ и произведеніе двухъ другихъ множителей д. б. отрицательнымъ, а потому величины x, удовлетворяющія неравенству, должны лежать между

$$a \quad \text{и} \quad +\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a;$$

нужно знать сравнительную величину этихъ предѣловъ.

Но триномъ a^2-2a+2, имѣя корни мнимые, положителенъ при всякомъ a; a^2-2a-2, при взятыхъ значеніяхъ a, отрицателенъ; слѣд.

$a>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a$, и потому должно взять

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a<x<a.$$

Съ другой стороны, для дѣйствительности радикала, находящагося въ неравенствѣ, x нужно брать или $>a$, или $<-\frac{a}{3}$. Поэтому сравнимъ предѣлы

$$-\frac{a}{3} \text{ и } \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a,$$

допустивъ, напр., что

$$-\frac{a}{3}>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ: $a>0$ и $a^2-2a-2<0$; слѣд. умноживъ обѣ части на $\frac{a^2-2a-2}{a}$ и перемѣнивъ смыслъ неравенства, найдемъ ему тождественное

$-a^2+2a+2<3a^2-6a+6$, или $0<4a^2-8a+4$, или $0<(2a-2)^2$,

что вѣрно; слѣд. вѣрно и допущеніе. Такимъ образомъ, необходимо и достаточно взять x такъ:

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a<x<-\frac{a}{3}.$$

Второй случай. $a>1+\sqrt{3}.$

Множитель a^2-2a-2 въ этомъ случаѣ >0; сл. необходимо и достаточно, чтобы произведеніе двухъ другихъ множителей было положительно, слѣд. x можетъ принимать всѣ значенія, не содержащіяся между a и $\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a$.

Для сравненія этихъ предѣловъ, допустимъ, напр.:

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a<a.$$

Такъ какъ въ изслѣдуемомъ случаѣ a и a^2-2a-2 положительны, замѣняемъ это неравенство ему тождественнымъ

$$a^2-2a+2<a^2-2a-2, \quad \text{или} \quad 4<0,$$

что невѣрно; и потому $\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a>a$; такъ что должно взять

или $x<a$, или $x>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a$.

Комбинируя эти результаты съ предѣлами, найденными á priori, находимъ

$$x<-\frac{a}{3}, \quad \text{или} \quad x>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a.$$

Итакъ:

при $a<1$ предложенное неравенство *невозможно*;

при $1 < a < 1 + \sqrt{3}$ ему удовлетворяютъ: $\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a < x < -\frac{a}{3}$;

при $a > 1 + \sqrt{3}$ ему удовлетворяютъ: или $x < -\frac{a}{3}$, или $x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a$.

527. Примѣръ V. *Рѣшить неравенство* $\frac{\sqrt{3x - 2a}}{x + a} > \frac{\sqrt{3x - a}}{x + 5a}$, *гдѣ* a *дѣйствительное количество.*

Чтобы оба радикала были дѣйствительны, нужно, чтобы было $x > \frac{2}{3} a$ и $x > \frac{a}{3}$; но одно изъ этихъ условій содержитъ въ себѣ другое, а именно:

при $a < 0$ необходимо и достаточно, чтобы было $x > \frac{a}{3}$;

при $a > 0$ необходимо и достаточно взять $x > \frac{2}{3} a$.

Первый случай: $a < 0$.

Нужно знать знаки обѣихъ частей, и для этого сдѣлать предположенія относительно знаковъ $x + a$ и $x + 5a$.

1) $x + a < 0$, тогда и подавно $x + 5a < 0$; обѣ части неравенства отрицательны, а потому, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, съ перемѣною смысла неравенства, и уничтоживъ положительный знаменатель, получимъ:

$(3x - 2a)(x + 5a)^2 - (3x - a)(x + a)^2 < 0$, или $23ax^2 + 54a^2x - 49a^3 < 0$, или, сокративъ на $a < 0$:

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 > 0.$$

Триномъ первой части, какъ видно à priori, имѣетъ корни дѣйств. неравные съ противоположными знаками; слѣд. чтобы сдѣлать его > 0, необходимо и достаточно дать x значенія, лежащія внѣ корней. Корни его суть

$$x' = -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a, \qquad x'' = +\frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a,$$

и какъ $a < 0$, то очевидно $x' > x''$.

Слѣдовательно, должно взять

$$x < \frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a, \qquad \text{или} \qquad x > -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a.$$

Но мы видѣли, что x должно быть $> \frac{a}{3}$ и $< -a$. Подставляя въ триномъ $(-a)$ и $\frac{a}{3}$ вмѣсто x, убѣдимся, что эти величины расположены относительно корней x' и x'' такъ:

$$-\infty \cdot \cdot \cdot \frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{a}{3} \cdot \cdot \cdot (-a) \cdot \cdot -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a \cdot \cdot +\infty$$

и слѣд. *невозможно* удовлетворить неравенству, если

$$a < 0 \quad \text{и} \quad x < -a.$$

2) $-a < x < -5a$, т, е. $x+a$ и $x+5a$ противоположны по знаку; первая часть неравенства >0, вторая <0; и какъ $x > \frac{a}{3}$, *неравенство удовлетворено.*

3) $x+5a>0$; и подавно $x+a>0$. Обѣ части неравенства положительны, потому, возвышая въ квадратъ и сохраняя смыслъ неравенства, найдемъ:

$$23x^2+54ax-49a^2<0,$$

и слѣд.

$$\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a < x < -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a.$$

Кромѣ того, должно быть: $x>-5a$ и $x>\frac{a}{3}$, что приводится къ $x>-5a$; а какъ порядокъ величинъ таковъ:

$$-\infty \cdot \quad \cdot \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \cdot \cdot \quad \cdot \frac{a}{3} \cdot \quad \cdot -a \cdot \cdot - \frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \cdot \cdot -5a \cdot \cdot +\infty$$

то очевидно, что неравенству удовлетворить *нельзя.*

Итакъ: *когда* $a<0$, *чтобы удовлетворить неравенству, надо взять*

$$-a<x<-5a.$$

Второй случай: $a>0$.

Чтобы радикалы были дѣйствительны, надо чтобы было: $x>\frac{2}{3}a$. Слѣд. будетъ: $x+a>0$ и $x+5a>0$; а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, находимъ тождественное данному неравенство (по сокращеніи на $a>0$):

$$23x^2+54ax-49a^2>0;$$

откуда заключаемъ, что x нужно взять внѣ интервалла корней. А какъ порядокъ величинъ въ данномъ случаѣ таковъ:

$$-\infty \cdot \cdot \quad \cdot -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \frac{2}{3}a \cdot \cdot \cdot \quad \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \cdot \cdot \cdot +\infty,$$

то: *когда* $a>0$, *необходимо и достаточно взять*

$$x>\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a.$$

528. Задачи.

Рѣшить неравенства:

1. $x^2-13x+40>0$; $x^2-4x-140>0$; $9x^2-12x+2<0$;
$x^2-5x<6000$; $11x^2+x-180<0$; $x^2-3x-4>0$;
$x^2-12x+37>0$; $a^2-8a+17>0$; $3x^2-8x+12<0$; $x^2<10x-16$;
$6x^2-7x+2<0$; $12x^2-17x+6>0$; $8x^2-6x+1<0$;
$4x^2+5x-19<0$; $x^2+2x+1<0$; $5x^2+x+3>0$.
$(x+1)^2<3(x-1)^2$; $38x-7-15x^2<0$; $29-11x>-x(1+x)$.

2. Рѣшить совмѣстныя неравенства:

a) $x^2-7x+6>0$, $x^2-15x+56<0$.

b) $x^2-7x+6>0$ $x^2-13x+30<0$.

c) $x^2 - 7x + 6 < 0, \quad x^2 - 13x + 30 < 0.$

d) $x^2 - 7x + 6 > 0, \quad x^2 - 13x + 30 > 0.$

e) $x^2 - 7x + 6 < 0, \quad x^2 - 25x + 150 < 0.$

3. $(a^2 + 3a + 3)(x^2 + x) + a^2 < 0.$

4. $3ax^2 - 3b^2x + b^3 - a^3 < 0.$

5. $x(x-1) - p(p-1) - q(q-1) + 2pq > 0.$

6. $(2a - b)x^2 + bx(2b^2 - 5a) + 2ab^2 > 0.$

7. $(2 - 3ab)\,x^2 + 3bx\,(1 - ab) - 3b - 2b^3 < 0.$

8. $a(a-1)(x-b)^2 + a'(a'+1)\,x^2 - 2aa'x(x-b) > 0.$

9. $(a-b)(a-10b)x^2 - 2(a^2 - b^2)x + a^2 + 11ab - 2b^2 < 0.$

10. $(m-n)x^2 - 2(m+n)x + m - n > 0.$

11. $(m^2 + n^2 - mn)x^2 - 2(m^2 + n^2)x + (m^2 + mn + n^2) > 0.$

12. $x^3 + 1 > x^2 + x.$

13. $x(x^2 - 4) + x - 2 < 0.$

14. $2(2x^4 + 3x^2 + 1) < 3(x + x^3).$

15. $2(2x^4 + 3x^2 + 1) > 3(2x^3 + x).$

16. $\frac{x^2 - 1}{a - 1} - \frac{3x}{5} < \frac{x^2}{2a - 2}.$

17. $\frac{x^2}{a^2 - 2a - 3} + \frac{x - a}{a + 1} < \frac{2x + a}{a - 3}.$

Изслѣдовать корни слѣдующихъ уравненій при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$:

18. $(2\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x - (\lambda - 2) = 0.$

19. $(3\lambda - 1)x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda = 0.$

20. $(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda + 1)(2x - 1) = 0.$

21. $(\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 3)x + (\lambda - 4) = 0.$

22. $(\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + 2ac = 0.$

23. $(\lambda^2 + 3\lambda + 7)x^2 + (\lambda - 1)x - 15 = 0.$

24. $\lambda x^2 - (2\lambda + 1)x + 3\lambda - 1 = 0.$

25. Вывести условіе дѣйствительности корней ур-нія

$$(3\lambda + 1)x^2 - (4\lambda + 1)x + 12\lambda = 0,$$

и опредѣлить предѣлы λ для того, чтобы оба корня были больше 2.

26. Что нужно, чтобы корни уравненія $ax^2 + bx + c - 2a = 0$, предполагая, что они дѣйствительны, были оба больше 2?

27. Рѣшить ур-ніе $\frac{ax}{x - a} + x = b$ и изслѣдовать его корни. Что нужно, чтобы оба корня были больше $10a$?

Изслѣдовать корни слѣдующихъ ур-ній при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

28. $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 3(\lambda - 3) = 0.$

29. $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0.$

30. $\lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0.$

31. Опредѣлить предѣлы для h, подъ условіемъ, чтобы для всякаго дѣйствительнаго x удовлетворялось неравенство

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}.$$

Рѣшить слѣдующія дробныя неравенства:

32. $x+\frac{1}{x}>1.$

33. $\frac{ax-4b}{2bx+3a}>5.$

34. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-7x+12}<\frac{1}{x^2-4x+3}.$

35. $\frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+15}<2.$

36. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+12}>0.$

37. $\frac{x^2-1}{5x^2+4x}<0.$

38. $3+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2x+1}.$

39. $\frac{2x-25}{2x^2+4x-6}+\frac{2x+11}{2x^2-2}>\frac{1}{x+3}.$

40. $\frac{5x^2+3x}{8x-5}>10.$

41. $\frac{x^2-7x+12}{x^2+5x+6}<3.$

42. $\frac{x^2-12x+35}{(x+3)(x^2+5x+4)}>0.$

43. $\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2-x+1)}<0.$

44. Рѣшить неравенство $\frac{(x-a)(x-c)}{(x-b)(x-d)}<0$, полагая, что $a<b<c<d$.

45. $\frac{(x-1)(x-3)^2(x^2+1)}{(x+5)(x^2+x+3)(x-4)}>0.$

46. $\frac{x^3+3}{x^2-4}>\frac{2(x-1)}{x^2(x^2-4)}.$

Рѣшить ирраціональныя неравенства:

47. $\frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{x}-2)}{x^2+4x+3}>0.$

48. $\sqrt{\frac{2x^2-3}{2}}>x+5.$

49. $x^2<2a\sqrt{2x^2-a^2}$, полагая $a>0$.

50. $4(a^2-x^2)-a\sqrt{a^2-x^2}-2a^2>0.$

51. $\sqrt{a^2+5ax+4x^2}<2x+3a.$

52. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}<\sqrt{2}.$

53. $\sqrt{a+\frac{1}{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{a}}-2\sqrt{2}>0.$

54. $\frac{\sqrt{a^4+2x^4}}{3a-x}<3a+x.$

55. $\sqrt{\frac{6x-5a}{x+2a}}>2a+1.$

56. $\frac{\sqrt{x-a}}{x+a}<\frac{\sqrt{x+a}}{x-2a}.$

ГЛАВА XXXIV.

Раціональныя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ. — Биквадратное ур-ніе; изслѣдованіе его корней. — Разложеніе биквадратнаго тринома на множители первой и второй степени.—Преобразованіе сложныхъ радикаловъ: $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, $\sqrt[4]{A+\sqrt{B}}$ и т. п.

529. Рѣшеніе биквадратнаго уравненія. — *Уравненіе четвертой степени называется биквадратнымъ, когда оно содержитъ только четныя степени неизвѣстнаго.* Слѣдовательно, общая форма его есть

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Его рѣшеніе приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ за неизвестное x^2, положивъ

$$x^2=y \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Ур-ніе (1) приметъ видъ

$$ay^2+by+c=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Рѣшивъ его, найдемъ два корня

$$y'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad y''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Подставляя въ ур-ніе (2) вмѣсто y сначала y', потомъ y'', находимъ

$$x^2=y', \qquad x^2=y''$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{y'}, \qquad x=\pm\sqrt{y''},$$

или

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \qquad x=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Итакъ, биквадратное ур-ніе имѣетъ четыре корня, попарно равные и противоположные по знаку.

530. Изслѣдованіе корней. Мы знаемъ, что корни уравненія $ax^4+bx^2+c=0$ суть корни уравненія

$$x^2=y,$$

въ которомъ y означаетъ одинъ изъ корней уравненія

$$ay^2+by+c=0.$$

Слѣдоватенльо: *всякому дѣйствительному и положительному значенію* у соотвѣтствуютъ *два дѣйствительныя значенія* x, *равныя по величинѣ и противоположныя по знаку*; *каждому дѣйствительному и отрицательному значенію* у сооовѣтствуютъ *два значенія* x *мнимыя сопряженныя*; наконецъ, *каждое мнимое значеніе* у даетъ *два мнимыя значенія для* x.

Итакъ, приходимъ къ слѣдующему изслѣдованію:

I. $b^2-4ac>0$. Корни ур-нія $ay^2+by+c=0$ дѣйствительные неравные: одного знака, если ихъ произведеніе $\frac{c}{a}$ положительно, и съ противоположными знаками, если $\frac{c}{a}$ отрицательно.

Въ первомъ случаѣ $\left(\frac{c}{a} > 0\right)$, оба корня положительны, если ихъ сумма $-\frac{b}{a}$ положительна, и отрицательны, если $-\frac{b}{a}$ отрицательно. Если оба значенія y положительны, всѣ четыре значенія x дѣйствительны; если оба значенія y отрицательны, всѣ четыре значенія x мнимы. Во второмъ случаѣ $\left(\frac{c}{a} < 0\right)$ два значенія y противоположны по знаку, поэтому два значенія x дѣйствительны, два другія мнимы.

II. $b^2 - 4ac = 0$. Корни уравненія $ay^2 + by + c = 0$ — дѣйствительные равные: ихъ общая величина $= -\frac{b}{2a}$.

Слѣд. биквадратное ур. имѣетъ четыре корня попарно равные:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}};$$

они дѣйствительны, если $\frac{b}{a} < 0$, и мнимы, если $\frac{b}{a} > 0$.

III. $b^2 - 4ac < 0$. Корни ур-нія $ay^2 + by + c = 0$ — мнимые, слѣд. и всѣ четыре корня биквадратнаго ур-нія мнимые, ибо квадратный корень изъ $p + qi$ есть мнимое выраженіе того же вида.

Результаты этого изслѣдованія можно резюмировать въ видѣ слѣдующей таблицы:

$b^2 - 4ac > 0$	$\frac{c}{a} > 0$	$\frac{b}{a} < 0$ . . .	4 корня дѣйствительные, попарно равные и противоположные по знаку.
		$\frac{b}{a} > 0$ . . .	4 корня мнимые.
	$\frac{c}{a} < 0$	. . . .	2 корня дѣйствительные, равные и противоположные по знаку; 2 корня мнимые.
$b^2 - 4ac = 0$	$\frac{b}{a} < 0$	. . . . .	4 корня дѣйствительные, попарно равные
	$\frac{b}{a} > 0$	. . . . .	4 корня мнимые.
$b^2 - 4ac < 0$	. . . .		4 корня мнимые.

Примѣчаніе. Отсюда видно, что нужны *три* условія для того, чтобы всѣ четыре корня биквадратнаго ур-нія были дѣйствительны; именно:

$$b^2 - 4ac \geqq 0, \quad \frac{c}{a} > 0, \quad \frac{b}{a} < 0;$$

и *одно* условіе, чтобы два корня были дѣйствительны, а два мнимы; именно:

$$\frac{c}{a} < 0.$$

531. Примѣры. — I. *Рѣшить уравненіе* $64x^4 - 244x^2 + 225 = 0$.

Положивъ $x^2=y$, находимъ квадратное ур-нie

$$64y^2-244y+225=0;$$

въ немъ: $b'^2-ac=122^2-64\times 225=484>0$; $\frac{225}{64}>0$; $-\frac{244}{64}<0$;

слѣд. оба значенія y — дѣйствительныя, неравныя и положительныя, а потому биквадратное ур-нie имѣетъ всѣ *четыре корня дѣйствительные*. Находимъ:

$$y=\frac{122\pm\sqrt{122^2-64\times 225}}{64}=\frac{122\pm 22}{64};$$

$$y'=\frac{9}{4}\ ,\quad y''=\frac{25}{16};$$

откуда: $x^{I}=+\frac{3}{2}$, $x^{II}=-\frac{3}{2}$, $x^{III}=+\frac{5}{4}$, $x^{IV}=-\frac{5}{4}$.

II. — *Рѣшить уравненie* $5x^4+12x^2+4=0$.

Положивъ $x^2=y$, находимъ ур-нie $5y^2+12y+4=0$; въ немъ $b'^2-ac=36-5\times 4=16>0$; $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}>0$; $\frac{b}{a}=\frac{12}{5}>0$. Слѣд. корни его дѣйствительные, неравные, оба отрицательные; а потому данное ур. имѣетъ всѣ *четыре корня мнимые*. Находимъ

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{5}=\frac{-6\pm 4}{5};$$

$$y'=-\frac{2}{5},\quad y''=-2.$$

Слѣд. $x^{I}=+\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot i$, $x^{II}=-\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot i$, $x^{III}=+\sqrt{2}.i$, $x^{IV}=-\sqrt{2}.i$.

III. — *Рѣшить ур-нie* $3x^4-26x^2-9=0$.

Положивъ $x^2=y$, находимъ ур-нie $3y^2-26y-9=0$. Въ немъ: $b'^2-ac=13^2+3\ .\ 9=169+27=196>0$; $\frac{c}{a}=-3<0$; $\frac{b}{a}=-\frac{26}{3}<0$; слѣд. оно имѣетъ корни дѣйствительные неравные, съ противоположными знаками, а потому предложенное ур-нie имѣетъ *два дѣйствительныхъ корня* и *два мнимыхъ*.

$$y=\frac{13\pm\sqrt{196}}{3}=\frac{13\pm 14}{3};$$

откуда $y'=+9$; $y''=-\frac{1}{3}$;

слѣд. $x^{I}=+3$; $x^{II}=-3$; $x^{III}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot i$; $x^{IV}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot i$.

IV. — *Рѣшить уравненie* $x^4-10x^2+61=0$.

Положивъ $x^2=y$, получимъ ур-нie $y^2-10y+61=0$, въ которомъ $b'^2-ac=25-61=-36$; слѣд. оба значенія y мнимы, и потому данное ур-нie имѣетъ *четыре мнимыхъ корня*. Находимъ

$$y'=5+12i\ ,\quad y''=5-12i.$$

Слѣд. $x=\pm\sqrt{5\pm 12i}$.

Преобразовавъ это выраженіе по способу § 440, найдемъ:

$$x^{I}=3+2i\,,\quad x^{II}=3-2i\,,\quad x^{III}=-3-2i\,,\quad x^{IV}=-3+2i.$$

V. — *Рѣшить уравненіе* $x^4-10x^2+28=0$.

Положивъ $x^2=y$, имѣемъ ур-ніе $y^2-10y+28=0$, въ которомъ $b'^2-ac=25-28=-3<0$; слѣд. корни его мнимые, именно

$$y=5\pm\sqrt{3}.\,i.$$

Слѣд. четыре мнимые корня предложеннаго заключаются въ формулѣ

$$x=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{3}.\,i}.$$

Примѣняя къ ней преобразованіе, указанное въ § 440, найдемъ:

$$\pm\sqrt{5\pm\sqrt{3}.i}=\pm\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}}.\,i\right].$$

Такимъ образомъ:

$$x^{I}=\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}}\times i\ ;\quad x^{II}=-\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}-\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}}\times i;$$

$$x^{III}=\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}-\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}}\times i\ ;\quad x^{IV}=-\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}}\times i.$$

532. *Приложеніе. — Доказать, что уравненіе* $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$ *имѣетъ всѣ четыре корня дѣйствительные, каковы бы ни были дѣйствительныя количества* a *и* b.

Помноживъ обѣ части на $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$, дадимъ уравненію цѣлый видъ

$$x^2(x^2-b^2)+x^2(x^2-a^2)-4(x^2-a^2)(x^2-b^2)=0.$$

Положивъ $x^2=y$, получаемъ квадратное относительно y ур.

$$y(y-b^2)+y(y-a^2)-4(y-a^2)(y-b^2)=0.$$

Подставляя въ первую часть вмѣсто y сперва a^2, потомъ b^2, замѣчаемъ, что результы этихъ подстановокъ: $a^2(a^2-b^2)$ и $b^2(b^2-a^2)$ имѣютъ противоположные знаки; слѣд. корни относительно y — дѣйствительные и неравные, и одинъ изъ нихъ содержится между a^2 и b^2. Далѣе: коэффиціентъ при y^2 отрицателенъ $(=-2)$; подстановка-же 0 на-мѣсто y даетъ $-4a^2b^2$; слѣд. 0 находится внѣ корней, и слѣд. меньше обоихъ корней, ибо мы уже знаемъ, что одинъ изъ корней положителенъ. Итакъ, оба корня: y' и y'' дѣйствительны и положительны, каковы бы ни были a и b, а слѣд. всѣ четыре корня даннаго ур-нія дѣйствительны.

Къ этому заключенію можно придти и иначе. Ур-ніе относительно y приводится къ виду:

$$2y^2-3(a^2+b^2)y+4a^2b^2=0.$$

Подрадикальное количество формулы корней есть

$$9(a^2+b^2)^2-32a^2b^2,\quad \text{или}\quad 9a^4-14a^2b^2+9b^4.$$

Но этотъ квадратный относительно a^2 триномъ имѣетъ корни мнимые, ибо $49b^4-81b^4<0$, слѣд. при всякихъ a и b знакъ его одинаковъ съ знакомъ 9,

т. е. положителенъ. Поэтому оба значенія y дѣйствительны. Ихъ произведеніе $2a^2b^2$ показываетъ, что они одного знака, а сумма ихъ $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$ показываетъ, что оба они положительны. Слѣд. четыре корня предложеннаго ур-нія всегда дѣйствительны.

533. Теорема. — *Сумма корней биквадратнаго ур-нія равна нулю, произведеніе ихъ равно* $\frac{c}{a}$, *а сумма квадратовъ ихъ равна* $-\frac{2b}{a}$.

Въ самомъ дѣлѣ, четыре корня x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV} попарно равны и противоположны по знаку, слѣд. сумма ихъ $=0$. — Во вторыхъ, $(+\sqrt{y'})^2+(-\sqrt{y'})^2+(+\sqrt{y''})^2+(-\sqrt{y''})^2=2(y'+y'')$; но $y'+y''$, какъ сумма корней квадр. ур-нія $ay^2+by+c=0$, равна $-\frac{b}{a}$, слѣд. сумма квадратовъ корней даннаго ур-нія $=-\frac{2b}{a}$. Наконецъ, произведеніе $(+\sqrt{y'})(-\sqrt{y'})(+\sqrt{y''})(-\sqrt{y''})=y'y''$ $=\frac{c}{a}$.

534. Разложеніе биквадратнаго тринома ax^4+bx^2+c на множители первой степени.

Триномъ ax^4+bx^2+c, обращаясь въ ноль при каждомъ изъ четырехъ своихъ корней x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, дѣлится на каждый изъ биномовъ $x-x^{\text{I}}$, $x-x^{\text{II}}$, $x-x^{\text{III}}$, $x-x^{\text{IV}}$, а потому и на ихъ произведеніе; такъ какъ дѣлимое и дѣлитель — одинаковой степени относительно x, то частное будетъ нулевой степени, и потому приводится къ частному отъ раздѣленія высшаго члена ax^4 дѣлимаго на высшій членъ x^4 дѣлителя. Итакъ:

$$ax^4+bx^2+c=a(x-x^{\text{I}})(x-x^{\text{II}})(x-x^{\text{III}})(x-x^{\text{IV}}).$$

Примѣры. — I. *Разложить триномъ* $5x^4-50x^2+45$.

Корни его суть: ± 3, ± 1; слѣд.

$$5x^4-50x^2+45=5(x-3)(x+3)(x-1)(x+1).$$

II. *Разложить триномъ* $2x^4+7x^2+6$.

Корни его суть: $\pm\sqrt{2}.\,i$, $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i$. Слѣд.

$$2x^4+7x^2+6=2(x-\sqrt{2}.\,i)(x+\sqrt{2}.\,i)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i\right).$$

III. *Разложить триномъ* $-x^4+10x^2-169$.

Корни его суть: $3\pm 2i$, $-3\pm 2i$. Слѣд.

$$-x^4+10x^2-169=-(x-3-2i)(x-3+2i)(x+3-2i)(x+3+2i).$$

535. Разложеніе биквадратнаго тринома съ дѣйствительными коэффиціентами на дѣйствительные квадратные множители.

Пусть триномъ ax^4+bx^2+c имѣетъ корни $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$; въ такомъ случаѣ его можно представить подъ видами:

$$ax^4+bx^2+c=a[(x-\alpha)(x+\alpha)][(x-\beta)(x+\beta)] \quad \ldots\ldots (1)$$
$$=a[(x-\alpha)(x-\beta)][(x+\alpha)(x+\beta)] \quad \ldots\ldots (2)$$
$$=a[(x-\alpha)(x+\beta)][(x+\alpha)(x-\beta)] \quad \ldots\ldots (3)$$

Когда четыре корня $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ дѣйствительны, всѣ три разложенія дадутъ дѣйствительные квадратные множители.

Если два изъ этихъ корней мнимы, то квадратные множители будутъ дѣйствительны только въ одномъ изъ этихъ разложеній, именно въ томъ, гдѣ соединены два сопряженные корня для составленія одного и того же множителя.

Наконецъ, если четыре корня мнимы, то опять существуетъ только одно разложеніе на дѣйствительные квадратные множители, то именно, въ которомъ каждый изъ квадратныхъ множителей происходитъ отъ сочетанія сопряженныхъ корней. Отсюда

Теорема. — *Биквадратный триномъ съ дѣйствительными коэффиціентами всегда можно разложить, по крайней мѣрѣ, однимъ способомъ, на произведеніе дѣйствительныхъ квадратныхъ множителей.*

Чтобы получить это разложеніе, нужно вычислить корни тринома; это вычисленіе усложняется вспомогательнымъ вычисленіемъ въ томъ случаѣ, когда всѣ четыре корня мнимы, т. е. когда $b^2-4ac<0$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ значительно быстрѣе найдемъ требуемое разложеніе слѣдующимъ пріемомъ. Пусть имѣемъ триномъ

$$y=a\left(x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}\right),$$

въ которомъ предполагается $b^2-4ac<0$. Разсматривая x^4 и $\frac{c}{a}$ какъ крайніе члены квадрата, дополнимъ его, прибавляя и вычитая $2x^2\sqrt{\frac{c}{a}}$; найдемъ

$$y=a\left[\left(x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2-\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)x^2\right].$$

Но какъ $b^2-4ac<0$, то $4ac>0$, слѣд. и $\frac{c}{a}>0$, а потому $\sqrt{\frac{c}{a}}$ — *количество дѣйствительное.* Далѣе, раздѣливъ обѣ части неравенства $b^2-4ac<0$ на положительное a^2, находимъ

$$4\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}>0,\quad \text{или}\quad \left(2\sqrt{\frac{c}{a}}+\frac{b}{a}\right)\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)>0.$$

Но оба эти множителя не могутъ быть отрицательными, ибо ихъ сумма, равная $4\sqrt{\frac{c}{a}}$, положительна, слѣд. оба они положительны, и потому

$$2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}>0.$$

Итакъ, триномъ можно представить въ видѣ произведенія двухъ дѣйствительныхъ факторовъ:

$$y=a\left[x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}+x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}\right]\left[x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}-x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}\right].$$

Примѣръ. *Разложить на два дѣйствительные множителя триномъ* $y=x^4-10x^2+28$.

Имѣемъ:

$$y = (x^2 + 2\sqrt{7})^2 - (4\sqrt{7} + 10)x^2$$
$$= (x^2 + x\sqrt{4\sqrt{7}+10} + 2\sqrt{7})(x^2 - x\sqrt{4\sqrt{7}+10} + 2\sqrt{7}).$$

536. Преобразованіе сложнаго радикала $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. — Корни биквадратнаго ур-нія выражаются формулою вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$; и когда B не есть точный квадратъ, т. е. $\sqrt{B}$ несоизмѣримъ, формула эта весьма невыгодна для приближеннаго вычисленія. Попытаемся, если окажется возможно, замѣнить выраженіе этого вида другимъ, которое не содержало бы извлеченія корня изъ несоизмѣримаго числа. Но предварительно докажемъ слѣдующую лемму.

537, Лемма. — *Если a, b, a' и b' суть числа соизмѣримыя, а $\sqrt{b}$ и $\sqrt{b'}$ несоизмѣримы, то равенство*

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

возможно только тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ выводимъ

$$\sqrt{b'} = (a - a') + \sqrt{b},$$

или, возвышая обѣ части въ квадратъ:

$$b' = (a - a')^2 + 2(a - a')\sqrt{b} + b,$$

или
$$(b' - b) - (a - a')^2 = 2(a - a')\sqrt{b}.$$

Допуская, что a не равно a', мы нашли бы отсюда нелѣпый выводъ

$$\sqrt{b} = \frac{(b' - b) - (a - a')^2}{2(a - a')},$$

т. е. что несоизмѣримое число равно соизмѣримому. Итакъ $a = a'$, а тогда изъ (1) слѣдуетъ, что и $b = b'$.

Зная это, попытаемся найти такія два соизмѣримыя числа x и y, которыя удовлетворяли бы равенству

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ A и B положительныя соизмѣримыя числа, а $\sqrt{B}$ несоизмѣримъ. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, найдемъ

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$\sqrt{xy}$ долженъ быть несоизмѣримъ; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное и написавъ ур-ніе (2) въ видѣ

$$\sqrt{B} = x + y - A + 2\sqrt{xy},$$

нашли бы, что несоизмѣримое число равно соизмѣримому. Примѣняя къ ур-нію (2) предыдущую лемму, находимъ:

$$x + y = A \text{ и } xy = \frac{B}{4};$$

и это — единственно возможное условіе существованія равенства (2) при x и y

соизмѣримыхъ. Послѣднія уравненія показываютъ, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$u^2 - Au + \frac{B}{4} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Видимъ, что преобразованіе $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ въ выраженіе $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, гдѣ x и y были бы соизмѣримы, возможно только тогда, когда $A^2 - B$ *есть точный квадратъ*; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, положивъ $A^2 - B = K^2$, гдѣ K — соизмѣримо, имѣемъ:

$$x = \frac{A + K}{2} \text{ и } y = \frac{A - K}{2}.$$

И такъ, если это условіе выполнено, искомое преобразованіе возможно и выражается тождествомъ

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

и это — единственно возможная форма преобразованія въ разсматриваемомъ случаѣ, ибо ур-ніе (2) распалось на два ур-нія съ 2 неизвѣстными, вслѣдствіе чего и получились опредѣленныя рѣшенія для x и y.

Желая подобнымъ же образомъ преобразовать $\sqrt{A - \sqrt{B}}$, не можемъ положить $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ибо это повело бы къ нелѣпому слѣдствію:

$$-\sqrt{B} = 2\sqrt{xy};$$

но можно положить равенство

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Но если бы мы искали два количества x и y, удовлетворяющія ур-нію

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y},$$

не дѣлая ограниченія относительно соизмѣримости x и y, то задача, очевидно, была бы неопредѣленна. Возвышая обѣ части въ квадратъ, мы нашли бы уравненіе

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy},$$

которому *можно* удовлетворить, полагая

$$x + y = A, \ xy = \frac{B}{4},$$

откуда нашли бы прежнюю форму преобразованія

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

но можно бы было удовлетворить ур-нію *и иначе*; что дало бы *другія* значенія для x и y; рѣшеніе (1) было бы однимъ изъ безчисленнаго множества рѣшеній неопредѣленнаго ур-нія $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

538. *Примѣчаніе.* — Опредѣляя x и y, удовлетворяющія ур-нію

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

мы должны были возвысить это ур. въ квадратъ и рѣшать ур-ніе

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Но ур-ніе (2) могло бы получиться и изъ ур-нія $\sqrt{A+\sqrt{B}}=-\sqrt{x}-\sqrt{y}$; такъ-что нужно удостовѣриться, что найденныя значенія для x и y дѣйствительно удовлетворяютъ преобразованію $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

И въ самомъ дѣлѣ преобразованіе $\sqrt{A+\sqrt{B}}=-\sqrt{x}-\sqrt{y}$ не можетъ имѣть мѣста при дѣйствительныхъ x и y; слѣд. система (3) § 537 въ самомъ дѣлѣ отвѣчаетъ искомому преобразованію.

Примѣры. — I. *Преобразовать* $\sqrt{6\pm\sqrt{11}}$.

Здѣсь $A=6$, $B=11$; слѣд. $A^2-B=25=5^2$; а потому

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{6+5}{2}}+\sqrt{\frac{6-5}{2}}=\sqrt{\frac{11}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}+1).$$

$$\sqrt{6-\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}-1).$$

II. *Преобразовать* $\sqrt{17\pm2\sqrt{70}}$.

Въ данномъ случаѣ: $A=17$; подводя 2 подъ знакъ корня, имѣемъ $2\sqrt{70}=\sqrt{4.70}=\sqrt{280}$, слѣд. $B=280$; $A^2-B=17^2-280=9=3^2$. Такимъ образомъ:

$$\sqrt{17+2\sqrt{70}}=\sqrt{\frac{17+3}{2}}+\sqrt{\frac{17-3}{2}}=\sqrt{10}+\sqrt{7}; \text{ и}$$

$$\sqrt{17-2\sqrt{70}}=\sqrt{10}-\sqrt{7}.$$

III. *Преобразовать* $\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4m^4}}{2}}$.

Это выраженіе можно представить въ видѣ $\sqrt{\frac{a^2}{2}\pm\sqrt{\frac{a^4}{4}-m^4}}$.

Здѣсь $A=\frac{a^2}{2}$, $B=\frac{a^4}{4}-m^4$; $A^2-B=\frac{a^4}{4}-\left(\frac{a^4}{4}-m^4\right)=m^4$; слѣд.

$$\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4m^4}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{a^2}{2}+m^2}{2}}\pm\sqrt{\frac{\frac{a^2}{2}-m^2}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2+2m^2}\pm\sqrt{a^2-2m^2}\right].$$

539. *Приложенія.* — I. *Опредѣлить условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты биквадратнаго уравненія* $ax^4+bx^2+c=0$, *для того чтобы его корни можно было выразить въ видѣ алгебраической суммы двухъ простыхъ радикаловъ.*

Корни биквадратнаго ур-нія можно представить въ видѣ

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}};$$

слѣд. $A = -\frac{b}{2a}$, $B = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, и слѣд. $A^2 - B = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Заключаемъ, что когда $\frac{c}{a}$ есть точный квадратъ, преобразованіе возможно, и получается формула

$$x = \pm\left[\sqrt{-\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}} \pm \sqrt{-\frac{b}{4a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}}\right].$$

Пусть, напр., дано ур-ніе $18x^4 - 45x^2 + 2 = 0$. Здѣсь $\frac{c}{a} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; указанное условіе имѣетъ мѣсто, и слѣд. корни можно представить въ видѣ

$$x = \pm\left[\sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}}\right] = \pm\left[\sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{6}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{6}}\right]$$

$$= \pm\frac{\sqrt{57} \pm \sqrt{33}}{6\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{57} \pm \sqrt{33}).$$

Еще примѣръ. Въ уравненіи $ay^4 + 2(a-2b)y^2 + a = 0$ отношеніе 3-го коэффиціента къ 1-му, равное $\frac{a}{a}$ или 1, есть точный квадратъ, и слѣд. корни можно преобразовать въ сумму простыхъ радикаловъ; преобразованіе дастъ

$$y = \pm\sqrt{b} \pm \sqrt{b-a}.$$

II. Въ геометріи доказывается, что если a означаетъ сторону правильнаго, вписаннагѡ въ кругъ радіуса R, многоугольника, а b — сторону прав. впис. многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, то

$$b = \sqrt{2R^2 - \sqrt{R^2(4R^2 - a^2)}}.$$

Это выраженіе можно превратить въ сумму простыхъ радикаловъ; въ самомъ дѣлѣ, $A = 2R^2$, $B = R^2(4R^2 - a^2)$, слѣд. $A^2 - B = a^2R^2$, и потому

$$b = \sqrt{\frac{2R^2 + aR}{2}} - \sqrt{\frac{2R^2 - aR}{2}} = \sqrt{R\left(R + \frac{a}{2}\right)} - \sqrt{R\left(R - \frac{a}{2}\right)}.$$

Пусть, напр., $a = R$; первый многоугольникъ будетъ правильный шестиугольникъ, второй — правильный двѣнадцатиугольникъ; получимъ

$$b = R\sqrt{\frac{3}{2}} - R\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}.$$

540. Въ заключеніе этой главы рѣшимъ еще два вопроса, относящіеся къ преобразованію квадратнаго и биквадратнаго корней.

Первый вопросъ. — *Представить выраженіе*

$$U = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

въ видѣ произведенія двухъ сомножителей вида $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. — *Доказать, что*

преобразованіе возможно только при условіи, когда $\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}=\mathfrak{bc}$, *и что оно выгодно только тогда, когда* $\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}$ *суть точные квадраты.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{u}+\sqrt{v}),$$

по возвышеніи въ квадратъ, даетъ

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(x+y+2\sqrt{xy})(u+v+2\sqrt{uv}).$$

Этому ур-нію удовлетворимъ, положивъ

$$a=(x+y)(u+v);\quad b=4(x+y)^2uv;\quad c=4(u+v)^2xy;\quad d=16xyuv.$$

Эти ур-нія, какъ легко видѣть, несовмѣстны, если не имѣется соотношенія $a^2d=bc$. Когда это условіе удовлетворено, система неопредѣленна. Эта неопредѣленность объясняется при помощи тождества

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{u}+\sqrt{v})=(\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\lambda y})\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda}}+\sqrt{\frac{v}{\lambda}}\right),$$

имѣющаго мѣсто при всякомъ λ; этимъ доказывается, что разложеніе можетъ быть произведено безчисленнымъ количествомъ способовъ. Неопредѣленность эта даетъ возможность допустить между двумя количествами произвольное соотношеніе. Положимъ, напр., $x+y=1$. Тогда первыя два ур-нія обратятся въ

$$u+v=a,\qquad uv=\frac{b}{4},$$

откуда $$u=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b};\qquad v=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}.$$

Внося эти величины въ третье, имѣемъ xy; зная, кромѣ того, что $x+y=1$, найдемъ

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\sqrt{a^2-c};\qquad y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\sqrt{a^2-c}.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что если a^2-b и a^2-c будутъ точные квадраты, то u, v, x и y будутъ раціональны, и слѣд. преобразованіе выгодно, ибо оно представляетъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ каждый есть сумма простыхъ радикаловъ.

Такъ, если $\mathfrak{U}=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{6}}$, то $a=1$, $b=\frac{3}{4}$, $c=\frac{8}{9}$, $d=\frac{6}{9}$; условіе $a^2d=bc$ удовлетворено; $a^2-b=\frac{1}{4}$, $a^2-c=\frac{1}{9}$.

Слѣд. $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$; $u=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; $v=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Итакъ $$\mathfrak{U}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+3)}{6}.$$

Второй вопросъ. — *Полагая, что* B *не есть точный квадратъ, представить*

$$u=\sqrt[4]{A+\sqrt{B}}$$

подъ видомъ суммы двухъ квадратныхъ корней: $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. — *Указать условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы преобразованіе было выгодно, что можетъ имѣть мѣсто въ двухъ различныхъ случаяхъ: когда* x *и* y *имѣютъ видъ* $\alpha+\sqrt{\beta}$; *когда эти количества соизмѣримы.*

Положивъ
$$\sqrt[4]{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$
и возвысивъ въ четвертую степень, получимъ
$$A+\sqrt{B}=(x+y)^2+4xy+4(x+y)\sqrt{xy},$$
откуда
$$(x+y)^2+4xy=A, \qquad 16xy(x+y)^2=B.$$

Отсюда видно, что $(x+y)^2$ и $4xy$ суть корни ур-нія
$$t^2-At+\frac{B}{4}=0;$$
и какъ разность $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$, т. е. существенно положительна, т. к. x и y предполагаются дѣйствительными, мы должны большій корень ур-нія въ t принять за $(x+y)^2$, меньшій за $4xy$. Такимъ образомъ
$$(x+y)^2=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}, \qquad 4xy=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2};$$
или, вычитая второй результатъ изъ перваго
$$(x-y)^2=\sqrt{A^2-B}.$$

Не трудно теперь найти x и y.

Чтобы разсматриваемое преобразованіе было выгодно, нужно чтобы x или y не содержали биквадратныхъ радикаловъ; сл. необходимо, чтобы $A^2-B=K^2$, гдѣ K—число раціональное. Тогда
$$(x+y)^2=\frac{A+K}{2}, \quad (x-y)^2=K.$$

Въ этомъ случаѣ x и y имѣютъ, вообще, видъ суммы двухъ простыхъ радикаловъ. Но если одно изъ чиселъ $\frac{A+K}{2}$ или K будетъ точнымъ квадратомъ, выраженіе представится въ видѣ суммы двухъ квадратныхъ корней изъ выраженій вида $\alpha+\sqrt{\beta}$. Если, наконецъ, оба числа: $\frac{A+K}{2}$ и K — точные квадраты, выраженіе приметъ видъ двухъ простыхъ радикаловъ.

Примѣры I. $u=\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$; найдемъ: $A=6$, $K=4$; слѣд.
$$(x+y)^2=5; \quad (x-y)^2=4.$$
Потому
$$U=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.$$

II. $U=\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$; найдемъ: $A=7$; $K=1$; слѣд.
$$(x+y)^2=4; \quad (x-y)^2=1.$$
Отсюда
$$U=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

541. Задачи.

1. Рѣшить биквадратныя ур-нія

$$x^4-13x^2+36=0;\quad x^4-2x^2-15=0;\quad 4x^4+12x^2+9=0;\quad 7x^4-2x^2+1=0;$$

$$x^4-74x^2+1225=0;\quad 5x^4+7x^2-6732=0;\quad x^4-25x^2+144=0;$$

$$\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+2}+\frac{21}{x-3}=\frac{5}{x+1}+\frac{4}{x-2}+\frac{21}{x+3}.\quad 3x^4-7x^2+20=0;$$

$$15x^4-8x^2+10=0.$$

2. Составить биквадратное ур-ніе съ соизмѣримыми коэффиціентами, однимъ изъ корней котораго былъ бы $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

3. Составить биквадратное ур-ніе съ дѣйствительными коэффиціентами, имѣющее корень $5-2i$.

4. Какимъ образомъ выбрать λ, чтобы уравненіе

$$(\lambda-2)x^4-2(\lambda+3)x^2+(\lambda-1)=0$$

имѣло всѣ 4 корня дѣйствительные, или 2 корня дѣйствительные и 2 мнимые, или всѣ 4 корня мнимые?

5. Между какими предѣлами должно заключаться λ, чтобы уравненіе $x^4-2(\lambda-5)x^2+\lambda^2+10\lambda-23=0$ имѣло 0, или 2, или 4 дѣйствительныхъ корня?

6. Разложить всѣми способами на два дѣйствительные квадратные множителя каждый изъ триномовъ:

$$x^4-13x^2+36;\quad x^4+5x^2-36;\quad x^4+6x^2+8;\quad 3x^4-4x^2+15.$$

7. Преобразовать сложные радикалы въ сумму простыхъ:

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}};\quad \sqrt{7-4\sqrt{3}};\quad \sqrt{52+30\sqrt{3}};\quad \sqrt{76-32\sqrt{3}};\quad \sqrt{18\pm8\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{49\pm12\sqrt{13}};\quad \sqrt{75-12\sqrt{21}};\quad \sqrt{39\pm6\sqrt{42}};\quad \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}};$$

$$\sqrt{ab-2a\sqrt{ab-a^2}};\quad \sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}};\quad \sqrt{2+2(1-x)\sqrt{1+2x-x^2}};$$

$$\sqrt{ab+c^2+\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}};\quad \sqrt{(a+b)^2\pm(a-b)\sqrt{a^2+6ab+b^2}};$$

$$\sqrt{a^2-ab+\frac{b^2}{4}+2\sqrt{a^3b-2a^2b^2+\frac{ab^3}{4}}};\quad \sqrt{3a^2+2b^2-\sqrt{12a^3b+2a^2b^2+4ab^3+3b^4}};$$

$$\sqrt{9+(12-8x)\sqrt{3x-x^2}};\quad \sqrt{16x^4+y^6+\sqrt{32x^4(8x^4-y^6)+y^{12}}};\quad \sqrt[4]{14+6\sqrt{5}};$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{97-56\sqrt{3}}}.$$

8, Доказать, что если b не есть точный квадратъ, выраженіе $\sqrt{a+\sqrt[4]{b}}$ не м. б. приведено къ виду $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, гдѣ x и y соизмѣримы.

9. Рѣшить слѣдующія биквадратныя ур-нія и представить ихъ корни, гдѣ возможно, въ видѣ двухъ независимыхъ радикаловъ:

$$175x^4-42x^2+7=0;\quad 8x^4-25x^2+18=0;\quad x^4+4abx^2=(a^2-b^2)^2;$$

$$4m^2=(a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b);$$

$$(2{,}5-x)^4+0{,}5625=2{,}5(2{,}5-x)^2;\quad ab^2\,.\,x^4-2(a^5+b^5)x^2+a(a^3+b^3)^2=0;$$

$$27(a-b)^3x^4-2(a^2-b^2)(a^3+b^3)x^2+3(a^2-b^2)(a+b)^5=0;$$

$$4x^4(b^2-a^2)-4a^2b^2x^2+a^2b^2(a^2-4b^2)=0;\quad x^4-2(bc+2a^2)x^2+b^2c^2=0;$$

$$ax^4-ax^2-(1+x^2)+a=0\ \text{(случай } a=2).$$

$$(x^2-25)(x^2-81)+2x^2(x^2-81)+x^2=150.$$

$$\frac{A^2}{x^2-a^2}+\frac{B^2}{x^2-b^2}+\frac{C^2}{x^2-c^2}=0. \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x+b}=0.$$

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-11}+\frac{1}{x+11}=0.$$

$$4x^4-4(1+n^2)a^2.x^2+n^2.a^4=0.$$

$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=n(n-1)$; $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=n+1$ и доказать, что корни этого ур-нія всегда дѣйствительны.

$$(x^2-1)(x^2-2)+(x^2-3)(x^2-4)=x^4+5.$$

10. Рѣшить неравенства:

$x^4-16x^2+63>0$; $x^4-12x^2+32<0$; $x^4-43x^2+225>0$; $56-5x^2-x^4<0$.

11. Рѣшить неравенства:

$$\frac{3x^4-2x^2+22}{x^4-12x^2+35} \gtrless 2 \ ; \quad \frac{3x^4-4x^2+16}{x^4-21x^2+80}-4 \gtrless 0.$$

12. Найти сумму квадратовъ, кубовъ, сумму четвертыхъ степеней корней уравненія $ax^4+bx^2+c=0$.

Доказать, что если сумму n-хъ степеней корней этого ур. обозначить знакомъ S_n, то имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$aS_n+bS_{n-2}+cS_{n-4}=0.$$

13. Доказать, что если a, b, c и d суть корни биквадратнаго уравненія $x^4+px^2+q=0$, то имѣютъ мѣсто соотношенія:

$a+b+c+d=0$; $ab+ac+ad+bc+bd+cd=p$; $abc+abd+acd+bcd=0$;

$$abcd=q.$$

14. Сократить дробь $\frac{x^4-34x^2+225}{x^4-25x^2+144}$.

15. При какихъ значеніяхъ m ур-ніе $x^4-x^2-m=0$ имѣетъ всѣ 4 корня дѣйствительные?

16. Между какими предѣлами должно измѣнять x для того, чтобы ур-ніе $[(x-a)^2+y^2]^2=16axy^2$, рѣшенное относительно y, имѣло всѣ корни дѣйствительные? (Предполагается $a>0$),

17. Изслѣдовать корни каждаго изъ уравненій:

$$(\lambda-2)x^4+4(\lambda+3)x^2+(\lambda-1)=0, \quad (3\lambda-1)x^4-(2\lambda+1)x^2+\lambda=0$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

ГЛАВА XXXV.

Раціональныя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ: продолженіе. — Возвратныя уравненія. — Двучленныя уравненія. — Трехчленныя уравненія. — Уравненія вида P.Q.R = 0 и нѣкоторыя другія.

Возвратныя уравненія четвертой степени.

542. Опредѣленія. — *Уравненіе называется возвратнымъ перваго рода, если обратная величина каждаго корня уравненія служитъ также корнемъ этого уравненія.*

Уравненіе называется возвратнымъ втораго рода, если обратная величина каждаго корня, взятая съ противоположнымъ знакомъ, удовлетворяетъ также уравненію.

543. Лемма. — *Если два цѣлыя уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, m-й степени, приведенныя къ виду A = 0, имѣютъ m различныхъ общихъ корней, то коэффиціенты ихъ пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть два уравненія

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$
$$a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'=0$$

имѣютъ 4 общихъ корня, т. е. первыя части ихъ обращаются въ ноль при 4-хъ различныхъ значеніяхъ x; тогда и многочленъ

$$a'(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)-a(a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e')$$

обратится въ ноль при тѣхъ же значеніяхъ x; но этотъ многочленъ

$$(ba'-ab')x^3+(ca'-ac')x^2+(da'-ad')x+(ea'-ae')$$

третьей степени относительно x; слѣд. (§ 71, II) онъ тождественно равенъ нулю; а потому всѣ его коэффиціенты равны нулю. Отсюда

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=\frac{e'}{e}.$$

544. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымъ перваго рода.*

Необходимо и достаточно, чтобы оно имѣло тѣже корни, какъ и уравненіе съ корнями, обратными корнямъ даннаго.

Пусть имѣетъ уравненіе четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0;$$

положивъ $y=\frac{1}{x}$ и исключивъ x, получимъ уравненіе

$$ey^4+dy^3+cy^2+by+a=0,$$

корни котораго обратны корнямъ даннаго; слѣд., если α есть одинъ изъ корней перваго, то $\frac{1}{\alpha}$ удовлетворяетъ второму, а какъ $\frac{1}{\alpha}$ удовлетворяетъ, по предположенію, и первому, то эти уравненія имѣютъ общіе корни. А потому, на основаніи леммы § 543, имѣемъ

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{d}=1=\frac{d}{b}=\frac{e}{a},$$

откуда $$a = e, \quad b = d,$$

т. е. коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ равны и имѣютъ одинаковые знаки. Итакъ возвратное уравненіе четвертой степени перваго рода имѣетъ видъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Примѣчаніе I. — Если средній коэффиціентъ разсматриваемаго уравненія равенъ 0, $c = 0$, то уравненія

$$ax^4 + bx^3 + dx + e = 0 \quad \text{и} \quad ey^4 + dy^3 + by + a = 0$$

дадутъ $$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{d}{b} = \frac{e}{a};$$

отсюда: $a = +e$ и $b = +d$, или $a = -e$ и $b = -d$; ур-ніе будетъ

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

И въ самомъ дѣлѣ, ур-ніе это—возвратное, ибо, написавъ его въ видѣ

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0,$$

замѣчаемъ, что каждый изъ корней $+1$ и -1 равенъ своему обратному; корни же ур-нія $ax^2 + bx + a = 0$ обратны одинъ другому, ибо ихъ произведеніе равно 1.

Примѣчаніе II. — Такимъ же образомъ найдемъ, что ур. третьей степени возвратное перваго рода есть

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

причемъ верхній знакъ берется съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

545. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, раздѣлимъ обѣ части на x^2 (на это имѣемъ право, ибо ур-ніе не имѣетъ корня, равнаго нулю, слѣд. x^2 не обращается въ ноль); найдемъ, сгруппировавъ члены, равно удаленные отъ концовъ:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Положивъ $x + \frac{1}{x} = y$, имѣемъ отсюда: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$; подставляя, найдемъ

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Отсюда найдемъ два значенія для y: y' и y''. Подставляя поочередно эти значенія въ ур-ніе $x + \frac{1}{x} = y$, которое можно написать въ видѣ

$$x^2 - yx + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

найдемъ всѣ четыре значенія x. Такимъ образомъ рѣшеніе ур-нія (1) сводится къ рѣшенію системы (2) и (3).

546. Изслѣдованіе. — Чтобы величины x, выводимыя изъ (3), были дѣйствительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы коэффиціенты этого ур-нія были дѣйствительны, т. е. чтобы y было дѣйствительно; затѣмъ необходимо, чтобы разсматриваемое значеніе y удовлетворяло условію

$$y^2 - 4 \geqq 0,$$

т. е. чтобы y находился внѣ интервала отъ -2 до $+2$, иначе, чтобы абсолютная величина y была больше 2. Очевидно, что этихъ условій достаточно.

547. Примѣры. — I. *Рѣшить ур-ніе* $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$.

Напишемъ его въ видѣ

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0.$$

Положивъ $x+\frac{1}{x}=y$, находимъ ур-ніе $2y^2+y-15=0$, откуда

$$y'=\frac{5}{2},\quad y''=-3.$$

Вносся эти величины въ ур-ніе $x+\frac{1}{x}=y$, имѣетъ ур-нія:

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0,\quad x^2+3x+1=0;$$

откуда: $x^{\rm I}=2,\quad x^{\rm II}=\frac{1}{2},\quad x^{\rm III}=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}.\quad x^{\rm IV}=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$

Легко удостовѣриться, что $x^{\rm III}\,.\,x^{\rm IV}=1$.

II. *Изслѣдовать корни уравненія* $x^4+2\lambda x^3+(\lambda+1)x^2+2\lambda x+1=0$ *при измѣненіи* λ *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Вышеуказаннымъ пріемомъ приводимъ рѣшеніе этого ур-нія къ рѣшенію системы

$$x^2-yx+1=0\ \ldots\ldots (1),\quad y^2+2\lambda y+(\lambda-1)=0\ \ldots\ldots (2).$$

Чтобы корни (1) были дѣйствительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы y было дѣйствительно, и затѣмъ, чтобы

$$y^2-4 \geqq 0.$$

Каждое значеніе y, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, дастъ дѣйствительныя значенія для x.

Ур. (2) даетъ слѣдующее условіе дѣйствительности y:

$$\lambda^2-\lambda+1 \geqq 0,$$

условіе, всегда существующее, ибо ур. $\lambda^2-\lambda+1=0$ имѣетъ корни мнимые.

Второе условіе: $y^2-4 \geqq 0$ означаетъ, что y не должно содержаться между -2 и $+2$, т. е. y долженъ быть или <-2, или $>+2$. Подстановка (-2) вм. y въ первую часть ур-нія (2) даетъ

$$3(-\lambda+1);$$

подстановка $(+2)$ даетъ

$$5\left(\lambda+\frac{3}{5}\right);$$

разсмотримъ скалу значеній λ, содержащую значенія, обращающія эти биномы въ ноль:

$$\underbrace{-\infty\,\ldots\ldots\,-\tfrac{3}{5}}_{1}\underbrace{\ldots\ldots\,+1}_{2}\underbrace{\ldots\ldots\,+\infty}_{3}$$

Если λ давать величины въ интервалѣ (1), то результатъ подстановки (-2) оказывается >0; слѣд. -2 находится внѣ корней ур. (2); но полусумма корней, равная $-\lambda$, положительна; слѣд. оба корня больше (-2). — Результатъ подстановки $(+2)$ отрицателенъ, сл. $+2$ содержится между корнями ур-нія (2). Итакъ, для значеній λ, лежащихъ въ (1) области, расположеніе корней y' и y'' (полагая $y'<y''$) и чиселъ -2 и $+2$ таково:

$$\ldots\ldots -2\ldots y'\ldots +2\ldots y''\ldots\ldots$$

Итакъ: одинъ корень (y'') дастъ два дѣйствительныя значенія для x; другой (y') — два мнимыя значенія.

Для λ, содержащихся во (2) области, результаты подстановокъ (-2) и $(+2)$ положительны, сл. (-2) и $(+2)$ лежатъ внѣ корней; приэтомъ, полусумма корней, равная $-\lambda$, больше -2, но меньше $+2$; сл. расположеніе корней и чиселъ -2 и $+2$ таково:

$$\ldots\ldots -2\ldots\ldots y'\ldots\ldots y''\ldots\ldots +2;$$

заключаемъ, что 4 значенія x мнимы.

Для λ, содержащихся въ (3) области, результатъ подстановки (-2) отрицателенъ; слѣд. (-2) содержится между корнями ур. (2); результатъ подстановки $(+2)$ положителенъ; слѣд. $+2$,находясь внѣ корней, больше y''. Такимъ образомъ одинъ корень (y') дастъ два дѣйств. значенія x, другой (y'') — два мнимыхъ значенія x.

548. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымъ втораго рода.*

Необходимо и достаточно, чтоуы ур-ніе имѣло тѣ же корни, какъ и ур-ніе, корни котораго обратны корнямъ даннаго и имѣютъ противоположные имъ знаки.

Пусть дано ур-ніе четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

положивъ $y=-\frac{1}{x}$ и исключивъ x изъ этого ур-нія и перваго, получимъ ур-ніе.

$$ey^4-dy^3+cy^2-by+a=0, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

корни котораго обратны корнямъ даннаго и имѣютъ противоположные имъ знаки. Но, если α есть корень даннаго (которое, по предположенію, есть возвратное втораго рода), то $-\frac{1}{\alpha}$ есть также корень этого ур-нія; но $-\frac{1}{\alpha}$ есть также и корень (2); слѣд. оба ур-нія имѣютъ одинаковые корни, а потому

$$\frac{a}{c}=-\frac{b}{d}=1=-\frac{d}{b}=\frac{e}{a},$$

откуда:

$$a=e,\ b=-d.$$

Слѣд. *общая форма возвратнаго ур-нія четвертой степени втораго рода такова*

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0.$$

Примѣчаніе I. — Еслибы средній членъ равнялся нулю, то ур. было бы возвратнымъ втораго рода въ двухъ слѣдующихъ случаяхъ:

$$ax^4 + bx^3 \pm bx \mp a = 0$$

причемъ верхній знакъ надо брать съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

Когда ур-ніе имѣетъ видъ $ax^4 + bx^3 + bx - a = 0$, его можно написать въ види: $a(x^4 - 1) + bx(x^2 + 1) = 0$, или

$$(x^2 + 1)[a(x^2 - 1) + bx] = 0,$$

откуда видно, что оно имѣетъ два мнимыхъ корня: $+i$ и $-i$.

Примѣчаніе II. — По предыдущему легко убѣдиться, что уравненіе нечетной степени съ дѣйствительными коэффиціентами не м. б. возвратнымъ втораго рода.

549. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, раздѣлимъ обѣ его части на x^2 и напишемъ его въ видѣ:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

положивъ $x - \frac{1}{x} = y$, имѣемъ: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$; подстановка въ (1) дастъ

$$ay^2 + by + (c + 2a) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Отсюда найдемъ два значенія y, подставляя каждое въ ур. $x - \frac{1}{x} = y$, которое можно представить въ видѣ:

$$x^2 - yx - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Найдемъ четыре корня предложеннаго ур-нія.

Изслѣдованіе.—Если корни ур-нія (2) будутъ дѣйствительны, то и всѣ четыре корня даннаго будутъ дѣйствительны, потому-что корни (3) будутъ дѣйствительны. Итакъ, условіе дѣйствительности всѣхъ четырехъ корней даннаго ур. выражается неравенствомъ

$$b^2 - 4a(c + 2a) \geqslant 0.$$

Примѣръ. — Рѣшить ур-ніе $x^4 + 2\lambda x^3 - 3(\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$.

Это есть возвратное ур-ніе 2-го рода. Раздѣливъ его на x^2 и положивъ $x - \frac{1}{x} = y$, или, что то же,

$$x^2 - yx - 1 = 0,$$

рѣшаемъ ур-ніе

$$y^2 + 2\lambda y - (3\lambda + 1) = 0.$$

Условіе дѣйствительности всѣхъ корней предложеннаго будетъ

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 \geqslant 0,$$

откуда заключаемъ, что λ не должно содержаться между

$$-\frac{\sqrt{5}+3}{2} \text{ и } +\frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Двучленныя уравненія.

550. *Двучленнымъ уравненіемъ* называется ур-ніе вида

$$ax^m + b = 0.$$

Раздѣливъ обѣ части на a, и положивъ $-\frac{b}{a} = A$, можемъ представить это ур-ніе въ видѣ

$$x^m - A = 0, \quad \text{или} \quad x^m = A.$$

Рѣшить это ур-ніе значитъ найти такое количество x, m-ая степень котораго равнялась бы A; иначе говоря, значитъ: *найти всѣ значенія корня m-го порядка изъ* A.

551. Теорема. *Рѣшеніе ур-нія* $x^m - A = 0$ *приводится къ рѣшенію ур-нія* $y^m \mp 1 = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α будетъ ариѳметическій корень m-го порядка изъ A, если $A > 0$, и изъ $(-A)$, если $A < 0$. Ур-ніе $x^m = A$ приметъ одинъ изъ видовъ: $x^m = \alpha^m$, $x^m = -\alpha^m$. Положивъ $x = \alpha y$ и подставивъ это выраженіе въ каждое изъ послѣднихъ ур-ній, по сокращеніи на α^m, найдемъ

$$y^m = 1, \quad \text{или} \quad y^m = -1.$$

Такимъ образомъ, чтобы рѣшить ур-ніе $x^m - A = 0$, нужно: 1) найти абсолютное значеніе $\sqrt[m]{A}$, равное α; 2) найти всѣ корни y', y'', y''',... ур-нія $y^m \pm 1 = 0$; 3) каждый изъ нихъ помножить на α.

552. Переходимъ къ рѣшенію ур-нія $y^m \pm 1 = 0$: элементарная алгебра даетъ средства рѣшать это ур-ніе лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

I. $m = 2$; ур-нія суть: $y^2 - 1 = 0$; $y^2 + 1 = 0$.

Рѣшеніе ихъ извѣстно; корни перваго суть: $y' = +1$, $y'' = -1$; корни втораго: $y' = +i$, $y'' = -i$.

II. $m = 3$; ур-нія: $y^3 - 1 = 0$; $y^3 + 1 = 0$.

Первое ур-ніе можно представить въ видѣ: $(y-1)(y^2 + y + 1) = 0$; оно распадается на два: $y - 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$.

Первое имѣетъ корень $+1$; второе — два корня: $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,.\,i}{2}$; такъ-что три корня даннаго ур-нія суть:

$$y' = +1; \quad y'' = \frac{-1+\sqrt{3}\,.\,i}{2}\;; \quad y''' = \frac{-1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Это значитъ, что *кубичный корень изъ $+1$ имѣетъ три значенія: одно дѣйствительное и два мнимыхъ.*

Легко видѣть, что *каждый изъ мнимыхъ корней изъ $+1$ равенъ квадрату другаго.* Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ эти корни черезъ α и β, и замѣчая, что они удовлетворяютъ уравненію $y^2+y+1=0$, находимъ: $\alpha\beta=1$; но $\alpha^3=1$, слѣд. $\alpha\beta=\alpha^3$, или $\beta=\alpha^2$. Слѣд., если α есть одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1, то три корня будутъ: α, α^2, α^3.

Можно и прямымъ возвышеніемъ въ квадратъ убѣдиться, что $y''=y'''^2$ и $y'''=y''^2$.

Примѣръ. — Рѣшить ур-ніе $x^3-343=0$.

По доказанному, надо ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{343}$ т. е. 7 помножить на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ $+1$. Найдемъ:

$$x' = +7; \quad x'' = 7\times\frac{-1+\sqrt{3}\,.\,i}{2}; \quad x''' = 7\,.\,\frac{-1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Переходимъ къ рѣшенію ур-нія $y^3+1=0$. Его можно представить въ видѣ $(y+1)(y^2-y+1)=0$; а это уравненіе распадается на два: $y+1=0$ и $y^2-y+1=0$.

Первое имѣетъ корень $=-1$; второе—два корня: $\frac{1\pm i\,.\,\sqrt{3}}{2}$; такъ что три корня даннаго суть:

$$y' = -1; \quad y'' = \frac{1+\sqrt{3}\,.\,i}{2}; \quad y''' = \frac{1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Эти корни и представляютъ три значенія кубичнаго корня изъ -1.

Примѣръ. — Рѣшить уравненіе $x^3+8=0$.

Корни его найдемъ, помноживъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{8}$ или 2 на каждый изъ кубичныхъ корней изъ -1; слѣд.

$$x' = -2; \quad x'' = +1+\sqrt{3}\,.\,i; \quad x''' = 1-\sqrt{3}\,.\,i.$$

III. $m=4$; уравненія: $y^4-1=0$; $y^4+1=0$.

Уравненіе $y^4-1=0$ можно представить въ видѣ $(y^2-1)(y^2+1)=0$; оно распадается на два ур-нія: $y^2-1=0$ и $y^2+1=0$. Первое имѣетъ корни: $+1$ и -1, второе: $+i$ и $-i$; такъ-что ур-ніе $y^4-1=0$ имѣетъ четыре корня:

$$y^{\mathrm{I}} = +1, \quad y^{\mathrm{II}} = -1, \quad y^{\mathrm{III}} = +i, \quad y^{\mathrm{IV}} = -i$$

Чтобы рѣшить ур-ніе $y^4+1=0$, дополнимъ первую часть его до полнаго квадрата, прибавивъ къ ней и вычтя $2y^2$; найдемъ:

$$y^4+2y^2+1-2y^2=0, \quad \text{или} \quad (y^2+1)^2-(\sqrt{2}\,.\,y)^2=0, \quad \text{или}$$

$$(y^2+\sqrt{2}\,.\,y+1)(y^2-\sqrt{2}\,.\,y+1)=0.$$

Это ур-ніе распадается на два квадратныхъ: $y^2+\sqrt{2}\,.\,y+1=0$ и $y^2-\sqrt{2}\,.\,y+1=0$. Рѣшивъ ихъ, найдемъ 4 корня:

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \qquad \left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).$$

Уравненіе $y^4+1=0$ можно рѣшить иначе, разсматривая его какъ возвратное, въ которомъ коэффиціенты трехъ среднихъ членовъ равны нулю. Раздѣливъ его на y^2, имѣемъ $y^2+\frac{1}{y^2}=0$; положивъ $y+\frac{1}{y}=z$, имѣемъ отсюда: $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$; слѣд. $z^2-2=0$, откуда $z^{I}=+\sqrt{2}$ и $z^{II}=-\sqrt{2}$. Подставляя поочередно оба значенія z въ ур-ніе $y+\frac{1}{y}=z$, получаемъ два ур-нія $y^2-\sqrt{2}\,.\,y+1=0$ и $y^2+\sqrt{2}\,.\,y+1=0$, которыя рѣшены выше.

Примѣръ I.—Уравненіе $x^4-81=0$ имѣетъ 4 корня, которые найдемъ, умноживъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[4]{81}$, т. е. 3 на четыре значенія корня четвертаго порядка изъ $+1$; именно

$$x^{I}=+3, \quad x^{II}=-3, \quad x^{III}=+3i, \quad x^{IV}=-3i.$$

Примѣръ II.—Ур-ніе $x^4+16=0$ имѣетъ четыре мнимыхъ корня, которые найдемъ, умноживъ четыре значенія корня 4-го порядка изъ -1 на ариѳм. значеніе $\sqrt[4]{16}$, т. е. на 2. Получимъ:

$$x^{I}=\sqrt{2}(1+i), \quad x^{II}=\sqrt{2}(1-i), \quad x^{III}=\sqrt{2}(-1+i), \quad x^{IV}=\sqrt{2}(-1-i).$$

IV. $m=5$; ур-нія: $x^5-1=0$ и $x^5+1=0$.

Первое ур. можно представить въ видѣ: $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$; оно распадается на два ур-нія

$$x-1=0\ .\ .\ .\ .\ (1) \quad \text{и} \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

изъ которыхъ первое даетъ $x'=+1$. Второе же есть *возвратное ур. перваго рода*, ибо коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равны; слѣд. рѣшеніе его приводится къ рѣшенію системы двухъ уравненій:

$$x^2-yx+1=0 \quad \text{и} \quad y^2+y-1=0.$$

Корни ур-нія въ y дѣйствительные, неравные и противоположны по знаку; необходимо и достаточно, чтобы эти корни не заключались между -2 и $+2$, чтобы корни ур-нія (2) были дѣйствительны. Но $2^2+2-1>0$, слѣд. положительный корень содержится между 0 и $+2$. Точно такъ же $(-2)^2+(-2)-1>0$, слѣд. отрицательный корень содержится между 0 и (-2). Слѣд. всѣ четыре корня ур-нія (2) мнимы. Для нахожденія ихъ рѣшаемъ сначала ур. въ y; оно даетъ

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Рѣшая ур-ніе въ x, имѣ-мъ

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2};$$

подставляя сюда вмѣсто y сперва $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, затѣмъ $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, получимъ еще четыре корня, такъ-что всѣ пять корней ур-нія $x^5-1=0$ суть:

$$x_1=1;$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,i}{4};\qquad x_3=\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,i}{4};$$

$$x_4=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,i}{4};\qquad x_5=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,i}{4}.$$

Чтобы рѣшить ур. $x^5+1=0$, разлагаемъ первую часть на множителя и получаемъ уравненіе $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$, распадающееся на два ур-нія: $x+1=0$ и $x^4-x^3+x^2-x+1=0$, рѣшеніе которыхъ аналогично вышеуказанному. Впрочемъ, легко показать, что корни ур-нія $x^5+1=0$ отличается отъ корней ур-нія $x^5-1=0$ только знаками; въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ данномъ ур-ніи $x=-x'$, получимъ ур-ніе $x'^5-1=0$, тождественное съ рѣшеннымъ, слѣд. для x' имѣемъ 5 вышенаписанныхъ формулъ; а какъ $x=-x'$, то перемѣнивъ въ этихъ формулахъ знаки, прямо имѣемъ пять корней ур-нія $x^5+1=0$. Это замѣчаніе относится ко всѣмъ двучленнымъ ур-ніямъ $x^m-1=0$ и $x^m+1=0$, въ которыхъ m нечетно.

V. $m=6$; ур-нія: $x^6-1=0$ и $x^6+1=0$.

Первое ур. можно представить въ видѣ $(x^3-1)(x^3+1)=0$; сл. оно разлагается на два кубичныхъ ур-нія: $x^3-1=0$ и $x^3+1=0$, рѣшенія которыхъ уже извѣстны, такъ-что $x^6-1=0$ имѣетъ шесть корней:

$$x_1=1;\ x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ x_4=-1;\ x_5=\frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_6=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненія. $x^6+1=0$ можно представить въ видѣ $(x^2)^3+1=0$, т. е. $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0$; оно распадается на два: квадратное ур. $x^2+1=0$ и биквадратное $x^4-x^2+1=0$, рѣшеніе которыхъ извѣстно.

VI. $m=7$. Уравненія $x^7\pm1=0$ неразрѣшимы средствами элементарной алгебры.

VII. $m=8$; ур-нія $x^8-1=0$ и $x^8+1=0$.

Первое можно написать въ видѣ $(x^4-1)(x^4+1)=0$; оно распадается на два $x^4-1=0$ и $x^4+1=0$, корни которыхъ уже найдены въ пунктѣ III.

Ур-ніе $x^8+1=0$ можно написать въ видѣ $(x^4+1)^2-2x^4=0$ или $(x^4+\sqrt{2}\,.\,x^2+1)(x^4-\sqrt{2}\,.\,x^2+1)=0$; оно распадается на два биквадратныхъ ур-нія $x^4+\sqrt{2}\,.\,x^2+1=0$, и $x^4-\sqrt{2}\,.\,x^2+1=0$, рѣшеніе которыхъ извѣстно.

Подобнымъ образомъ могли бы рѣшить элементарно еще нѣкоторыя двучленныя ур-нія.

На частныхъ примѣрахъ мы видѣли, что число значеній корня, или рѣшеній двучленнаго ур-нія всегда оказывается равно показателю корня или степени ур-нія. Общее доказательство этой истины дано въ главѣ XXIX. § 453.

Трехчленныя уравненія.

553. — *Трехчленнымъ ур-мъ* называется ур-ніе вида

$$ax^m + bx^n + c = 0.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m = 2n$, т. е. ур-ніе имѣетъ видъ

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

рѣшеніе его приводится къ рѣшенію двухъ ур-ній: *квадратнаго* и *двучленнаго*. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $x^n = y$, и слѣд. $x^{2n} = y^2$, получаемъ ур-ніе

$$ay^2 + by + c = 0,$$

имѣющее два корня: $y = y'$ и $y = y''$; подставляя эти значенія y въ ур-ніе $x^n = y$, получаемъ два двучленныхъ ур-нія

$$x^n = y' \quad \text{и} \quad x^n = y'',$$

изъ коихъ каждое имѣетъ n корней, такъ-что предложенное ур-ніе имѣетъ $2n$ корней.

Очевидно, биквадратное ур. есть частный случай трехчленнаго.

Примѣръ. — *Рѣшить ур-ніе* $1000x^6 - 6119x^3 + 9261 = 0$.

Положивъ $x^3 = y$, имѣемъ ур. $1000y^2 - 6119y + 9261 = 0$, откуда

$$y = \frac{6119 \pm \sqrt{37442161 - 37044000}}{2000} = \frac{6119 \pm 631}{200};$$

слѣд.

$$y' = \frac{6750}{2000} = \frac{27}{8}; \quad y'' = \frac{5488}{2000} = \frac{343}{125}.$$

Вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ двухчленныхъ ур-ній

$$x^3 = \frac{27}{8} \quad \text{и} \quad x^3 = \frac{343}{125},$$

изъ которыхъ и находимъ шесть корней предложеннаго:

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5} \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненія вида P.Q.R = 0 и нѣкоторыя другія.

554. Какова бы ни была степень уравненія, вторая часть котораго равна нулю, но если окажется возможнымъ разложить первую часть его на множители первой, или второй степени, или вида $ax^4 + bx^2 + c$, или $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm \pm bx + a$, то ур-ніе возможно рѣшить средствами элементарной алгебры. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы произведеніе множителей было нулемъ, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ нулемъ; слѣд. рѣшеніе уравненія $PQR = 0$ приводится къ рѣшенію отдѣльно ур-ній $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, которыя, по предположенію, разрѣшимы элементарными средствами.

Приводимъ примѣры.

I. *Рѣшить ур-ніе* $ax^3+bx^2+cx=0$.

Написавъ его въ видѣ $x(ax^2+bx+c)=0$, заключаемъ, что его корни суть корни ур-ній: $x=0$, $ax^2+bx+c=0$; т. е.

$$x'=0,\ x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x'''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

II. *Рѣшить ур-ніе* $7x^3-5x^2-4x+2=0$.

Непосредственно видно, что ур. удовлетворяется при $x=1$; слѣд. первая часть его, обращаясь при $x=1$ въ ноль, дѣлится на $x-1$; выполнивъ дѣленіе, дадимъ ур-нію видъ $(x-1)(7x^2+2x-2)=0$, откуда видно, что оно распадается на два ур-нія: $x-1=0$ и $7x^2+2x-2=0$.

Рѣшая ихъ, получаемъ:

$$x=1,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{7}.$$

III. *Рѣшить ур-ніе*: $(3x^4-7x^2+4)^2-(2x^4-5x^2+2)^2=0$.

Разложивъ на множители, получимъ

$$(5x^4-12x^2+6)(x^4-2x^2+2)=0,$$

ур-ніе, распадающееся на два биквадратныхъ, изъ которыхъ найдемъ

$$x=\pm\sqrt{\frac{6\pm\sqrt{6}}{5}}\ \text{ и }\ x=\pm\sqrt{1\pm i}.$$

555. Уравненія $aQ^2+bQ+c=0$ и $aQ^4+bQ^2+c=0$, гдѣ Q есть квадратный или биквадратный по буквѣ x полиномъ заключаютъ въ себѣ четыре типа ур-ній:

$$a(rx^2+sx+t)^2+b(rx^2+sx+t)+c=0;$$
$$a(rx^4+sx^2+t)^2+b(rx^4+sx^2+t)+c=0;$$
$$a(rx^2+sx+t)^4+b(rx^2+sx+t)^2+c=0;$$
$$a(rx^4+sx^2+t)^4+b(rx^4+sx^2+t)^2+c=0.$$

Чтобы рѣшить такого рода ур-нія, полагаемъ, смотря по случаю:

$$\text{или } rx^2+sx+t=Q, \text{ или } rx^4+sx^2+t=Q, \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

рѣшая ур-нія въ Q, найдемъ для Q два или четыре значенія; внося каждое изъ значеній Q въ вспомогательныя ур-нія (α), найдемъ соотвѣтствующія значенія x.

556. Слѣдующіе четыре типа уравненій:

$$aP^2+bPP'+cP'^2=0;\ aQ^2+bQQ'+cQ'^2=0;$$
$$aP^4+bP^2P'^2+cP'^4=0 \text{ и } aQ^4+bQ^2Q'^2+cQ'^4=0,$$

въ которыхъ P и P' суть триномы вида rx^2+sx+t, а Q и Q' — вида rx^4+sx^2+t, рѣшаются помощію двухъ квадратныхъ, либо двухъ биквадратныхъ ур-ній.

Для рѣшенія ихъ полагаемъ, смотря по случаю;

$$\frac{P}{P'}=R \text{ или } \frac{Q}{Q'}=R;$$

приходится затѣмъ рѣшать квадратное, либо биквадратное ур. въ R, которое дастъ для R два, либо четыре значенія; внося значенія R во вспомогательное ур., найдемъ соотвѣтствующія значенія x.

557. Примѣры. — I. *Рѣшить ур.* $(x-a)(x-3a)(x-8a)(x+4a)=$ $=b^4-35a^2b^2$.

Послѣдовательныя преобразованіи даютъ:

$$(x^2-4ax+3a^2)(x^2-4ax-32a^2)=b^4-35a^2b^2,$$

$$(x^2-4ax)^2-29a^2(x^2-4ax)-(96a^4+b^4-35a^2b^2)=0.$$

Принявъ x^2-4ax за вспомогательное неизвѣстное, находимъ

$$x^2-4ax=\frac{29a^2\pm(35a^2-2b^2)}{2};$$

рѣшая каждое изъ этихъ квадратныхъ ур-ній, найдемъ всѣ 4 корня предложеннаго.

II. *Рѣшить ур.* $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$.

Раздѣливъ обѣ части на x^4 (что, замѣтимъ, не поведетъ за собою уничтоженія нѣкоторыхъ корней, ибо при $x=0$ ур. не удовлетворяется), дадимъ ур-нію видъ

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4-10\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2+9=0,$$

откуда

$$\frac{x^2-x+1}{x}=\pm\sqrt{5\pm4}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ 4 ур-нія

$$\frac{x^2-x+1}{x}=\pm1 \quad\text{и}\quad \frac{x^2-x+1}{x}=\pm3,$$

изъ которыхъ находимъ:

$$x=1,\ x=\pm i,\ x=2\pm\sqrt{3},\ x=-1.$$

III. *Рѣшить ур.* $\dfrac{(x^2+ax+1)^2}{(x^2+bx+1)(x^2+cx+1)}=d$, гдѣ $d=\dfrac{(a-b)(a-c)}{bc}$.

Послѣдовательныя преобразованія даютъ:

$$d\{x^2+ax+1-(a-b)x\}\{x^2+ax+1-(a-c)x\}-(x^2+ax+1)^2=0,$$

$$(d-1)(x^2+ax+1)^2-d(2a-b-c)(x^2+ax+1)x+d(a-b)(a-c)x^2=0,$$

откуда, раздѣливъ на x^2 и принявъ за неизвѣстное $\dfrac{x^2+ax+1}{x}$, имѣемъ:

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{d(2a-b-c)\pm\sqrt{d^2(2a-b-c)^2-4d(d-1)(a-b)(a-c)}}{2(d-1)},\ \text{или}$$

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{d(2a-b-c)\pm\sqrt{d^2(b-c)^2+4d(a-b)(a-c)}}{2(d-1)}.$$

Но, по условію, $d=\dfrac{(a-b)(a-c)}{bc}$; слѣд.

$$d^2(b-c)^2+4d(a-b)(a-c)=d^2(b+c)^2,$$

откуда $\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{d\left\{2a-b-c\pm(b+c)\right\}}{2(d-1)}$, т. е.

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{(a-b)(a-c)\left\{2a-b-c\pm(b+c)\right\}}{2a(a-b-c)}.$$

Итакъ, нахожденіе x приводится къ рѣшенію ур-ній

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{(a-b)(a-c)}{a-b-c},\quad \frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{(a-b)(a-c)}{a},$$

что не представляетъ уже затрудненій.

558. Задачи.

Рѣшить возвратныя уравненія:

1. $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$. 2. $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$.
3. $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0$. 4. $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$.
5. $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$. 6. $30x^4-101x^3+138x^2+101x+30=0$.
7. $65x^4-198x^3+274x^2-198x+65=0$. 8. $5x^4-12x^3+30x^2-12x+5=0$.
9. $x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0$. 10. $x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0$.
11. $4x^6-24x^5+57x^4-73x^3+57x^2-24x+4=0$.
12. $6x^6-23x^5+10x^4+14x^3+10x^2-23x+6=0$.
13. $abx^4-(a+b)(1+ab)x^3+\left\{(1+a^2)(1+b^2)+2ab\right\}x^2-(a+b)(1+ab)x+ab=0$.
14. $a^2bcx^4-a[c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)]x^3+[2a^2bc+(a^2+b^2)(a^2+c^2)]x^2$
$-a[c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)]x+a^2bc=0$.
15. Рѣшить ур. $x^4-3x^3+9x^2-27x+81=0$.

Рѣшить трехчленныя уравненія:

16. $x^6+4x^3=96$. 17. $x^6-91x^3+1728=0$.
18. $x^8-97x^4+1296=0$. 19. $x^{10}-12x^5=56133$.
20. $x^8-[a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})][a^2(2-\sqrt{2})+b^2(2+\sqrt{2})]x^4+(a^2-b^2)^4=0$.

Рѣшить уравненія:

21. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2$.
22. $4x^4+\frac{x}{2}=4x^3+33$. 23. $x^3+x+2=0$.
24. $x^3+x+a^3+a=0$. 25. $ax^3+x+a+1=0$.
26. $2x^{10}=3x^6-x^8$. 27. $x^3+x^2-4x-4=0$.
28. $8x^3+16x-9=0$. 29. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.
30. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$. 31. $x^4+4a^3x=a^4$.
32. $x^5+4x=5x^3$. 33. $8x^3-16ax^2+8a^2x-a^3=0$.
34. $x^3-3abx+a^3+b^3=0$. 35. $8x^3-13x^2+3x+2=0$.
36. $x^3-3ax^2+4a^2x+8a^3=0$. 37. $R(x+R)^2=ax(x+2R)-(x+R)^3$.
38. $(2x^3+x^2+x)^2-26(2x^3+x^2+x)+88=0$.
39. $(x^4+x^2+1)^2-38(x^4+x^2+1)+105=0$.
40. $x^3-6x^2-10x-8=0$, зная, что одинъ изъ корней $=4$.

41. $(x-5)(3x+8)(7x-9)=x(2x-1)(2x+1)$, зная, что одинъ изъ его корней — цѣлый.

42. $x^5-11x^4-7x^3+323x^2-186x-2520=0$, зная, что три изъ его корней — послѣдовательныя цѣлыя числа, сумма квадратовъ которыхъ $=110$.

43. $x^5-24x^4+163x^3-48x^2-1676x-1440=0$, зная, что въ числѣ его корней есть три послѣдовательныя цѣлыя числа, дающія въ произведеніи 720.

44. $x^4-ax^3+bx^2+adx+d^2=0$.

45. $(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)-m(x^2+cx+1)(x^2+dx+1)=0$.

46. $(x^2-ax+b)(x^2-3ax+b)(x^2-4ax+b)(x^2-6ax+b)=7a^4x^4$.

47. $(x+a)(x+a+1)(x+a+2)(x+a+3)+h=0$, и показать, что корни его мнимы, если $h>1$, попарно равны при $h=1$, и дѣйствительны, если $h<1$.

48. $x(x+a)(x+b)(x+a+b)+h=0$.

49. $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x+2}+\frac{3x}{x+3}+\frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0$.

50. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0$, и, общѣе, ур-ніе

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$

кромѣ того, показать, что всѣ три корня всегда дѣйствительны, и даже соизмѣримы, если a^2+b^2 есть квадратъ.

51. $(x+p)(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3)-(x+q)(x+q+1)(x+q+2)(x+q+3)=0$.

52. При какомъ соотношеніи между коэффиціентами уравненія $ax^4+bx^3+cx^2+dx+f=0$ можно его представить въ видѣ

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2+p(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+q=0.$$

ГЛАВА XXXVI.

Ирраціональныя уравненія.

559. *Ирраціональнымъ ур-мъ* называется такое, въ которомъ неизвѣстныя входятъ подъ знакомъ одного или нѣсколькихъ радикаловъ. Рѣшеніе такихъ ур-ній требуетъ освобожденія неизвѣстныхъ изъ-подъ радикаловъ. Можно доказать, что всякое ур-ніе можетъ быть освобождено отъ радикаловъ, каковы бы ни были ихъ показатели. Доказательство этой теоремы и основывающійся на ней общій методъ рѣшенія ирраціональныхъ ур-ній мы помѣщаемъ въ концѣ курса, въ особомъ приложеніи. Въ настоящей же главѣ разсмотримъ другой пріемъ, болѣе элементарный, приложимый лишь въ нѣкоторыхъ случаяхъ, обыкновенно встрѣчающихся въ практикѣ элементарныхъ вычисленій. Онъ состоитъ въ томъ, что изолируютъ радикалъ и затѣмъ возводятъ ур-ніе въ степень, изображаемую показателемъ изолированнаго корня. Такимъ образомъ освобождаютъ ур-ніе отъ ирраціональности того числа, который былъ отдѣленъ. Повторяя эту операцію столько разъ, сколько нужно для уничтоженія всѣхъ радикаловъ, приводятъ такимъ образомъ ур-ніе къ раціональному виду. Но нужно помнить, что этотъ методъ приложимъ лишь въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ. Такъ, этимъ способомъ можно освободить ур-ніе отъ квадратныхъ корней, *каково бы ни было ихъ число.*

Теорема. *Всякое ур. можно освободить отъ радикаловъ второй степени, каково бы ни было ихъ число, возвышеніемъ въ квадратъ обѣихъ частей нѣсколько разъ.*

Докажемъ эту теорему. Пусть будетъ $\sqrt{k}$ тотъ радикалъ, который желаютъ уничтожить. Для того приведемъ ур-ніе къ виду $P+Q\sqrt{k}=0$, гдѣ P и Q — количества раціональныя или ирраціональныя, но не содержащія $\sqrt{k}$. Изолируя членъ $Q\sqrt{k}$ во второй части и возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ ур-ніе $P^2=Q^2k$, уже не содержащее радикала $\sqrt{k}$. Такимъ же образомъ можно освободить ур-ніе отъ другого, третьяго,.... квадратныхъ корней, сколько бы ихъ ни было.

Освободивъ такимъ образомъ ур-ніе отъ радикаловъ, рѣшаемъ полученное раціональное ур. вышеизложенными пріемами. Но легко доказать, что оно можетъ имѣть посторонне рѣшенія, не удовлетворяющія данному ур-нію.

560. Теорема.—*Если обѣ части уравненія возвысить въ одинаковую степень, то получится уравненіе, вообще, не тождественное данному: оно необходимо удовлетворяется всѣми корнями даннаго ур-нія, но можетъ имѣть и постороннія рѣшенія.*

Въ самомъ дѣлѣ: I. Пусть дано ур-ніе

$$A=B. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Возвысивъ обѣ его части въ квадратъ, найдемъ ур-ніе

$$A^2=B^2, \text{ или } (A-B)(A+B)=0. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Всякій корень ур-нія (1), дѣлая A равнымъ B, обращаетъ разность $(A-B)$ въ ноль, и слѣд. удовлетворяетъ ур-нію (2).

Но послѣднее ур-ніе удовлетворяется еще тѣми значеніями неизвѣстнаго, при которыхъ $A+B$ обращается въ ноль, т. е. корнями новаго ур-нія $A=-B$. Такимъ образомъ не всѣ корни ур-нія (2) необходимо удовлетворяютъ и (1).

Итакъ, рѣшивъ ур-ніе (2), необходимо еще удостовѣриться, удовлетворяютъ ли полученныя рѣшенія ур-нію (1), т.-е. обращаютъ ли эти рѣшенія A и B въ количества одинаковаго знака.

Корни ур-нія $A=-B$ называютъ *посторонними* или *паразитными* рѣшеніями, введенными возвышеніемъ въ квадратъ.

II. Возвышая обѣ части ур-нія $A=B$ въ кубъ, найдемъ: $A^3=B^3$; но это ур. не тождественно данному, ибо содержитъ корни трехъ ур-ній

$$A=B,\ A=B\alpha,\ A=B\alpha^2,$$

гдѣ α одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ единицы.

III. Возвысивъ ур-ніе $A=B$ въ четвертую степень, найдемъ ур. $A^4=B^4$, которое опять общѣе даннаго, ибо удовлетворяется корнями четырехъ уравненій:

$$A=B,\ A=-B,\ A=Bi,\ A=-Bi.$$

IV. Вообще, возвысивъ ур. $A=B$ въ m-ую степень, получимъ ур.:

$$A^m=B^m, \text{ или } (A-B)(A^{m-1}+A^{m-2}B+\ldots+B^{m-1})=0,$$

которое кромѣ корней даннаго ур-нія удовлетворяется еще корнями ур-нія

$$A^{m-1}+A^{m-2}B+\ldots+B^{m-1}=0.$$

Можетъ оказаться, что это послѣднее не содержитъ рѣшеній, отличныхъ отъ корней ур-нія $A=B$; но такой случай исключителенъ.

Покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ примѣненіе этого метода, причемъ главнымъ образомъ обратимъ вниманіе на ур-нія, содержащія радикалы второго порядка.

561. Примѣръ I. — Рѣшить уравненіе $2x+\sqrt{5x-4}=12$, содержащее только одинъ радикалъ.

Изолируя ирраціональный членъ, имѣемъ:

$$\sqrt{5x-4}=12-2x;$$

возвысивъ въ квадратъ и приведя въ порядокъ члены, получимъ:

$$4x^2-53x+148=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Корни этого ур-нія могутъ удовлетворять одному изъ двухъ ур-ній:

$$\sqrt{5x-4}=12-2x \ \ldots\ldots (2),\quad \sqrt{5x-4}=-12+2x \ \ldots\ldots (3)$$

такъ какъ и то, и другое, по возвышеніи въ квадратъ, одинаково даетъ ур-ніе (1). Замѣчая, что въ ур-хъ (2) и (3) передъ радикаломъ находится знакъ $+$, заключаемъ, что и вторыя части ихъ должны быть положительны; слѣд. дѣйствительные корни ур-нія (2) должны удовлетворять неравенству $12-2x>0$, откуда $x<6$; а ур-нія (3) неравенству $-12+2x>0$, откуда $x>6$. Итакъ, предложенному ур-нію могутъ удовлетворять только корни, меньшіе 6.

Рѣшивъ ур-ніе (1), находимъ: $x'=9\frac{1}{4}$, $x''=4$.

x' нужно отбросить, а удержать x''; искомое рѣшеніе: $x=4$.

Въ этомъ примѣрѣ легко провѣрить найденные результаты, хотя, *теоретически, это не необходимо.*

Подстановка $x=4$ въ предложенное ур-ніе даетъ:

$$\sqrt{5\times4-4}=12-2\times4,\ \text{или}\ 4=4.$$

Подстановка $x=9\frac{1}{4}$ въ ур. (3) даетъ: $\sqrt{\frac{37}{4}\times5-4}=-12+\frac{37}{4}\times2$, или $\frac{13}{2}=\frac{13}{2}$.

Другой пріемъ. — Можно рѣшить данное ур. иначе, введеніемъ *вспомогательнаго неизвѣстнаго.* Преобразуемъ ур. такъ, чтобы имѣть въ немъ раціональный членъ $5x-4$; для этого множимъ обѣ части на $\frac{5}{2}$, а потомъ вычитаемъ изъ нихъ по 4. Такимъ образомъ получаемъ тождественное съ даннымъ уравненіе:

$$5x-4+\frac{5}{2}\sqrt{5x-4}=26.$$

Положивъ $\sqrt{5x-4}=y\ldots(4)$, даетъ этому ур-нію видъ $y^2+\frac{5}{2}y=26$, откуда: $y'=4$, $y''=-\frac{13}{2}$. Но буквою y обозначенъ радикалъ положительный, поэтому отбрасываемъ y'' и удерживаемъ $y'=4$. Подставляя во вспомогат. ур. (4) вмѣсто y число 4, получаемъ ур. $\sqrt{5x-4}=4$, затѣмъ $5x-4=16$, откуда $x=4$.

Этотъ способъ позволяетъ безъ труда отличать величины x, удовлетворяющія ур-нію, отъ паразитныхъ корней.

562. Примѣръ II. — Рѣшить ур-ніе $x-1=\sqrt{3x-5}$.

Возведя обѣ части въ квадратъ и приведя въ порядокъ, получаемъ:

$$x^2-5x+6=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Корни этого ур-нія могутъ удовлетворять одному изъ двухъ уравненій: данному и $x-1=-\sqrt{3x-5}$ . . . (2), данному, если эти корни больше 1, и ур-нію $x-1=-\sqrt{3x-5}$, если они меньше 1. Рѣшивъ ур. (1), находимъ: $x'=3$, $x''=2$; оба корня >1, сл. оба удовлетворяютъ данному, но не удовлетворяютъ ур-нію (2), которое, так. обр., не имѣетъ рѣшеній.

563. Примѣръ III. — Рѣшить ур-ніе $x+\sqrt{a^2-x^2}=b$, въ которомъ a и b — дѣйствительныя и положительныя количества.

Изолируя радикалъ, имѣемъ

$$\sqrt{a^2-x^2}=b-x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Возвышая въ квадратъ и приводя въ порядокъ, имѣемъ ур.

$$2x^2-2bx+(b^2-a^2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

изъ котораго:

$$x'=\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \ldots\ldots (3) \qquad x''=\frac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \ldots\ldots (4).$$

Тоже самое ур. (2), и слѣд. тѣже корни (3) и (4) нашлибы и для ур-нія

$$-\sqrt{a^2-x^2}=b-x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Слѣд. дѣйствительные корни ур-нія (1) отличаются тѣмъ признакомъ, что должны удовлетворять условію

$$x<b.$$

Корни (3) и (4) будутъ дѣйствительны при условіи $b^2-2a^2 \leqq 0$; но квадратный относительно b триномъ b^2-2a^2 имѣетъ корни: $a\sqrt{2}$ и $-a\sqrt{2}$; а какъ b положительно и должно заключаться между этими величинами, то необходимое и достаточное условіе дѣйствительности x' и x'' есть

$$b \leqq a\sqrt{2}.$$

Сверхъ того, дѣйствительные корни должны быть меньше b.

Чтобы опредѣлить, какъ b расположено относительно корней ур-нія (2), изслѣдуемъ знакъ подстановки b вмѣсто x въ первую часть ур-нія (2). Результатъ подстановки $=$

$$b^2-a^2.$$

Если $b<a$, эта разность <0, и слѣд. b заключается между корнями x' и x'', а слѣд. меньшій корень $x''<b$, и потому удовлетворяетъ предложенному ур.; другой корень $x'>b$, и сл. удовлетворяетъ ур-нію (5).

Если $b>a$, что совмѣстно съ условіемъ $b \leqq a\sqrt{2}$, то разность b^2-a^2 положительна, и потому b заключается внѣ корней ур. (2), и какъ b больше полусуммы корней $\left(\frac{b}{2}\right)$, ибо b положительно, то b больше обоихъ корней; слѣд. при $a\sqrt{2}>b>a$ оба корня удовлетворяютъ данному ур-нію.

Итакъ, если измѣнять b въ ряду

$$0 \underbrace{\ldots\ldots}_{1} a \underbrace{\ldots\ldots}_{2} a\sqrt{2} \underbrace{\ldots\ldots}_{3} +\infty,$$

то: 1) когда b содержится въ первомъ интервалѣ, данное ур. имѣетъ одно рѣ-

шеніе x''; 2) когда b находится въ интервалѣ 2, данное ур. имѣетъ 2 рѣшенія x' и x''; 3) если $b > a\sqrt{2}$, ур. не имѣетъ дѣйствительныхъ корней.

Въ предѣльныхъ случаяхъ, рѣшенія даннаго ур-нія будутъ:

При $b = 0$ . . . . $x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

« $b = a$ . . . . $x' = a, \quad x'' = 0$;

« $b = a\sqrt{2}$ . . . . $x' = x'' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

564. Когда ур. содержитъ два квадратныхъ радикала, подъ которыми находится неизвѣстное, нужно ихъ изолировать въ одной и той же части ур-нія, возвысить ур. въ квадратъ, затѣмъ изолировать единственный оставшійся радикалъ, и возвысить ур. еще разъ въ квадратъ: въ результатѣ получимъ ур-ніе раціональное. Можно поступать еще такъ: изолируя одинъ изъ радикаловъ, возвышаемъ въ квадратъ, изолируемъ остающійся послѣ этого радикалъ, и снова возвышаемъ ур-ніе въ квадратъ: ур-ніе обратится въ раціональное.

Такъ, если данное ур. будетъ

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = C,$$

то возвысивъ въ квадратъ, найдемъ $A + B + 2\sqrt{AB} = C^2$, или $2\sqrt{AB} = C^2 - A - B$; возвысивъ еще разъ, получимъ

$$4AB = (C^2 - A - B)^2,$$

ур-ніе раціональное; но оно не тождественно данному, ибо можетъ быть удовлетворено корнями какого-либо изъ четырехъ ур-ній:

$$+\sqrt{A} + \sqrt{B} = C, \quad +\sqrt{A} - \sqrt{B} = C, \quad -\sqrt{A} + \sqrt{B} = C, \quad -\sqrt{A} - \sqrt{B} = C,$$

изъ коихъ каждое приводитъ къ ур-нію $4AB = (C^2 - A - B)^2$; необходима, поэтому, провѣрка рѣшеній на данномъ ур-ніи.

565. Примѣръ I. — Рѣшить уравненіе $\sqrt{40 + x} = \sqrt{18 + 2x} + 1$.

Возвысивъ въ квадратъ, находимъ

$$40 + x = 18 + 2x + 2\sqrt{18 + 2x} + 1,$$

или, изолируя радикалъ и дѣлая приведеніе: $21 - x = 2\sqrt{18 + 2x}$; возвысивъ еще разъ въ квадратъ: $441 - 42x + x^2 = 72 + 8x$, или $x^2 - 50x + 369 = 0$, откуда: $x' = 41, \quad x'' = 9$.

Эти корни не необходимо удовлетворяютъ данному ур-нію; они могутъ удовлетворять какому либо изъ ур-ній:

$$\sqrt{40 + x} = \sqrt{18 + 2x} + 1 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\sqrt{40 + x} = -\sqrt{18 + 2x} + 1 \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$-\sqrt{40 + x} = \sqrt{18 + 2x} + 1 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$-\sqrt{40 + x} = -\sqrt{18 + 2x} + 1 \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Во-первыхъ устраняемъ ур. (2), ибо, написавъ его въ видѣ $\sqrt{40 + x} + \sqrt{18 + 2x} = 1$, замѣчаемъ, что при положительномъ x (а таковы x' и x'')

первая часть всегда больше 1. Точно такъ же, ур. (3) не можетъ быть удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x, ибо первая часть его < 0, вторая же > 0. Такимъ образомъ, найденные корни могутъ удовлетворять только ур-мъ (1) и (4). По ур. (1) разность $\sqrt{40+x}-\sqrt{18+2x}$, какъ равная $+1$, должна быть >0; по (4) она д. б. <0. Сл. необходимо, чтобы было: $\sqrt{40+x} > \sqrt{18+2x}$, или $40+x > 18+2x$, или $x < 22$. Слѣд. данному ур-нію удовлетворяетъ $x''=9$; $x'=41$ удовлетворяетъ ур-нію (4). Легко потвердить то и другое прямою подстановкою.

566. Примѣръ II. — Рѣшить ур-ніе

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

въ которомъ a, b и c произвольныя дѣйствительныя количества.

Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, находимъ

$$a+x+b+x+2\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}=c+x,$$

или, изолируя радикалъ и упрощая:

$$2\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}=(c-a-b)-x \quad \ldots\ldots (2).$$

Возвысивъ еще разъ въ квадратъ и приведя въ порядокъ:

$$3x^2+2(a+b+c)x+[4ab-(c-a-b)^2]=0 \quad \ldots (3).$$

Рѣшивъ ур-ніе (3), находимъ:

$$x=\frac{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}.$$

Корни будутъ дѣйствительны при условіи

$$c^2-(a+b)c+a^2+b^2-ab \gtrless 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Чтобы изслѣдовать это неравенство, посмотримъ, будутъ-ли корни тринома въ c дѣйствительны или мнимы, составивъ для этого разность $(a+b)^2 - 4(a^2+b^2-ab)$, которая приводится къ $-3(a-b)^2$; слѣд. корни тринома въ c мнимы, а потому онъ всегда положителенъ, а корни ур. (3) всегда дѣйствительны.

Изслѣдуемъ, удовлетворяютъ-ли они ур-нію (1), а для этого замѣтимъ, что прежде всего они должны удовлетворять ур-нію (2); но всякій дѣйствительный корень ур нія (2) долженъ быть меньше $c-a-b$; поэтому, нужно убѣдиться, имѣетъ-ли ур. (3) корни, меньшіе $c-a-b$. Въ этихъ видахъ въ триномъ (3) подставимъ вмѣсто x количество $c-a-b$; результатъ подстановки $=$

$$c^2-(a+b)c+ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Триномъ (5) имѣетъ дѣйствительные корни a и b. Если c будетъ заключаться между a и b, то триномъ (5) будетъ отрицателенъ; если же c будетъ лежать внѣ интервалла между a и b, триномъ (5) будетъ положителенъ. Итакъ: *когда c заключается между a и b*, результатъ подстановки количества $c-a-b$ вмѣсто x въ триномъ (3) отрицателенъ, а патому $c-a-b$ содержится между корнями этого тринома, т. е. *одинъ и только одинъ изъ корней ур-нія* (3) *будетъ меньше* $c-a-b$, и по-

тому будетъ *удовлетворять ур-нію* (3). Если c лежитъ внѣ интервалла между a и b, триномъ (5) будетъ положителенъ, слѣд. $c-a-b$ будетъ заключаться внѣ корней ур-нія (3), т. е. или оба корня $>c-a-b$, или оба они $<c-a-b$. Какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, — это зависитъ отъ сравнительной величины $c-a-b$ съ полусуммою корней ур. (3), т. е. съ $-\frac{1}{3}(a+b+c)$. Если будетъ $c-a-b<-\frac{a+b+c}{3}$, или $c<\frac{a+b}{2}$, то $c-a-b$ будетъ $<$ обоихъ корней, т. е. когда c меньше количествъ a и b, оба корня больше $c-a-b$, и потому не удовлетворяютъ ур-нію (2). Если же $c-a-b>-\frac{a+b+c}{3}$, т. е. если c больше количествъ a и b, оба корня будутъ меньше $c-a-b$, и потому оба удовлетворяютъ ур-нію (2).

Но если какой-либо изъ корней ур. (3) удовлетворяетъ ур-нію (2), то онъ служитъ корнемъ одного изъ ур-ній

$$+\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=+\sqrt{c+x}\ \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$-\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}=+\sqrt{c+x}\ \ldots\ldots\ldots (7)$$

ибо передъ удвоеннымъ произведеніемъ радикаловъ въ ур-ніи (2) находится знакъ $+$; но очевидно, что никакой дѣйствительный корень не можетъ удовлетворять ур-нію (7), слѣд. онъ удовлетворяетъ ур-нію (6).

Итакъ, если напр. $a<b$:

$$-\infty\underbrace{\ldots\ldots}_{1}a\underbrace{\ldots\ldots}_{2}b\underbrace{\ldots\ldots}_{3}+\infty$$

то предыдущее изслѣдованіе приводитъ къ такимъ заключеніямъ: 1) когда c находится въ интерваллѣ 1, ни одинъ изъ корней ур-нія (3) не удовлетворяетъ данному; 2) когда c находится въ интерваллѣ 2, данному ур. удовлетворяетъ меньшій корень ур-нія (3); 3) когда c находится въ интерваллѣ 3, оба корня ур. (3) удовлетворяютъ данному.

567. Что касается провѣрки корней, то иногда ее можно дѣлать и другими пріемами. Пусть, напр., требуется рѣшить ур-ніе

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}.$$

Возвышая первый разъ въ квадратъ, найдемъ: $2\sqrt{a^2-x^2}=-a$; возвысивъ въ квадратъ другой разъ, получимъ: $4a^2-4x^2=a^2$, или $x^2=\frac{3}{4}a^2$, откуда $x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Подставляя *то или другое* значеніе x въ данное ур., одинаково находимъ, по сокращеніи на $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

Такъ какъ обѣ части этого равенства положительны, то для провѣрки его можемъ ихъ возвысить въ квадратъ; находимъ $1+1+1=1$, что невѣрно, слѣд. ни одинъ изъ корней не удовлетворяетъ данному ур-нію. Но если въ немъ передъ вторымъ радикаломъ взять $-$, то получится $1-1+1=1$,

что вѣрно. Заключаемъ, что найденные корни принадлежатъ ур-нію $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a}$.

568. — Для провѣрки рѣшеній можно иногда съ успѣхомъ примѣнять преобразованіе сложнаго радикала въ алгебраическую сумму простыхъ радикаловъ. Пусть требуется рѣшить ур-ніе

$$x + \sqrt{x} = a$$

и провѣрить рѣшенія. Изолируя радикалъ, имѣемъ $\sqrt{x} = a - x$, а возвышая въ квадратъ, получаемъ

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0.$$

Корни этого ур-нія, которое общѣе даннаго, дѣйствительны при условіи $(2a+1)^2 - 4a^2 \geqq 0$, или $a \geqq -\frac{1}{4}$. Полагая это условіе выполненнымъ, находимъ 2 дѣйствительныхъ корня:

$$x' = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}, \qquad x'' = \frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Написавъ предложенное ур-ніе въ видѣ $\sqrt{x} = a - x$, подставляемъ первый корень x'; въ первой части получается сложный радикалъ, который разлагаемъ на два простыхъ:

$$\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1+2\sqrt{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2}}.$$

Когда $a > 0$ и равно $+\alpha$, то $\sqrt{a^2} = +\alpha$; если же $a < 0$ и равно $-\alpha$, то $\sqrt{a^2} = -\alpha$; но легко видѣть, что въ обоихъ случаяхъ

$$\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}.$$

Вторая же часть $a - x$ ур-нія обращается въ

$$a - \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a+1};$$

заключаемъ, что x', не дѣлая обѣ части ур-нія $\sqrt{x} = a - x$ равными, не удовлетворяетъ этому ур-нію; но легко видѣть, что этотъ корень удовлетворяетъ ур-нію $x - \sqrt{x} = a$.

Подстановка втораго корня x'' даетъ въ первой части ур-нія $\sqrt{x} = a - x$:

$$\sqrt{\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1+2\sqrt{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2}}.$$

При $a > 0$, это выраженіе приводится къ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; при $a < 0$ къ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; между тѣмъ какъ вторая часть, $a - x''$, даетъ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; заключаемъ, что x'' удовлетворяетъ предложенному ур-нію только при $a > 0$. Итакъ:

при $a < -\frac{1}{4}$ корни ур-нія мнимы;

при $-\frac{1}{4} < a < 0$ ур-ніе не имѣетъ рѣшеній;

при $a > 0$ оно имѣетъ 1 корень, равный $\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$

569. — При рѣшеніи ирраціональныхъ ур-ній, какъ и всегда, слѣдуетъ пользоваться всѣми средствами, ведущими къ упрощенію вычисленій; въ этомъ отношеніи съ успѣхомъ примѣняются иногда и нѣкоторые искуственные пріемы.

1. Такъ для рѣшенія ур-нія

$$\frac{\sqrt{5x-4}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{5-x}}=\frac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{4x}-1}$$

примѣняемъ свойство пропорціи (§ 328, II, (10)), и тотчасъ получаемъ, по сокращеніи на 2: $\frac{\sqrt{5x-4}}{\sqrt{5-x}}=\sqrt{4x}$, откуда, по возвышеніи въ квадратъ и по освобожденіи отъ знаменателя: $5x-4=20x-4x^2$, или $4x^2-15x-4=0$. Легко провѣрить, что оба корня этого ур-нія: $x'=4$, $x''=-\frac{1}{4}$ удовлетворяютъ данному ур-нію.

2. Рѣшить ур-ніе $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$.

Примѣняя пріемъ, указанный въ § 561, прибавляемъ къ обѣимъ частямъ ур-нія по 18, и въ ур-ніи

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}=42$$

полагаемъ $\sqrt{x^2-7x+18}=y$; рѣшивъ ур-ніе въ y

$$y^2+y-42=0,$$

находимъ корни: $y'=6$, $y''=-7$. Отбрасывая второй, ибо въ данномъ ур-ніи передъ радикаломъ стоитъ знакъ $+$, получаемъ ур-ніе: $\sqrt{x^2-7x+18}=6$, откуда $x^2-7x-18=0$. Легко видѣть, что корни этого ур-нія: $x'=9$, $x''=-2$ удовлетворяютъ данному ур-нію.

3. Пусть еще требуется рѣшить ур-ніе

$$(x+2)^2+2\sqrt{x}(x+2)-3\sqrt{x}=46+2x;$$

это ур. легко привести къ виду: $x^2+2x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}=42$, или

$$(x+\sqrt{x})^2+(x+\sqrt{x})=42 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha)$$

Положивъ $x+\sqrt{x}=y$, получаемъ ур-ніе $y^2+y-42=0$, имѣющее корни $y'=6$, $y''=-7$. Затѣмъ рѣшаемъ ур-нія $x+\sqrt{x}=6$, или $x^2-13x+36=0$, и $x+\sqrt{x}=-7$, или $x^2+13x+49=0$. Первое имѣетъ корни 9 и 4; второе $\frac{-13\pm3\sqrt{3}\,.\,i}{2}$ Повѣрка покажетъ, что изъ нихъ ур-нію (α) удовлетворяютъ только 4 и $-\frac{13+3\sqrt{3}\,.\,i}{2}$.

Примѣчаніе. Для повѣрки корня $-\frac{13+3\sqrt{3}\,.\,i}{2}$ преобразовываемъ

$$\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\,.\,i}\text{ по формулѣ § 440,6, въ }\frac{3\sqrt{3}+i}{2},$$

а слѣдовательно $\sqrt{-\frac{13+3\sqrt{3}\,.\,i}{2}}$ въ $\frac{3\sqrt{3}\,.\,i-1}{2}$ и подставляемъ въ (α).

570. Приводимъ, въ заключеніе, примѣры на ирраціональныя ур-нія, содержащія радикалы выше втораго порядка.

1. Рѣшить ур. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$.

Возвышаемъ обѣ части въ кубъ, примѣняя формулу $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$; получаемъ:

$$a+x+a-x+3\sqrt[3]{a^2-x^2}(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x})=2a.$$

Приводя и замѣчая, что выраженіе въ скобкахъ, въ силу даннаго ур., равно $\sqrt[3]{2a}$, находимъ ур.

$$3\sqrt[3]{a^2-x^2}\,.\,\sqrt[3]{2a}=0,\text{ или }\sqrt[3]{a^2-x^2}=0,\text{ откуда }a^2-x^2=0,$$

слѣд. $$x=\pm a.$$

Оба корня удовлетворяютъ предложенному ур-нію.

2. Рѣшить ур-ніе $\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left(\frac{1-a^2}{(1+a)^2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Сокративъ дробь второй части на $1+a$; положивъ, затѣмъ, $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=y$, и слѣд. $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{y}$, получаемъ ур-ніе

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y+\frac{1}{y}=2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}},\text{ или }\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y^2-2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y+1=0,$$

откуда

$$y=\sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Такимъ образомъ получаемъ ур. въ x: $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$, или $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+a}{1-a}$, откуда $x=-a$.

Корень этотъ удовлетворяетъ предложенному ур-нію.

3. Рѣшить ур-ніе

$$\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(x-\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=97x^{\frac{2}{3}}-\frac{1300}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Выполнивъ умноженіе въ первой части, освободивъ ур. отъ знаменателя и приведя въ порядокъ, находимъ:

$$x^{\frac{8}{3}} - 97x^{\frac{4}{3}} + 1296 = 0.$$

Это ур. — квадратное относительно $x^{\frac{4}{3}}$ — даетъ: $x^{\frac{4}{3}} = 81$; $x^{\frac{4}{3}} = 16$, откуда:

$$x^4 = 81^3 = (3^4)^3 = (3^3)^4 = 27^4; \quad x^4 = 16^3 = (2^4)^3 = (2^3)^4 = 8^4.$$

Рѣшивъ оба двучленныя ур-нія четвертой степени, находимъ 8 корней:

$$\pm 27; \quad \pm 27i; \quad \pm 8; \quad \pm 8i.$$

571. Задачи.

Рѣшить ур-нія:

1. $\frac{2}{\sqrt{2+x}+2} - \frac{2}{\sqrt{2-x}-2} = -\frac{16}{x^2-4}$. 2. $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}$.

3. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5\sqrt{x}$. 4. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{7x-27} = \sqrt{3x+4}$.

5. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} = 10$. 6. $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-19} = \sqrt{3x+4}$.

7. $\sqrt{x+17} + \sqrt{x-4} = \frac{7}{4}\sqrt{2x}$. 8. $\sqrt{12+x} = \sqrt{7x+8} - 2$.

9. $\frac{5x-1}{\sqrt{5x}+1} = 1 + \frac{\sqrt{5x}-1}{2}$. 10. $\frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}} + 3\sqrt{2x+1} = 7\sqrt{x}$.

11. $\frac{\sqrt{3x^3-15x^2-8x+4} - \sqrt{x^2-5x-2}}{\sqrt{3x^3-15x^2-8x+4} + \sqrt{x^2-5x-2}} = \frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{3x-2}+1}$.

12. $\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{3}{\sqrt{x+x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{1+x}$. 13. $2(1+\frac{9}{x}) + 3\sqrt{\frac{x+9}{x}} = 14$.

14. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$. 15. $\sqrt{28+2x} = \sqrt{21+x} + 1$.

16. $\sqrt{2x+7} + \sqrt{5x-9} = 3\sqrt{x}$. 17. $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} = \sqrt{5x-27}$.

18. $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-6}$. 19. $3\sqrt{x+15} = 7\sqrt{x-5} - 5\sqrt{x-17}$.

20. $2x^2 - 15 = 4[\sqrt{x^2+12x-20} - 6x]$. 21. $x^2 - \sqrt{2x^2-8x+12} = 4x+6$.

22. $x + 4 + \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{12}{x-4}$. 23. $\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$.

24. $3x^2 - 307 = 4(\sqrt{x^2-4x+4} + 3x)$.

25. $6x^2 + 15x - 49 = \sqrt{2x^2+5x+7}$. 26. $60 - 4\sqrt{x^2+x+6} = x^2 + x + 6$.

27. $x^2 - 24 = 3\sqrt{x^2-2x+16} + 2x$. 28. $5x - 7x^2 + 8\sqrt{7x^2-5x+4} = 8$.

29. $\frac{5(3x-1)}{1+5\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x}$. 30. $\frac{x}{3+x} + \frac{3}{\sqrt{3+x}} = \frac{4}{x}$.

31. $\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3} = \frac{20 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}$ 32. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + 5 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{9}{2}$.

33. $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$.

34. $\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=2\frac{1}{2}$.

35. $8\sqrt{x}+21\sqrt[4]{x}=74$.

36. $\frac{9\frac{3}{5}-\frac{3}{2}\sqrt{x}-x}{5\sqrt{x}-8}+\frac{31}{50}=\frac{4}{5}\cdot\frac{\frac{74}{5}\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}}{4x-7}$.

37. $x^3-26=9\sqrt{x^2-4}$.

38. $x^3-x\sqrt{x}=15500$.

39. $\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17}=6$.

40. $ab\sqrt{a-x}=(a-x)\sqrt{x}$.

41. $x-(a+b)\sqrt{x}=2a(a-b)$.

42. $x+cd=(c+d)\sqrt{x}+2(c-d)^2$.

43. $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=a$.

44. $\sqrt{x}+\sqrt{a-\sqrt{ax+x^2}}=\sqrt{a}$.

45. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{\frac{3b^2+x^2}{a+b}}$.

46. $\sqrt{a-x}+\sqrt{-(a^2+ax)}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}$.

47. $x+a\sqrt{x^2-b^2}=-\frac{ax^2+ab^2}{\sqrt{x^2-b^2}}$.

48. $\frac{a}{x+\sqrt{x^2-a+b}}-\frac{a}{x-\sqrt{x^2-a+b}}=x$.

49. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x-b}}=\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{x-b}}$.

50. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

51. $\frac{\sqrt{3a-4b+5x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{3a-4b+5x}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{x+a}{5(x-b)}}$.

52. $\frac{\sqrt{a+3b+x}+\sqrt{9a+11b-7x}}{\sqrt{a+3b+x}-\sqrt{9a+11b-7x}}=\sqrt{\frac{3a+b-x}{2(a+3b-x)}}$.

53. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}$.

54. $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}}-\sqrt{\frac{b-x}{a-x}}=c$.

55. $\frac{x^2}{8a}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4}-\frac{a}{2}}$.

56. $\sqrt{6x-a}+4x-3a=0$.

57. $x+\sqrt{2x-a^2}=3a$.

58. $2x-\sqrt{x^2-a^2}=4a$.

59. $\sqrt{x^2-3ax+a^2}+\sqrt{x^2+3ax+a^2}=a(\sqrt{29}+\sqrt{10})$.

60. $\sqrt{(1+x)^2-ax}+\sqrt{(1-x)^2+ax}=x$.

61. $(a+b)\sqrt{a^2+b^2+x^2}-(a-b)\sqrt{a^2+b^2-x^2}=a^2+b^2$.

62. $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}$.

63. $\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{x}{a}}=\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$.

64. $\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{x}{a-x}$

65. $\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{c}{x}$.

66. $x+2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x}+10ab=0$.

67. $\sqrt{(x-a)(x-b)}+\sqrt{(x-c)(x-a+b-c)}=\sqrt{(a-c)\,(b-c)}.$

68. $(\sqrt{a^2-4x^2}+a+2x)\,.\,5x=(a+2x-\sqrt{a^2-4x^2})a.$

69. $\sqrt[3]{x}+7\sqrt[3]{x^2}=350.$

70. $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2.$

71. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{-x}=n(n+1).$

72. $\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a-b}.$

73. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}.$

74. $\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=\sqrt[3]{a^2}.$

75. $5m\sqrt{x^2-\frac{2(a+m)^2x}{5m}}+\frac{\frac{1}{5}(m^2-a^2)^2\,.\,m^{-1}}{\sqrt{x^2-\frac{2(a+m)^2x}{5m}}}=2(a^2+m^2).$

76. $3x^n\;.\;\sqrt[3]{x^n}+\frac{2x^n}{\sqrt[3]{x^n}}=16.$

77. $x^{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{x^3}-6280x^{\frac{1}{5}}\sqrt[15]{x^4}=1843641.$

78. $\sqrt[4]{x+9}-\sqrt[4]{x-7}=2.$

79. $\sqrt[4]{26-x}+\sqrt[4]{x-10}=2.$

80. $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{c}.$

81. $\sqrt[2pq]{x^{p+q}}-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cdot\left\{\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}\right\}=0.$

82. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{x-b}.$

83. $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$

ГЛАВА XXXVII.

Системы уравненій второй степени и высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

Системы уравненій, изъ которыхъ одно второй, остальныя—первой степени.—Системы двухъ уравненій второй степени.—Системы уравненій второй степени болѣе чѣмъ съ двумя неизвѣстными.—Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

572. Уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными x и y есть цѣлое раціональное ур-ніе, содержащее члены: съ квадратами обоихъ неизвѣстныхъ, съ ихъ произведеніемъ, съ первыми степенями неизвѣстныхъ, и члены, независящіе отъ неизвѣстныхъ; слѣд. это есть ур-ніе вида

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Подобно этому, общій видъ ур-нія второй степени съ тремя неизвѣстными есть

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0$$

и т. д.

Системою уравненій второй степени съ двумя или нѣсколькими неизвѣстными называютъ такую систему, въ которой по крайней мѣрѣ одно ур-ніе— второй степени, а остальныя—первой или второй степени.

I. Системы ур-ній, изъ которыхъ одно — второй степени.

573. Система ур-ній съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно—второй, а другое—первой степени, имѣетъ видъ:

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ Lx+My+N=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2). \end{cases}$$

Выражая изъ (2) y въ зависимости отъ x, имѣемъ

$$y=-\frac{Lx+N}{M}.$$

Внося это значеніе въ ур. (1), получимъ:

$$Ax^2-\frac{Bx(Lx+N)}{M}+\frac{C(Lx+N)^2}{M^2}+Dx-\frac{E(Lx+N)}{M}+F=0.$$

Выполняя дѣйствія, располагая члены по степенямъ x и полагая для краткости

$$P=AM^2-BLM+CL^2,\ Q=-BMN+2CLN+DM^2-ELM,$$
$$R=CN^2-EMN+FM^2,$$

замѣняемъ данную систему ей тождественною:

$$Px^2+Qx+R=0,\ y=-\frac{Lx+N}{M}.$$

Первое ур-ніе дастъ для x два значенія: x' и x''; внося ихъ поочередно во второе ур., найдемъ соотвѣтствующія значенія для y: y' и y''. Итакъ, данная система ур-ній имѣетъ двѣ системы рѣшеній:

$$x=x',\ y=y' \text{ и } x=x'',\ y=y''.$$

Эти рѣшенія будутъ мнимы, если $Q^2-4PR<0$; представятъ двѣ дѣйствительныя системы при $Q^2-4PR>0$; и сливаются въ одну систему рѣшеній при $Q^2-4PR=0$.

Примѣръ. — Рѣшить систему

$$5x^2-8xy+y^2-7x+5y+4=0,$$
$$6x-y-4=0.$$

Изъ втораго ур-нія имѣемъ: $y=6x-4$; подставляя это значеніе y въ первое ур., находимъ: $7x^2-7x=0$, откуда: $x'=0$, $x''=1$. При $x'=0$ имѣемъ $y'=-4$; при $x''=1$ получаемъ $y''=2$. Итакъ находимъ двѣ системы рѣшеній:

$$x'=0,\ y'=-4;\ x''=1,\ y''=2.$$

574. Пусть дана система n ур-ній съ n неизвѣстными, и пусть одно изъ этихъ ур-ній — второй степени, а остальныя — первой. При помощи $n-1$

ур-ній первой степени можно $n-1$ неизвѣстныхъ выразить черезъ n-ое; такимъ образомъ получится $n-1$ новыхъ ур-ній 1-й степдни вида

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= a'x + b' \\ u &= a''x + b'' \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Внося всѣ эти значенія въ ур-ніе второй степени, получимъ квадратное ур. съ неизвѣстнымъ x; изъ него найдемъ для x два значенія: x' и x''. Каждому изъ этихъ значеній соотвѣтствуетъ своя система значеній неизвѣстныхъ y, z, u,... Данныя ур-нія имѣютъ двѣ системы значеній.

Примѣръ. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} x^2 + 3z^2 + 2yz - 10xy - 2x + 5y - 25 &= 0, \\ 5x + 22y + 7z &= 4, \\ 21x - 7y + z &= 31. \end{aligned}$$

Выражая изъ двухъ послѣднихъ ур-ній y и z черезъ x, имѣемъ:

$$y = 2x - 3,\ z = -7x + 10;$$

внося въ первое ур-ніе, находимъ квадратное ур. въ x:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда: $x' = 1$, $x'' = 2$. Слѣд. рѣшенія предложенной системы будутъ:

$$x' = 1,\ y' = -1,\ z' = 3;\ \text{и}\ x'' = 2,\ y'' = 1,\ z'' = -4.$$

575. Разсмотримъ рѣшеніе нѣкоторыхъ замѣчательныхъ системъ, прилагая особые искусственные пріемы, болѣе изящные, нежели указанный общій пріемъ.

I. Рѣшить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b^2 \end{aligned}\right\}.$$

Такъ какъ здѣсь дается сумма и произведеніе неизвѣстныхъ, то послѣднія опредѣлятся какъ корни квадратнаго ур-нія, имѣющаго коэффиціентомъ при первой степени неизвѣстнаго количество $-a$, а извѣстнымъ членомъ b^2:

$$z^2 - az + b^2 = 0,$$

откуда

$$z' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2},\ z'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Одно значеніе z принимаемъ за x, другое за y; такимъ образомъ получаемъ двѣ системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y' = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{cases} \text{и} \begin{cases} x'' = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y'' = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{cases}.$$

Что такъ должно быть, понятно à priori, ибо x и y въ данныя уравненія входятъ одинаковымъ образомъ.

Другой пріемъ. Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ, имѣемъ: $x^2+2xy+y^2=a^2$; помноживъ второе ур. на 4 и вычтя изъ предыдущаго, находимъ: $x^2-2xy+y^2=a^2-4b^2$, или $(x-y)^2=a^2-4b^2$; откуда: $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b^2}$. Такимъ образомъ, предложенная система можетъ быть замѣнена двумя ей тождественными:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\sqrt{a^2-4b^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x-y=-\sqrt{a^2-4a^2} \end{cases}.$$

Рѣшая ту и другую, найдемъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

II. Рѣшить систему

$$x-y=a$$
$$xy=b^2.$$

Легко эту систему привести къ предыдущей: стоитъ только положить $y=-y'$. Таким образомъ получимъ ур-нія

$$x+y'=a,\ xy'=-b^2,$$

изъ которыхъ видно, что x и y' суть корни ур-нія

$$z^2-az-b^2=0,$$

слѣд.: вторая система имѣетъ рѣшенія:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x&=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \\ y'&=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \end{aligned}.$$

Подставляя сюда y вмѣсто $-y'$, найдемъ рѣшенія предложенной системы:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \\ y=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x&=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \\ y&=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \end{aligned}.$$

Другой пріемъ. Возводя первое изъ данныхъ ур-ній въ квадратъ, умножая второе на 4, и складывая, получаемъ

$$(x+y)^2=a^2+4b^2,\ \text{откуда}\ x+y=\pm\sqrt{a^2+4b^2}.$$

Такимъ образомъ предложенная система замѣняется двумя:

$$\begin{cases} x-y=a \\ x+y=+\sqrt{a^2+4b^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y=a \\ x+y=-\sqrt{a^2+4b^2} \end{cases},$$

изъ которыхъ и находимъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

III. Рѣшить систему

$$x^2+y^2=a^2$$
$$x+y=b.$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ чачти втораго ур-нія, имѣемъ $x^2+2xy+y^2=b^2$; вычитая изъ этого ур-нія почленно первое, имѣемъ: $2xy=b^2-a^2$, откуда

$$xy=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Такимъ образомъ извѣстны: сумма b и произведеніе $\frac{b^2-a^2}{2}$ неизвѣстныхъ x и y; слѣд. x и y суть корни ур-нія

$$z^2-bz+\frac{b^2-a^2}{2}=0.$$

Итакъ, имѣемъ двѣ системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x=\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \\ y=\frac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=\frac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \\ y=\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}. \end{cases}$$

IV. Рѣшить систему

$$x^2+y^2=a^2$$
$$x-y=b.$$

Рѣшеніе этой системы приводится къ предыдущей; ибо, положивъ $y=-y'$, получаемъ систему

$$x^2+y'^2=a^2,\ x+y'=b,$$

откуда прямо можемъ написать обѣ системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x=\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}, \\ y=-y'=\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}, \\ y=-y'=\frac{-b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}. \end{cases}$$

V. Рѣшить систему

$$x^2-y^2=a^2$$
$$x+y=b.$$

Исключивъ y, найдемъ ур-ніе $2bx-b^2=a^2$ — первой степени; изъ него

$$x=\frac{a^2+b^2}{2b}, \text{ и слѣдовательно } y=\frac{b^2-a^2}{2b}.$$

Можно рѣшить эту систему еще такъ: замѣчая, что $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, мы, раздѣливъ первое ур. на второе, найдемъ ур.

$$x-y=\frac{a^2}{b};$$

комбинируя это ур-ніе съ ур-мъ $x+y=b$, найдемъ x и y.

Подобнымъ же образомъ рѣшается система

$$x^2-y^2=a^2$$
$$x-y=b.$$

II. Система двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.

576. *Вообще, система двухъ ур-ній второй степени съ двумя неизвѣстными приводитъ къ полному ур-нію четвертой степени.*

Пусть данная система будетъ:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \ \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0 \ \ldots\ldots\ldots (2)$$

Исключимъ сначала y^2, умноживъ ур. (1) на c', (2) на c и вычтя почленно одно ур. изъ другаго; найдемъ ур-ніе

$$(ac'-ca')x^2+(bc'-cb')xy+(dc'-cd')x+(ec'-ce')y+fc'-cf'=0,$$

или, обозначивъ каждый изъ коэффиціентовъ одною буквою:

$$lx^2+mxy+nx+py+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Это ур-ніе, въ сочетаніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (1), составитъ новую систему, тождественную съ данною. Изъ ур. (3) находимъ

$$y=-\frac{lx^2+nx+q}{mx+p};$$

подставивъ это значеніе y въ ур. (1), получимъ

$$ax^2-\frac{bx(lx^2+nx+q)}{mx+p}+\frac{c(lx^2+nx+q)^2}{(mx+p)^2}+dx-\frac{e(lx^2+nx+q)}{mx+p}+f=0.$$

Освободивъ это ур. отъ дробей, выполнивъ всѣ вычисленія и приведя въ порядокъ, получимъ, вообще, *полное* ур. четвертой степени:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

которое, въ соединеніи съ (3), составляетъ систему, тождественную данной. Полное ур. четвертой степени (4) въ общемъ видѣ не можетъ быть рѣшено способами элементарной алгебры; мы можемъ рѣшать ур-ніе 4-й ст. только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, когда напр. оно биквадратное, или возвратное, или степень его понижается до второй; въ такихъ случаяхъ безъ труда найдемъ четыре значенія для x: подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. (3), получимъ четыре соотвѣтствующія значенія для y.

Такимъ образомъ, данная система принимаетъ, вообще, четыре рѣшенія.

Примѣръ. — Рѣшить систему

$$x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Исключивъ y^2, получимъ ур-ніе

$$x^2-10xy+6x-18y+21=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

изъ котораго

$$y=\frac{x^2+6x+21}{10x+18} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3').$$

Подставивъ найденное для y выраженіе (3′) въ ур. (1), находимъ

$$x^4-10x^2+9=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ур-ніе, составляющее съ (3) систему, тождественную предложенной.

Но ур. (4) — биквадратное; рѣшивъ его, получимъ для x четыре значенія

$$x^{\mathrm{I}}=1,\quad x^{\mathrm{II}}=-1,\quad x^{\mathrm{III}}=3,\quad x^{\mathrm{IV}}=-3.$$

Вычисливъ, по формулѣ (3′), соотвѣтствующія значенія y, найдемъ

$$y^{\mathrm{I}}=1,\quad y^{\mathrm{II}}=2,\quad y^{\mathrm{III}}=1,\quad y^{\mathrm{IV}}=-1.$$

Итакъ, данная система имѣетъ четыре рѣшенія:

$$\begin{cases}x^{\text{I}}=1\\ y^{\text{I}}=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x^{\text{II}}=-1\\ y^{\text{II}}=\ \ 2\end{cases}\qquad \begin{cases}x^{\text{III}}=3\\ y^{\text{III}}=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x^{\text{IV}}=-3\\ y^{\text{IV}}=-1.\end{cases}$$

577. Когда одно изъ ур-ній разлагается на два раціональныхъ множителя первой степени, то рѣшеніе всегда можно привести къ квадратнымъ ур-мъ.

Въ самомъ дѣлѣ, выразивъ изъ ур-нія (1) § 576 y по x, имѣемъ:

$$y=\frac{-(bx+e)\pm\sqrt{(bx+e)^2-4c(ax^2+dx+f)}}{2c}.$$

Расположивъ подрадикальное выраженіе по степенямъ x, получимъ

$$(b^2-4ac)x^2+2(be-2cd)x+e^2-4cf;$$

оно будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$(be-2cd)^2=(b^2-4ac)(e^2-4cf);$$

какъ скоро это условіе существуетъ, значенія y будутъ раціональны:

$$y=\frac{-bx-e\pm(\mathrm{P}x+\mathrm{Q})}{2c},$$

гдѣ $\mathrm{P}x+\mathrm{Q}$ есть $\sqrt{\ }$ изъ подрадикальнаго выраженія; имѣемъ

$$y'=\frac{(\mathrm{P}-b)x+\mathrm{Q}-e}{2c},\qquad y''=-\frac{(\mathrm{P}+b)x+\mathrm{Q}+e}{2c};$$

слѣд. ур. (1) можно представить въ видѣ $c(y-y')(y-y'')=0$; слѣд. это ур. будетъ удовлетворено, во-первыхъ, значеніями x и y, удовлетворяющими ур-нію

$$y=\frac{(\mathrm{P}-b)x+\mathrm{Q}-e}{2c}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3),$$

а во-вторыхъ, такими значеніями, которыя, обращая въ ноль $y-y''$, удовлетворяютъ ур-нію

$$y=-\frac{(\mathrm{P}+b)x+\mathrm{Q}+e}{2c}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4),$$

такъ что вопросъ сводится къ рѣшенію двухъ системъ: (2), (3) и (2), (4); каждая изъ нихъ составлена изъ ур-нія 1-й ст. и ур-нія 2-й ст., а потому приведетъ къ ур-нію 2-й ст. въ x, для котораго и получится 4 значенія; подставляя ихъ въ ур-нія (3) и (4), найдемъ соотвѣтствующія значенія y.

Примѣръ. — Рѣшить систему

$$\begin{aligned}2x^2-5xy+3y^2+3x-2y-5&=0,\\ x^2+\ xy-\ y^2+\ x-\ y-6&=0.\end{aligned}$$

Изъ перваго имѣемъ

$$y=\frac{5x+2\pm\sqrt{x^2-16x+64}}{6}=\frac{5x+2\pm(x-8)}{6},$$

откуда

$$y=x-1,\quad y=\frac{2x+5}{3}.$$

Подставляя вмѣсто y его величину $x-1$ во второе данное ур-ніе, получаемъ: $x^2+x-6=0$, откуда $x'=2$, $x''=-3$; а соотвѣтствующія значенія y: $y'=1$, $y''=-4$.

Для $y=\frac{2x+5}{3}$ имѣемъ ур-ніе $x^2-2x-94=0$, изъ котораго $x^{III}=3{,}015$ и $x^{IV}=-2{,}834$; а соотв. значенія y: $y^{III}=3{,}677$ и $y^{IV}=-0{,}224$. Итакъ данная система имѣетъ рѣшенія:

$$\begin{cases}x^{I}=2\\ y^{I}=1\end{cases},\quad \begin{cases}x^{II}=-3\\ y^{II}=-4\end{cases},\quad \begin{cases}x^{III}=3{,}015\\ y^{III}=3{,}677\end{cases}\quad \text{и}\quad \begin{cases}x^{IV}=-2{,}834\\ y^{IV}=-0{,}224.\end{cases}$$

578. Когда одно изъ ур-ній *однородно* по отношенію къ x и y, можно пользоваться слѣдующимъ пріемомъ. Пусть, напр., ур. (1) § 576 однородно, т. е. приводится къ

$$ax^2+bxy+cy^2=0,$$

то, раздѣливъ всѣ его члены на y^2, дадимъ ему видъ:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\,.\,\frac{x}{y}+c=0.$$

Рѣшая это квадратное относительно $\frac{x}{y}$ ур-ніе, найдемъ для отношенія $\frac{x}{y}$ два значенія: $\frac{x}{y}=m$, $\frac{x}{y}=m'$, откуда

$$x=my,\qquad x=m'y.$$

Комбинируя каждое изъ этихъ ур-ній со (2), получимъ двѣ системы, изъ коихъ каждая состоитъ изъ одного ур-нія 1-й ст. и одного 2-й степени.

Примѣръ. — Рѣшить систему

$$3x^2+13xy-10y^2=0\ \ldots\ldots\ (1)$$
$$2x^2+3xy-y^2+x+5y-34=0\ \ldots\ldots\ (2).$$

Ур. (1) даетъ: $x=\frac{2}{3}y$ и $x=-5y$. Комбинируя первое изъ этихъ ур-ній со (2), находимъ два рѣшенія

$$x'=2,\quad y'=3\quad \text{и}\quad x''=-4,\quad y''=-6.$$

Рѣшая систему, образуемую ур-мъ (2) съ $x=-5y$, находимъ еще два рѣшенія

$$x^{III}=5,\quad y^{III}=-1\quad \text{и}\quad x^{IV}=-5,\quad y^{IV}=1.$$

Не останавливаясь далѣе на этихъ частностяхъ, не имѣющихъ, къ тому-же, большихъ приложеній въ начальной алгебрѣ, перейдемъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ замѣчательныхъ простыхъ системъ, часто встрѣчающихся въ приложеніяхъ.

579. Рѣшить систему

$$x^2+y^2=a,\qquad xy=b.$$

Умноживъ второе на 2 и сложивъ съ первымъ, а потомъ вычтя изъ перваго, находимъ

$$x^2+2xy+y^2=a+2b,\quad \text{или}\quad (x+y)^2=a+2b\ \ldots\ldots\ (1)$$
$$\text{и}\quad x^2-2xy+y^2=a-2b,\quad \text{или}\quad (x-y)^2=a-2b\ \ldots\ldots\ (2).$$

Изъ ур-ній (1) и (2) находимъ

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b},\qquad x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

Отсюда, складывая, а потомъ вычитая, имѣемъ

$$x=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}\right],\qquad y=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}\right].$$

Комбинируя знаки всевозможными способами, получимъ четыре значенія для x и столько же для y; чтобы изъ нихъ составить системы рѣшеній, удовлетворяющихъ даннымъ ур-мъ, достаточно замѣтить, что произведеніе x на y, въ силу втораго ур-нія, должно давать b. Легко убѣдиться, что это требованіе будетъ выполнено, если въ формулахъ x и y передъ первымъ радикаломъ возьмемъ одинаковые знаки, а передъ вторымъ противоположные. Такимъ образомъ получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x^{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right] \\ y^{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}\right] \end{cases}\qquad \begin{cases} x^{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}\right] \\ y^{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\mathrm{III}}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right] \\ y^{\mathrm{III}}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}\right] \end{cases}\qquad \begin{cases} x^{\mathrm{IV}}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}\right] \\ y^{\mathrm{IV}}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right] \end{cases}$$

Другой способъ. Возвышая въ квадратъ второе данное ур., замѣняемъ данную систему болѣе общею

$$x^2+y^2=a,\quad x^2y^2=b^2.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Зная сумму a и произведеніе b^2 количествъ x^2 и y^2, найдемъ ихъ какъ корни квадратнаго ур-нія

$$z^2-az+b^2=0:$$

$$x^2=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},\quad y^2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

Извлекая квадратные корни, получимъ:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},$$

откуда легко составить прежнія комбинаціи соотвѣтствующихъ значеній x и y. Легко ихъ привести къ прежнему виду. Возьмемъ напр. формулу x и приложимъ къ ней преобразованіе сложнаго радикала

$$\pm\sqrt{A+\sqrt{B}}=\pm\left\{\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right\},$$

имѣя

$$A=\frac{a}{2},\ B=\frac{a^2}{4}-b^2,\ A^2-B=b^2.$$

Найдемъ

$$\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}=\pm\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right\}.$$

Такимъ же образомъ преобразуемъ и y.

580. Рѣшить систему

$$x^2+2xy+y^2-ax-ay=0,\ x^2-2xy+y^2-bx+by=0.$$

Эту систему можно написать въ видѣ:

$$(x+y)^2-a(x+y)=0,\ (x-y)^2-b(x-y)=0,$$

или:

$$(x+y)(x+y-a)=0,\ (x-y)(x-y-b)=0.$$

Рѣшеніе данной системы распадается на четыре другія:

$$\begin{cases}x+y=0,\\ x-y=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=0,\\ x-y-b=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x-y=0,\\ x+y-a=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x+y-a=0,\\ x-y-b=0,\end{cases}$$

изъ которыхъ получаемъ:

$$\begin{cases}x^{\mathrm{I}}=0\\ y^{\mathrm{I}}=0\end{cases}\quad \begin{cases}x^{\mathrm{II}}=\frac{b}{2}\\ y^{\mathrm{II}}=-\frac{b}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}x^{\mathrm{III}}=\frac{a}{2}\\ y^{\mathrm{III}}=\frac{a}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}x^{\mathrm{IV}}=\frac{a+b}{2}\\ y^{\mathrm{VI}}=\frac{a-b}{2}.\end{cases}$$

III. Системы уравненій второй степени болѣе нежели съ двумя неизвѣстными.

581. Примѣръ I. Рѣшить систему

$$x(x+y+z)=a^2,\ y(x+y+z)=b^2,\ z(x+y+z)=c^2.$$

Складывая и вынося за скобки $x+y+z$, получаемъ

$$(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2, \text{ откуда } x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Замѣняя въ каждомъ изъ данныхъ ур-ній $x+y+z$ его величиною, получимъ двѣ системы рѣшеній, взявъ передъ радикаломъ сперва $+$, потомъ $-$:

$$\begin{cases}x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ z=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{cases}\quad \text{и} \quad \begin{cases}x=\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ y=\frac{-b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ z=\frac{-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\end{cases}$$

582. Примѣръ II. — Рѣшить систему

$$x^2+yz=c \quad (1) \qquad y^2+xz=c \quad (2) \qquad z^2+xy=a \quad . \ . (3)$$

Вычитая (2) изъ (1), находимъ

$$(x-y)(x+y)-z(x-y)=0, \text{ или } (x-y)(x+y-z)=0.$$

Данная система распадается на двѣ:

$$\begin{array}{lll} x-y=0 & (\alpha) \\ y^2+xz=c & (2) \\ z^2+xy=a & (3) \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{lll} x+y-z=0 & (\beta) \\ y^2+xz=c & (2) \\ z^2+xy=a. & (3) \end{array}$$

Рѣшимъ, напр., вторую. Приравнивая значенія z изъ (β) и (2), получаемъ

$$x+y=\frac{c-y^2}{x}, \text{ или } x^2+y^2+xy=c, \text{ или } (x+y)^2-xy=c,$$

или, такъ какъ изъ (β) имѣемъ $x+y=z$, то

$$z^2-xy=c.$$

Это ур. вмѣстѣ съ (3) даетъ:

$$z^2=\frac{a+c}{2}, \text{ откуда } z=\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}, \text{ и } xy=\frac{a-c}{2}.$$

Такимъ образозомъ z найдено; для опредѣленія x и y замѣчаемъ, что извѣстны; сумма $x+y$, равная z, т. е. $\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}$, и произведеніе xy, равное $\frac{a-c}{2}$. Сл. x и y опредѣлятся какъ корни ур-нія

$$X^2\mp\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot X+\frac{a-c}{2}=0,$$

откуда:

$$X=\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a+c}{8}-\frac{a-c}{2}}=\frac{\pm\sqrt{a+c}\pm\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}}.$$

Каждое значеніе z дастъ намъ двѣ системы значеній x и y, ибо x безразлично м. б. взято равнымъ X' или X'', и слѣд. y равнымъ X'' или X'. Итакъ, получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} z=\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x=\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y=\frac{\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x=\frac{\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y=\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=-\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x=\frac{-\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y=\frac{-\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x=\frac{-\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-4a}}{2\sqrt{2}} \\ y=\frac{-\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

IV. Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

583. Примѣръ I. — Рѣшить систему

$$x+y=17\ .\ .\ .\ (1) \qquad x^3+y^3=1343\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, находимъ

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=4913\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Это ур-ніе общѣе ур-нія (1); именно, мы знаемъ, что если обозначить одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1 буквою α, то ур-нію (3) удовлетворяютъ значенія x и y, повѣряющія каждое изъ ур-ній: $(x+y)=17\alpha$, $x+y=17\alpha^2$, $x+y=17\alpha^3$. Но если мы замѣнимъ въ немъ $x+y$ числомъ 17, то этимъ мы выразимъ, что корни его удовлетворяютъ ур-нію (1), и слѣд. паразитные корни будутъ устранены. Итакъ, замѣнивъ въ ур-ніи (3) $x+y$ числомъ 17, подставляемъ вмѣсто него ур-ніе $x^3+y^3+51xy=4913$, или, въ силу ур-нія (2):

$$51xy=4913-1343, \text{ или } xy=70.$$

Зная сумму и произведеніе x и y, найдемъ эти количества, какъ корни квадратнаго ур-нія

$$u^2 - 17u + 70 = 0,$$

откуда: $x' = 7$, $y' = 10$; или $x'' = 10$, $y'' = 7$.

Кромѣ того, данная система имѣетъ третью систему рѣшеній, образуемую безконечными и противоположными по знаку величинами x и y.

Другой способъ. — Можно бы было употребить еще слѣдующій методъ. Ур-ніе (2) можно представить въ видѣ:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1343, \text{ или, замѣнивъ } x+y \text{ числомъ } 17:$$

$$x^2 - xy + y^2 = 79.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по $3xy$, получимъ:

$$(x+y)^2 = 79 + 3xy, \text{ или } 289 = 79 + 3xy, \text{ или } xy = 70.$$

Далѣе вычисленіе оканчивается какъ выше указано.

584. Примѣръ II. — Рѣшить систему

$$x + y = a \; . \; . \; . \; (1) \qquad x^5 + y^5 = b^5 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Возвысивъ въ пятую степень обѣ части ур-нія (1) и сгруппировавъ извѣстнымъ образомъ члены, получимъ:

$$x^5 + y^5 + 5xy(x^3 + y^3) + 10x^2y^2(x+y) = a^5,$$

или $$x^5 + y^5 + 5xy[(x+y)^3 - 3(x+y)xy] + 10(x+y)x^2y^2 = a^5 \; . \; . \; . \; (3)$$

Это ур. не тождественно (1): если обозначимъ буквою α одинъ изъ мнимыхъ корней 5-го порядка изъ 1, то ур-нію (3) удовлетворяютъ корни каждаго изъ уравненій:

$$x + y = a\alpha, \; x + y = a\alpha^2, \; x + y = a\alpha^3, \; x + y = a\alpha^4, \; x + y = a\alpha^5.$$

Но если мы замѣнимъ въ немъ $x + y$ количествомъ a, то этимъ самымъ исключимъ изъ него рѣшенія четырехъ паразитныхъ уравненій, и останется уравненіе

$$x^5 + y^5 + 5xy(a^3 - 3axy) + 10ax^2y^2 = a^5. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

которое со (2) образуетъ систему, тождественную данной.

Ур. (4) можно представить въ видѣ

$$5a(xy)^2 - 5a^3(xy) + a^5 - b^5 = 0.$$

Будучи квадратнымъ относительно xy, оно дастъ два значенія для xy; каждое изъ нихъ комбинируемъ съ ур-мъ $x + y = a$. Такимъ образомъ получимъ четыре системы рѣшеній; пятую систему составятъ значенія x и y безконечныя по величинѣ и противоположныя по знаку.

585. Примѣръ III. — Рѣшить систему

$$x + y + z = a \; . \; . \; (1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \; . \; . \; (2) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \; . \; . \; (3).$$

Возвысивъ обѣ части ур-нія (1) въ квадратъ, получаемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = a^2,$$

или, по причинѣ ур-нія (2):

$$xy + xz + yz = 0 \; . \; . \; . \; (4) \qquad \text{откуда} \qquad xy = -z(x+y) \; . \; . \; . \; (5).$$

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, получимъ:

$$z^3+(x+y)^3+3z(x+y)(x+y+z)=a^3,$$

или, принимая во вниманіе ур-нія (1) и (3):

$$3xy(x+y)+3az(x+y)=0,$$

а, въ силу соотношенія (4)

$$xy(x+y)-axy=0, \quad \text{или} \quad xy(x+y-a)=0 \;.\;.\;.\;.\;(5).$$

Это ур-ніе требуетъ, чтобы было: или $xy=0$, или $x+y=a$. Если $xy=0$, то должно быть: или $x=0$, или $y=0$. При $x=0$, ур-ніе (4) дастъ $yz=0$. Слѣд. необходимо еще, чтобы было: или $y=0$, или $z=0$, причемъ при $y=0$ будетъ $z=a$, а при $z=0$ имѣемъ $y=a$. Итакъ имѣемъ систему

$$x'=0, \quad y'=0, \quad z'=a,$$
$$x''=0, \quad y''=a, \quad z''=0.$$

Если $x+y=a$, тогда $z=0$; и по причинѣ (4) нужно еще $x=a$ и $y=0$; или $x=0$ и $y=a$. Отсюда третья система рѣшеній:

$$x'''=a, \quad y'''=0, \quad z'''=0.$$

Иначе, необходимо и достаточно, чтобы два изъ неизвѣстныхъ были нули, а третье a.

586. Примѣръ IV. — Рѣшить систему

$$xu=yz, \quad x+y+z+u=a,$$
$$x^2+y^2+z^2+u^2=b^2, \quad x^4+y^4+z^4+u^4=c^4.$$

Примемъ за вспомогательныя неизвѣстныя: произведенія $xu=yz=q$, и суммы $x+u=t$ и $y+z=v$. Такимъ образъмъ прямо получимъ:

$$t+v=a \;.\;.\;.\;.\;(1) \qquad t^2+v^2-4q=b^2 \;.\;.\;.\;(2)$$
$$t^4+v^4-4q(t^2+v^2)+4q^2=c^4 \;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Выразивъ q изъ ур-нія (2) и подставивъ въ (3), имѣемъ

$$4(t^4+v^4)-4(t^2+v^2)(t^2+v^2-b^2)+(t^2+v^2-b^2)^2=4c^4,$$

или
$$-8v^2t^2+4b^2(t^2+v^2)+(t^2+v^2-b^2)^2=4c^4.$$

Подставивъ сюда вмѣсто t^2+v^2 его величину a^2-2vt, выведенную изъ (1), и обозначивъ vt буквою S, для опредѣленія S имѣемъ ур-ніе

$$4S^2+4(a^2+b^2)S+4c^4-(a^2+b^2)^2=0.$$

Найдя корни S' и S'' этого ур., найдемъ v и t изъ ур-ній

$$X^2-aX+S'=0, \qquad X^2-aX+S''=0.$$

Первое дастъ для v и t систему v', t'; второе—систему v'', t''; изъ ур-нія (2) найдемъ соотвѣтствующія значенія для q: q' и q''. Наконецъ, найдемъ двѣ системы значеній для x и u изъ ур-ній

$$X^2-t'X+q'=0, \qquad X^2-t''X+q''=0,$$

и двѣ соотвѣтственныя системы значеній для y и z изъ ур-ній

$$Y^2-v'Y+q'=0, \qquad Y^2-v''Y+q''=0.$$

587. Примѣръ V. — Рѣшить систему

$x^4+y^4-x^2y^2=a(x+y)^2$ . . . (1) $\qquad xy(x-y)^2=b(x+y)^2$ . . . (2).

1-й способъ. — Помноживъ (2) на 4 и сложивъ съ (1), получимъ:

$$(x+y)^4-15x^2y^2=(a+4b)(x+y)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Положивъ $x+y=u$, $xy=v$, дадимъ ур-мъ (2) и (3) видъ

$$v(u^2-4v)=bu^2, \qquad u^4-15v^2=(a+4b)u^2,$$

исключивъ u^2, получимъ квадратное ур. относительно v.

2-й способъ (неопредѣленныхъ коэффиціентовъ). — Помножимъ ур-нія (1) и (2) соотвѣтственно на неопредѣленные коэффиціенты λ и μ, затѣмъ опредѣлимъ λ и μ такъ, чтобы первая часть новаго уравненія, которое однородно по отношенію къ x и y, дѣлилась бы, какъ и вторая часть, на $x+y$. Эта первая часть, очевидно, есть $\lambda(x^4+y^4-x^2y^2)+\mu xy(x-y)^2$; и какъ она должна быть нулемъ при замѣнѣ въ ней x количествомъ $-y$, то имѣемъ условіе: $\lambda-4\mu=0$. Можно взять μ равнымъ 1, тогда $\lambda=4$, т. е.: чтобы выдѣлить множителя $x+y$ въ первой части новаго ур-вія, нужно помножить на 4 обѣ части ур-нія (1) и сложить со (2). Найдемъ:

$$(x+y)^2(4x^2+4y^2-7xy)=(4a+b)(x+y)^2:$$

итакъ, множитель $(x+y)$, и даже его квадратъ, обнаруженъ въ первой части предыдущаго ур-нія. Приходимъ такимъ образомъ къ рѣшенію системъ

$$x+y=0, \qquad xy(x-y)^2=b(x+y)^2;$$

$$4(x^2+y^2)-7xy=4a+b, \qquad xy(x-y)^2=b(x+y)^2.$$

Первая система даетъ $x=y=0$. Для рѣшенія второй полагаемъ $x+y=2s$, $x-y=2t$. Затѣмъ получаемъ выраженія x^2+y^2 и xy въ s и t, и подставляя ихъ въ оба предыдущія ур-нія, получаемъ два ур-нія въ s и t, которыя рѣшить не трудно.

588. Примѣръ VI. — Рѣшить систему:

$(x^3+y^3)(x+y)=a(x^2+y^2)$ . . . (1) $\qquad x^4+y^4-3x^2y^2=b(x^2+y^2)$ . . (2).

Множа данныя ур-нія соотвѣтственно на λ и μ и складывая почленно, находимъ въ первой части полиномъ

$$\lambda(x^3+y^3)(x+y)+\mu(x^4+y^4-3x^2y^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Опредѣлимъ λ и μ такъ, чтобы полиномъ (3) дѣлился на x^2+y^2. Разсматривая x^2+y^2 какъ произведеніе комплексовъ $x+yi$, $x-yi$, посмотримъ, каково д. б. соотношеніе между λ и μ, чтобы полиномъ (3) дѣлился на $x-yi$. Для этого надо, чтобы результатъ подстановки yi вмѣсто x въ этотъ полиномъ былъ нулемъ. Находимъ условіе: $2\lambda+5\mu=0$. Подстановка $x+yi$ дала бы тотъ же результатъ; слѣд., при λ и μ, удовлетворяющихъ этому условію, полиномъ (3) раздѣлится на x^2+y^2. Можно взять, напр. $\lambda=5$ и $\mu=-2$. Итакъ, умноживъ ур-нія (1) и (2) соотвѣтственно на 5 и -2 и сложивъ ихъ, получаемъ

$$(x^2+y^2)[3(x^2+y^2)+5xy]=(5a-2b)(x^2+y^2).$$

Вопросъ приведенъ къ рѣшенію двухъ системъ:

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = 0;$$

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2), \quad 3(x^2 + y^2) + 5xy = 5a - 2b.$$

Первая система даетъ: $x = y = 0$. — Для рѣшенія второй полагаемъ: $x + y = u$, $xy = v$, и выражаемъ $x^2 + y^2$ и $x^4 + y^4$ черезъ u и v; такимъ обр. получаемъ два ур-нія

$$u^4 - bu^2 \quad 2(2u^2 - b)v - v^2 = 0, \quad 3u^2 - v = 5a - 2b;$$

исключивъ изъ нихъ v, найдемъ биквадратное ур. въ u.

589. Задачи. Рѣшить уравненія:

1. $3x^2 - 3y^2 - 3xy + x + 5y - 2 = 0; \quad x + y - 1 = 0.$

2. $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6yx - 8zx + 15xy + 51x + 18y + 8 = 0.$
$$\begin{aligned} 2x - 4y - 16z &= -26. \\ 5x + 3y - z &= 0. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x + 2y - z \qquad - 1 &= 0 \\ 2y + z - u - 1 &= 0 \\ x \qquad + u - 4 &= 0 \\ y - z + 2u - v &= 3 \end{aligned}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2yz - 3uv + x - y + 3u - 2 = 0.$$

4. $51x^2 - 60xy - y^2 + 75x - 33y + 18 = 0$
$49x^2 + 60xy - y^2 + 65x - 31y + 6 = 0.$

5. $6x^2 + xy - y^2 + 2x + y - 1 = 0, \quad 15x^2 - 20xy + 5y^2 - 10x + 1 = 0.$

6. $x^2 - 6xy - 16y^2 + 4x + 18y - 5 = 0, \quad x^2 + 2xy + 4y^2 - 3x - 12y + 2 = 0.$

7. $2x^2 + 27xy + 6y^2 - 6x - 21y + 4 = 0, \quad 2x^2 - 9xy - 3y^2 - 6x + 6y + 4 = 0.$

8. $6x^2 + xy - y^2 - 3x - 4y - 15 = 0, \quad 3x^2 - 4xy + y^2 - 15x + 7y + 18 = 0.$

9. $x^2 + xy + 4y^2 = 6, \quad 3x^2 + 8y^2 = 14.$

10. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13, \quad xy - 3x + 2y = 11.$

11. $(x - y)(x^2 - y^2) = 16, \quad (x + y)(x^2 + y^2) = 40.$

12. $2x^2 - 3xy + y^2 = 24, \quad 3x^2 - 5xy + 2y^2 = 33.$

13. $(3x + 4y)(7x - 2y) + 3x + 4y = 44$
$(3x + 4y)(7x - 2y) - 7x + 2y = 30.$

14. $xy(x + y) = 30, \quad x^3 + y^3 = 35.$

15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}; \quad xy^2 - x^2y = 324.$

16. $x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8.$

17. $x^3 - y^3 = 1304, \quad x - y = 8.$ 18. $x^4 + y^4 = 337, \quad x + y = 7.$

19. $x^4 - y^4 = 609, \quad x - y = 3.$ 20. $x^5 - y^5 = 3096, \quad x - y = 3.$

21. $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{145}{72}, \quad xy^3 + x^3y - x^2y^2 = \frac{73}{288}$

22. $5x^2 - 3xy + 4y^2 = 100, \quad 2xy + 3x^2 = 57.$

23. $x^3 - y^3 = 39(x - y), \quad x^3 + y^3 = 19(x + y).$

24. $x^3 + y^3 = \frac{35}{216}$, $x^2 + y^2 - xy = \frac{7}{36}$.

25. $x^2 + y^2 + xy = 7(x + y)$, $x^2 + y^2 - xy = 9(x - y)$.

26. $x^6 + y^6 = 15689$, $x^2 + y^2 = 29$.

27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}$, $x + y = 13$.

28. $x + y + 2\sqrt{xy} = 25$, $x^2 + y^2 + 4xy = 241$.

29. $\sqrt{4y^3x} + 3\sqrt{yx^3} = 252$, $3\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{12}{\sqrt{xy}} + 5$.

30. $x^2 + y^3 = 9xy + 1$, $x^2 - xy + y^2 = 7$.

31. $x^4 + y^4 = \frac{17}{4}x^2y^2$, $x + y = 9$.

32. $xy + xy^3 = 6$, $x + xy^2 + xy^4 = 9$.

33. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \frac{25}{x + y}$, $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = \frac{9}{x - y}$.

34. $\frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = \frac{175(x - y)}{19(x + y)}$, $x^2 + y^2 = 13$.

35. $xy = 3$, $x^4 + y^4 = \frac{97}{4}$. 36. $x^6 + y^6 = 65$, $x^4 + y^4 = 17$.

37. $x^7 - y^7 = 2186$, $x - y = 2$: 38. $\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{121}{13}$, $x + y = 2$.

39. $\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{205}{13}$, $x^2 + xy + y^2 = 21$.

40. $\frac{1}{\sqrt{x - 12} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x - 12} - \sqrt{x}} = \frac{2y}{27}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$.

41. $\sqrt{\frac{6x}{x + y}} + \sqrt{\frac{x + y}{6x}} = \frac{5}{2}$, $xy - x - y = 9$.

42. $13y\sqrt{\frac{x^2}{y} + 3} = 6x^2 + 20y$, $24x^2 + y^2 = 2x(5y + 4x)$.

43. $x^4 + 9y^4 - 6x^2y^2 - x^2 + 3y^2 = 132$, $y^4 - 10y^2x + 25x^2 = 1$.

44. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{4}{z} = 42$, $\frac{6}{x} + \frac{10}{z} = 38$, $15x + 10y = 9$.

45. $x^2 + z^2 + y^2 = 14$, $x + y - z = 4$, $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$.

46. $x^2 + y^2 + z^2 = 35$, $2y^2 + 3x + 14 = 7xz$, $x(z - 1) = 4$.

47. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $xy + xz - yz = 7$, $x + y + z = 6$.

48. $x^2 = y + z$, $z^2 = x^2 + y^2$, $(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8(x + z)$.

49. $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 36$, $x + y + z + t = 18$, $y^2 = xz$, $yz = tx$.

50. $xt = yz$, $x + t = 7$, $y + z = 8$, $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 1649$.

51. $xt = yz$, $x + t = 9$, $y + z = 6$, $x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = 33825$.

52. $(x + y)(xy + 1) = 18xy$, $(x^2 + y^2)(x^2y^2 + 1) = 208x^2y^2$.

53. $x + y = 9z$, $x^2 + y^2 = 82z$, $x^3 + y^3 = 378z$.

54. $x + y = 4, \quad u + v = 10, \quad x^2 + u^2 = 130, \quad y^2 v^2 = 34.$

55. $(a + 1)xy + (a - 1)(x + y) + a - 3 = 0,$
$(2a + 1)xy + (2a - 1)(x + y) + 3a - 4 = 0.$

56. $x + y + x^2 + y^2 = a^2, \quad xy + x^2 + y^2 = b^2.$

57. $x^2 - x^2y^2 + y^2 = a, \quad x - xy + y = b.$

58. $x^2 + y^2 + 2xy - 2x(a + b) - 2y(a + b) = -4ab.$
$x^2 + y^2 - 2xy + 2x(a - b) - 2y(a - b) = 4ab.$

59. $\dfrac{1}{ax - by - 1} + \dfrac{1}{by - ax - 1} = \dfrac{1}{ax + by - 1}, \quad bx + ay = m.$

60. $x^3 + y^3 + xy(x + y) = a, \quad (x^2 + y^2)x^2y^2 = b.$

61. $(x + y)(x^3 + y^3) = a, \quad (x - y)(x^3 - y^3) = b.$

62. $x^3 + y^3 = a(x^2 + y^2), \quad x^2y + xy^2 = b(x^2 + y^2).$

63. $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = a, \quad x + y = b.$

64. $x^5 + y^5 = a(x^3 + y^3), \quad xy = b.$

65. $x^3 + y^3 = a(x + y), \quad x^4 + y^4 = b(x + y)^2.$

66. $x^4 - y^4 = axy, \quad (x^2 + y^2)^2 = b(x^2 - y^2).$

67. $(x + y)^4 = a(x^2 + y^2), \quad x^4 + y^4 = b(x^2 + y^2).$

68. $x^4 + y^4 = a(x^2 + xy + y^2), \quad (x + y)(x^3 + y^3) = b(x^2 + xy + y^2)^2.$

69. $x \, . \, y = a, \quad (a + b)x^4 + ayx^3 + ay^3x + (a + b)y^4 = b.$

70. $x + y = a, \quad x^5 + bxy^4 + cx^3y^2 + cx^2y^3 + bxy^4 + y^5 = b.$

71. $(x^6 + 1)y = a(y^2 + 1)x^3, \quad (y^6 + 1)x = a(x^2 + 1)y^3.$

72. $xy(x + y) = a, \quad x^3 + y^3 = bxy.$

73. $a^2 - x^2 = 3xy, \quad (\sqrt{y} - \sqrt{x})(a - x) = 3\sqrt{x}(x + y).$

74. $\dfrac{(1 + x)(1 + y)}{(1 - x)(1 - y)} = a, \quad \dfrac{(1 + x^4)(1 + y^4)}{(1 - x)^4(1 - y)^4} = b.$

75. $\dfrac{x^2 - y^2}{(x + 1)(y + 1)} = a - b, \quad \dfrac{x^2 - y^2}{(x - 1)(y - 1)} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}.$

76. $y = ax, \quad x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = 2(x^3 + y^3).$

77. $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}, \quad \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{x - y}{y^2}.$

78. $xy(x + y) = ab(a + b); \quad (x - y)(x + 2y)(2x + y) = (a - b)(a + 2b)(2a + b).$

79. $x^2 + y^2 = axyz, \quad x^2 + z^2 = bxyz, \quad y^2 + z^2 = cxyz.$

80. $xyz = a^2(x + y) = b^2(y + z) = c^2(x + z).$

81. $x^2 - (y - z)^2 = a, \quad y^2 - (x - z)^2 = b, \quad z^2 - (x - y)^2 = c.$

82. $x^2 + (y - z)^2 = a, \quad y^2 + (x - z)^2 = b, \quad z^2 + (x - y)^2 = c.$

83. $(x+y)(z+u) = a, \quad (x+z)(y+u) = b, \quad (x+u)(y+z) = c, \quad x^2+y^2+z^2+u^2 = d.$

84. $x^2 + y^2 = 2a, \quad z^2 + u^2 = 2b, \quad xz + uy = 8c, \quad xu + yz = 8d.$

85. $4a^2yz = 4a^2d^2 + x^2yz, \quad y + z = 2a, \quad y^2 + z^2 = x^2.$

86. $(yz - d^2)(y + z)^2 = x^2yz, \quad y^2 + z^2 = 2m^2 + \dfrac{x^2}{2}, \quad 4x^2(z^2 - h^2) = (x^2 + z^2 - y^2)^2.$

87. $\dfrac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^2+(x-b)^2}=(a-b)(a-x)(x-b).$

Положить $a-x=y \quad x-b=z.$

88. $xu=yz,\quad x+y+z+u=4s,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=4q,\quad x^3+y^3+z^3+u^3=4c.$

89. $xy+n(x+y)=a^2,\quad xz+n(x+z)=b^2,\quad yz+n(y+y)=c^2.$

90. $x+y+z=a,\quad xy=b^2,\quad xyz=c^3.$

91. $x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad xz=y^2.$

92. $\dfrac{a^3x}{y^2z^2}=\dfrac{b^3y}{z^2y^2}=\dfrac{c^3z}{x^2y^2}=1.$

93. $\dfrac{xyz}{x+y}=a,\quad \dfrac{xyz}{y+z}=b,\quad \dfrac{xyz}{z+x}=c.$

94. $x+y+z=1,\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z=1.$

95. $x+y+z=(a+b+c)(a+b-c).$

$xy+xz-yz=b\left\{(a+c)(a-c)(2a-b)+2ab^2\right\}$

$x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2-c^2)^2+2b^2(a^2+c^2).$

96. $x+y+z=a+b+c;\quad x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2;\quad xy-yz-zx=ab-bc-ca.$

97. $x+y+z=a+b+c,\quad xy+yz=ab+bc,\quad (x+y)^2-z^2=(a+b)^2-c^2.$

98. $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad 2y-z=x,\quad yz+zx+xy=3b^2.$

99. $x(y+z)+2(x+y+z)^2=9a^2,$

$y(z+x)+6(x+y+z)^2=25a^2,$

$z(x+y)+12(x+y+z)^2=36a^2.$

100. $x(az+bu)+y(a+b)=0;\quad x(az^2+bu^2)+y(az+bu)=a+b;$

$(az+bu)^2+(a-b)^2(z-u)^2=c^4;\quad (a+2b)u-bz=d,$

101. $x^4+y^4-x^2y^2=a^4,\quad x^4-y^4=b^4.$

102. $x+y+z=a,$

$\dfrac{zx(z+x-y)}{z+x}+\dfrac{xy(x+y-z)}{x+y}=b^2,$

$y^2+z^2-x^2=0.$

103. $x+y+z+u=a,\quad x^4+y^4+z^4+u^4=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)^2,$

$x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\quad xu=yz.$

104. $x^{\frac{m}{2}}+x^{\frac{m}{4}}y^{\frac{m}{4}}+y^{\frac{m}{2}}=a,\quad x^{m}+x^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m}{2}}+y^{m}=b.$

105. Показать, что результатъ исключенія x и y изъ уравненій

$$x+y=a,\quad x^2+y^2=b^2,\quad x^3+y^3=c^3$$

есть: $a^3-3ab^2+2c^3=0.$

106. Исключить x, y, z изъ уравненій:

$$x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3=3c^3,\quad xyz=a^3.$$

107. Исключить x, y, z изъ уравненій:

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{z}{c}+\frac{c}{z},\ xyz=abc,\ x^2+y^2+z^2+2(ab+ac+bc)=0.$$

108. Совмѣстны-ли уравненія

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+c=0,\quad \frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+c=0,\quad (b+c)x+(a+c)y+a+b=0.$$

ГЛАВА XXXVIII.

Численные вопросы высшихъ степеней.

590. — Когда отвѣтъ на вопросъ, приводящій къ квадратному уравненію, выражается мнимыми корнями, это служитъ признакомъ невозможности задачи. Если же корни дѣйствительны, то могутъ имѣть мѣсто слѣдующіе случаи:

1. Оба корня положительны. Тогда задача допускаетъ два рѣшенія, если только корни неравны; въ случаѣ равныхъ корней вопросъ имѣетъ одно рѣшеніе. Однако же, если одно или оба значенія неизвѣстнаго выходятъ изъ тѣхъ предѣловъ, между которыми, по смыслу вопроса, должно заключаться неизвѣстное, то вопросъ имѣетъ или одно рѣшеніе, или же невозможенъ.

2. Если одно или оба значенія неизвѣстнаго будутъ отрицательны, то всегда можно составить такое уравненіе, котораго корни равны, но противоположны, корнямъ даннаго: нужно только въ ур-ніе задачи подставить $-x$ вмѣсто x. Если окажется возможнымъ подобрать задачу, слегка разнящуюся отъ предложенной и отвѣчающую видоизмѣненному ур-нію, этимъ путемъ значеніе отрицательнаго корня и будетъ истолковано.

Эти замѣчанія относятся и къ уравненіямъ второй степеня съ нѣсколькими неизвѣстными. Въ поясненіе сказаннаго приводимъ примѣры.

Задача I. — *Два торговца продали нѣсколько головъ рогатаго скота за 1350 р.; первый на 5 головъ больше втораго. Если бы первый продалъ столько головъ, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первый получилъ бы 540 р., а второй 840 р. Сколько головъ продалъ каждый и по какой цѣнѣ?*

Пусть будетъ x—число головъ, проданныхъ первымъ; тогда число головъ, проданныхъ вторымъ, будетъ $x-5$. Первый за $x-5$ головъ получилъ бы 540 р.; слѣд. за одну голову онъ получалъ по $\frac{540}{x-5}$ р., а за x головъ выручилъ $\frac{540x}{x-5}$ р. Второй за x головъ получилъ бы 840 р., слѣд. онъ бралъ за одну голову $\frac{840}{x}$ р., а за $x-5$ головъ получилъ $\frac{840(x-5)}{x}$ р. Слѣд. оба продали скота на $\frac{540x}{x-5}+\frac{840(x-5)}{x}=1350$ р.

По освобожденіи отъ дробей и по упрощеніи находимъ уравненіе $x^2-55x+700=0$, откуда: $x'=35$; $x''=20$. Слѣд. $x'-5=30$; $x''-5=15$.

Итакъ, *задача имѣетъ два рѣшенія*: 1-й продалъ 35 головъ по 18 р. за голову, а второй 30 головъ по 24 р. за голову (въ самомъ дѣлѣ, $18\times 35+24\times 30=$

$=630+720=1350$); или же: 1-й продалъ 20 гол. по 36 р., а 2-й 15 по 42 р., что опять составляетъ 1350 р.

Задача II. — *Отданъ въ банкъ капиталъ и черезъ годъ получено прибыли 200 р. Капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами былъ оставленъ въ банкѣ еще на годъ. Послѣ этого капиталъ съ наросшими на него процентными деньгами составлялъ 2420 р. Какъ великъ былъ первоначальный капиталъ?*

Пусть первоначальный капиталъ былъ x р. Черезъ годъ онъ обратился въ $x+200$ р., слѣд. принесъ $\frac{20000}{x}$ процентовъ. Въ концѣ втораго года этотъ капиталъ, принося $\frac{20000}{x}\%$, обратился въ $(x+200)\left(1+\frac{200}{x}\right)=2420$ р.

Освободивъ отъ дробей и упростивъ, имѣемъ уравненіе $x^2-2020x+40000=0$, откуда: $x'=2000$ р.; $x''=20$ р. Такимъ образомъ опять получили два положител. корня; вычисляя проценты, приносимые этими капиталами, находимъ, что первый даетъ 10%, второй 1000%. Такъ какъ въ дѣйствительности ни одинъ банкъ не даетъ такихъ высокихъ процентовъ, какъ 1000%, то заключаемъ, что корень $x''=20$ р. не м. б. допущенъ, и задача имѣетъ одно рѣшеніе: $x'=2000$ р.

Задача III. — *Нѣкто купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 240 р.; если бы за туже сумму онъ получилъ 3 аршинами менѣе, то аршинъ обошелся бы 4 рублями дороже. Сколько аршинъ сукна куплено?*

Пусть куплено было x арш.; цѣна 1 арш. равна, слѣдоват., $\frac{240}{x}$ р. Если бы за туже сумму онъ получилъ 3 арш. меньше, т. е. $x-3$ арш., то цѣна аршина была бы $\frac{240}{x}+4$; а всѣ $x-3$ аршина стоили бы опять 240 р.; слѣд. ур-ніе будетъ

$$\left(\frac{240}{x}+4\right)(x-3)=240 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Приведя его къ виду $x^2-3x-180=0$ и рѣшивъ, найдемъ два корня: $x'=15$, $x''=-12$. Положительный корень, какъ не трудно убѣдиться, даетъ прямой отвѣтъ на задачу. Что касается отрицательнаго корня: -12, онъ не можетъ представлять отвѣта на данную задачу, ибо неизвѣстное (число купленныхъ аршинъ сукна), по существу своему, положительно. Но мы можемъ попытаться *истолковать* это рѣшеніе, т. е. подыскать задачу, аналогичную данной, отвѣтомъ на которую служила бы абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія.

Для этого въ первоначальное ур. (1) вмѣсто x подставимъ $(-x)$; получимъ $\left(\frac{240}{-x}+4\right)\left(-x-3\right)=240$, или, умноживъ оба множителя 1-й части на (-1):

$$\left(\frac{240}{x}-4\right)\left(x+3\right)=240 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Мы уже знаемъ, что рѣшенія этого ур-нія суть: $x'=-15$, $x''=+12$, равныя рѣшеніямъ ур-нія (1), но съ противоположными знаками. Положитель-

ное рѣшеніе $+12$ будетъ служить отвѣтомъ на задачу, соотвѣтствующую ур-нію (2); задача эта, очевидно, такова: «нѣкто купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 240 р.; если бы за туже сумму онъ получилъ 3 аршинами *больe*, то аршинъ обошелся бы 4 рублями *дешевле*. Сколько аршинъ онъ купилъ?» Отвѣтомъ на эту задачу и служитъ число 12 арш.

Задача IV. — *Нѣкоторое число N есть произведеніе трехъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ; раздѣливъ N послѣдовательно на каждое изъ этихъ чиселъ и сложивъ частныя, находимъ въ суммѣ 239. Найти N?*

Пусть 3 послѣдовательныя искомыя нечетныя числа будутъ $2x-1$, $2x+1$, $2x+3$; $N=(2x-1)(2x+1)(2x+3)$. Ур-ніе задачи будетъ:

$$(2x+1)(2x+3)+(2x-1)(2x+3)+(2x-1)(2x+1)=239, \ldots (1)$$

или, по выполненіи всѣхъ дѣйствій и по упрощеніи: $x^2+x=20$, откуда: $x'=4$, $x''=-5$.

Положительное рѣшеніе даетъ для трехъ искомыхъ чиселъ: 7, 9 и 11. Повѣрка: $9\times 11+7\times 11+7\times 9$ дѣйствительно $=239$.

Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія подставляемъ въ первонач. ур. (1) $-x$ вмѣсто x, находимъ: $(1-2x)(3-2x)+(-2x-1)(3-2x)+(-2x-1)(1-2x)=239$, или, перемѣнивъ въ каждомъ членѣ знаки обоихъ множителей, находимъ ур-ніе

$$(2x-1)(2x-3)+(2x+1)(2x-3)+(2x+1)(2x-1)=239,$$

корни котораго суть: -4 и $+5$. Взявъ корень $=+5$, находимъ, что искомыя числа суть: $2x-3=7$; $2x-1=9$; $2x+1=11$. Такимъ образомъ, рѣшеніе $x=5$ даетъ тотъ же отвѣтъ, что и $x=3$, требуя только, чтобы искомыя числа были обозначены формулами $2x-3$, $2x-1$ и $2x+1$ вмѣсто того, чтобы обозначать ихъ знаками $2x-1$, $2x+1$ и $2x+3$. Но и то, и другое обозначенія одинаково возможны, и замѣчательно, что алгебра показываетъ намъ à posteriori, что оба эти обозначенія равнозначны.

Задача V. — *Мущины и женщины, въ числѣ 32 лицъ, работаютъ на фабрикѣ, причемъ каждый мущина зарабатываетъ въ день 2-мя рублями больше, нежели каждая женщина; не смотря на это, ежедневный заработокъ всѣхъ мущинъ таковъ же, какъ и заработокъ женщинъ, и составляетъ 60 р. Найти число мущинъ?*

Пусть мущинъ было x; число женщинъ будетъ $32-x$. Каждый мущина зарабатываетъ въ день $\frac{60}{x}$, каждая женщина $\frac{60}{32-x}$ р. Уравненіе задачи будетъ:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{32-x}=2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Окончательное ур. $x^2-92x+960=0$ даетъ: $x'=80$, $x''=12$; слѣд. $32-x'=-48$; $32-x''=20$.

Рѣшеніе $x''=12$ для числа мущинъ, даетъ число женщинъ 20; причемъ ежедневный заработокъ мущины составляетъ $60:12$ или 5 р.; заработокъ женщины $=60:20=3$ р. Слѣд. это рѣшеніе удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи.

Но рѣшеніе $x=80$ для числа мущинъ, будучи больше числа лицъ обоего пола (32), даетъ къ тому же для числа женщинъ отрицательное количество -48; сл. второе рѣшеніе не соотвѣтствуетъ предложенному вопросу. Для истолкованія этого рѣшенія положимъ $32-x=y$, откуда $x=32-y$, и подставимъ эти величины въ ур. (1); найдемъ ур. $\frac{60}{32-y}-\frac{60}{y}=2$, которому удовлетворяетъ $y=-48$, подставивъ $(-y)$ вмѣсто y, получаемъ ур-ніе

$$\frac{60}{32+y}+\frac{60}{y}=2 \qquad (2)$$

изъ котораго y (число женщинъ) $=48$, а $32+y$ (число мущинъ) $=80$. Эти положительныя рѣшенія отвѣчаютъ на задачу, соотвѣтствующую ур-нію (2); задача эта такова: «мущины и женщины работаютъ на фабрикѣ, причемъ *число мущинъ 32 больше числа женщинъ; мущина и женщина зарабатываютъ вмѣстѣ 2 р. въ день*; всѣ мущины зарабатываютъ въ день 60 р.; столько же и женщины. Найти *число женщинъ?*» Отвѣтъ: 80 мущинъ, зарабатывающихъ по 75 к. въ день, и 48 женщинъ, получающихъ по 1 р. 25 к. въ день.

Задача VI. — *Нѣкто, имѣя капиталъ въ 120000 р., раздѣлилъ его на двѣ части, которыя помѣстилъ подъ проценты. Первая часть даетъ ему ежегоднаго дохода 2800 р.; вторая, принося 1 процентомъ больше, даетъ дохода 2500 р. въ годъ. Каковы обѣ части, и по сколько процентовъ онѣ приносятъ?*

Пусть первая часть приноситъ $x\%$; въ такомъ случаѣ 1 р. прибыли получится со $\frac{100}{x}$ р., а 2800 р. прибыли получится съ $\frac{280000}{x}$ р. Разсуждая такимъ же образомъ, найдемъ, что вторая часть капитала равна $\frac{250000}{x+1}$ р. А какъ сумма обѣихъ частей равна 120000 р., то имѣемъ ур-ніе

$$\frac{280000}{x}+\frac{250000}{x+1}=120000,$$

или $12x^2-41x-28=0$, откуда: $x'=4$, $x''=-\frac{7}{12}$.

Положительное рѣшеніе $+4$ даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, и показываетъ, что вторая часть приноситъ 5%. Слѣд. 1-ая часть $=\frac{280000}{4}=70000$р.; 2-ая часть $=\frac{250000}{5}=50000$ р. Сумма ихъ дѣйствительно составляетъ 120000 р.

Истолкованіе отрицательнаго рѣшенія $-\frac{7}{12}$ повело-бы къ условіямъ, несовмѣстнымъ съ понятіемъ о процентѣ; потому рѣшеніе это должно быть прямо отброшено. Полученіе посторонняго рѣшенія зависитъ отъ того, что ур-ніе, къ которому привела частная задача, общѣе этой послѣдней: оно отвѣчаетъ на всѣ вопросы, которые привели бы къ тому же ур-нію, какъ и разсматриваемый частный вопросъ, и которыхъ безчисленное множество. Поэтому неудивительно, что одно изъ рѣшеній этого ур-нія чуждо частному вопросу.

Задача VII. — *Вакхъ, заставъ Силена спящимъ около бочки, наполненной виномъ, сталъ пить въ продолженіи $\frac{3}{5}$ того времени, въ какое Силенъ могъ бы выпить всю бочку. Послѣ этого Силенъ проснулся и выпилъ оставшееся вино. Если бы Вакхъ и Силенъ пили вмѣстѣ, то они выпили бы всю бочку 6-ью часами скорѣе и на долю Вакха пришлось бы только $\frac{2}{3}$ того, что онъ на самомъ дѣлѣ оставилъ Силену. Во сколько часовъ каждый изъ нихъ можетъ выпить цѣлую бочку?*

Означимъ время, въ которое Вакхъ можетъ выпить всю бочку, черезъ $3x$, а время, въ которое Силенъ можетъ выпить туже бочку, черезъ $5y$. Сначала Вакхъ пьетъ въ продолженіи $3y$ часовъ, и какъ въ одинъ часъ онъ выпиваетъ $\frac{1}{3x}$ бочки, то въ $3y$ часовъ выпьетъ $\frac{y}{x}$ бочки. Затѣмъ, легко видѣть, что вмѣстѣ они выпили бы всю бочку въ $\frac{15xy}{3x+5y}$ час. Вакхъ оставилъ Силену $1-\frac{y}{x}$ бочки, и слѣд. послѣдній пилъ вино въ продолженіи $\left(1-\frac{y}{x}\right).5y$ часовъ: поэтому оба они пили въ теченіи $3y+\left(1-\frac{y}{x}\right).5y$ или $\frac{(8x-5y)y}{x}$ часовъ. Приравнявъ разность временъ, указанную въ условіи, 6 часамъ, получимъ ур-ніе

$$\frac{(8x-5y)y}{x}-\frac{15xy}{3x+5y}=6.$$

Выразимъ теперь, что количество вина, выпитаго Вакхомъ, было бы во второмъ случаѣ равно $\frac{2}{3}$ того, что онъ на самомъ дѣлѣ оставилъ Силену. Такъ какъ Вакхъ выпиваетъ въ часъ $\frac{1}{3x}$ бочки, то въ $\frac{5xy}{3x+5y}$ часовъ, въ теченіи которыхъ онъ пилъ бы во второмъ случаѣ, онъ выпилъ бы часть бочки, равную $\frac{5y}{3(3x+5y)}$. Такимъ образомъ второе ур-ніе будетъ:

$$\frac{5y}{3(3x+5y)}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{y}{x}\right).$$

Освободивъ ур-нія отъ дробей, дадимъ имъ видъ

$$25xy^2-25y^3+9xy-18x^2-30xy=0$$
$$10y^2+11xy-6x^2=0,$$

откуда $x=5$, $y=2$: слѣд. искомыя числа часовъ суть 15 и 10.

591. Задачи.

А. *Вопросы съ однимъ неизвѣстнымъ.*

1. Нѣсколько пріятелей, обѣдая вмѣстѣ въ гостинницѣ, издержали 102 р. Не желая, чтобы трое приглашенныхъ участвовали въ расходахъ, остальные сотрапезники уплатили $1\frac{2}{7}$ рубля болѣе каждый, чѣмъ еслибы платили всѣ обѣдавшіе. Сколько лицъ участвовало въ обѣдѣ?

2. Купецъ купилъ нѣсколько головъ телятъ, заплативъ за все 672 р. Если бы каждый теленокъ обошелся ему 4-мя рублями дешевле, то на ту же сумму онъ могъ бы купить 3-мя штуками больше. Сколько телятъ онъ купилъ и по какой цѣнѣ?

3. Отцу было 24 года, когда у него родился сынъ. Если перемножить лѣта отца и сына въ настоящее время, то произведеніе окажется въ 3 раза болѣе квадрата лѣтъ сына. Сколько лѣтъ каждому изъ нихъ въ настоящее время?

4. Разнощикъ купилъ апельсиновъ на 7 р. 56 к. Выбросивъ 5 штукъ, оказавшихся гнилыми, онъ продалъ каждый изъ оставшихся апельсиновъ 4 копѣйками дороже, чѣмъ самъ заплатилъ, и такимъ образомъ получилъ барыша 58 коп. Сколько апельсиновъ онъ купилъ?

5. Нѣкто, отдавъ въ долгъ сумму 18000 р., и получивъ черезъ годъ процентныя деньги, издержалъ изъ нихъ 210 р., а остальныя присоединилъ къ капиталу, отдавъ всю сумму на прежніе проценты. Такимъ образомъ въ концѣ втораго года у него образовалась сумма 19437, считая въ этомъ числѣ и процентныя деньги. Сколько % получилъ онъ на свой капиталъ?

6. Бочка съ виномъ содержитъ 80 бутылокъ. Отливъ изъ нея нѣсколько бутылокъ, бочку дополнили водою. Затѣмъ, снова отлили столько же бутылокъ, какъ и въ первый разъ и замѣнили отлитое количество смѣси водою. Послѣ этого оказалось, что въ 80 бутылкахъ смѣси было чистаго вина только 45 бут. По сколько бутылокъ отливали каждый разъ?

7. Резервуаръ, вмѣстимость котораго равнялась 5280 ведрамъ, былъ наполненъ двумя трубами, изъ которыхъ вода текла неодинаковое время. Первая труба давала каждую секунду 2 ведрами больше второй. Если бы вторая труба давала въ секунду столько, сколько первая, то изъ нея натекло бы 3400 вед.; а еслибъ первая давала въ секунду столько, сколько вторая, то она дала бы 2048 ведеръ. Сколько ведеръ воды давала каждая труба въ секунду?

8. Дюнкирхенъ, Брюссель и Реймсъ образуютъ прямоугольный $\triangle$, причемъ Брюссель находится въ вершинѣ прямаго угла. Сумма квадратовъ трехъ сторонъ, измѣренныхъ километрами, составляетъ 105800. Разстояніе между Брюсселемъ и Дюнкирхеномъ относится къ разстоянію между Б. и Р. какъ 56 : 73. Опредѣлить разстояніе между этими тремя городами?

9. Одинъ путешественникъ, выйдя изъ точки А, идетъ къ сѣверу, проходя ежедневно 36 верстъ. Черезъ пять дней другой путешественникъ выходитъ изъ А въ направленіи къ востоку, проходя ежедневно по 28 верстъ. Черезъ сколько дней послѣ выхода 2-го разстояніе между ними, по прямой линіи, будетъ равно 430 верстамъ?

10. Стая обезьянъ забавлялась: одна осьмая часть ихъ въ квадратѣ бѣгала въ лѣсу, остальныя 12 кричали на верхушкѣ холма. Скажи мнѣ, сколько было всего обезьянъ? *).

11. Корень квадратный изъ половины числа пчелъ роя полетѣлъ на кустъ жасмина; $\frac{8}{9}$ цѣлаго роя осталась дома; одна самочка полетѣла за самцомъ, который жужжитъ въ цвѣткѣ лотоса, куда онъ попалъ ночью, привлеченный пріятнымъ запахомъ, и изъ котораго онъ не можетъ выйти, такъ какъ цвѣтокъ закрылся. Скажи мнѣ число пчелъ роя?

12. Найти число, котораго квадратъ вмѣстѣ съ кубомъ въ 9 разъ больше слѣдующаго цѣлаго числа?

13. Когда карета проѣхала 54 метра, переднее колесо ея сдѣлало 9-ю оборотами больше задняго. Если бы увеличить окружность каждаго колеса на 3 дециметра, то

---

*) Эта задача и слѣдующая находятся въ сочиненіи „Віаганита“ (т. е. вычисленіе корней) индійскаго ученаго XII вѣка Баскары Ачаріа.

переднее колесо сдѣлало бы на томъ же разстояніи только 6-ю оборотами больше задняго. Найти окружности обоихъ колесъ?

14. Два тѣла движутся по двумъ прямымъ, пересѣкающимся подъ прямымъ угломъ, приближаясь къ точкѣ пересѣченія. Первое находится въ 236 метрахъ отъ точки пересѣченія и проходитъ по 7 метровъ въ секунду; второе — въ 197 метрахъ и проходитъ по 6 метровъ въ секунду. Черезъ сколько секундъ разстояніе между ними будетъ = 13 метрамъ?

15. Центры двухъ круговъ движутся по сторонамъ прямаго угла по направленію къ вершинѣ. Центръ 1-го круга, котораго радіусъ = 46 м., удаленъ на 2248 м. отъ вершины и проходитъ по 7 м. въ секунду. Радіусъ 2-го круга = 14 м.; центръ его удаленъ отъ вершины на 1628 м. и приближается къ ней со скоростью 5 м. въ секунду. Черезъ сколько времени круги будутъ имѣть внѣшнее касаніе?

16. Центръ неподвижнаго круга, котораго радіусъ = 1009 сантиметрамъ, находится на горизонтальной прямой. Въ той же плоскости, прямо надъ центромъ въ вертикальномъ направленіи и въ разстояніи 50 сантим. находится центръ подвижнаго круга, имѣющаго радіусъ = 945 с.м. Кругъ этотъ движется — вертикально внизъ со скоростью 180 с.м. въ секунду, а горизонтально со скоростью 2000 с.м. въ секунду. Черезъ сколько секундъ оба круга будутъ имѣть: 1) внѣшнее касаніе, 2) внутренне касаніе, и черезъ сколько секундъ разстояніе между ними будетъ имѣть наименьшую величину? (Задача эта имѣетъ примѣненіе въ астрономіи при вычисленіи солнечныхъ и лунныхъ затмѣній).

17. Сумма двухъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ, сложенная съ суммою ихъ квадратовъ и съ разностью ихъ кубовъ, даетъ 304. Найти эти числа?

18. Купецъ продалъ кусокъ сукна за 60 р., а другой кусокъ, въ которомъ было 8-ю арш. больше, за 70 р. Если бы онъ продалъ первый кусокъ по цѣнѣ втораго, а второй по цѣнѣ перваго, то за все выручилъ бы 134 р. Сколько аршинъ того и другаго сукна онъ продалъ?

19. Нѣсколько человѣкъ обѣдали въ складчину. Еслибы было 3-мя лицами больше и каждое лицо платило бы 50-ю коп. дороже, то расходъ составилъ бы 60 р. А еслибы было 3-мя лицами меньше и каждое платило бы 50-ю коп. дешевле, расходъ составилъ бы 27 р. Сколько лицъ обѣдало и какая сумма ими издержана?

20. Изъ двухъ рабочихъ одинъ получилъ 135,2 р., другой 64,8 р. Первый работалъ 6-ю днями больше 2-го; но еслибъ 1-й работалъ столько дней какъ 2-й, а 2-й столько дней, сколько 1-й, они заработали бы поровну. Опредѣлить число рабочихъ дней и поденный заработокъ каждаго рабочаго.

21. Изъ двухъ рабочихъ одинъ получилъ 100 р., другой 36. Первый работалъ 8-ю днями больше 2-го. Если бы 1-й работалъ 11-ю днями меньше, а 2-й тремя днями больше, оба они заработали бы равныя суммы. Опредѣлить число рабочихъ дней и поденную плату каждому рабочему?

22. Землевладѣлецъ купилъ нѣсколько головъ рогатаго скота на 360 р. Три штуки околѣло, а остальныхъ онъ продалъ, взявъ за каждую голову 5-ю рублями больше, чѣмъ платилъ самъ. Весь барышъ составлялъ 15 р. Сколько онъ платилъ за каждую голову?

23. Нѣкто, купивъ предметъ, который вскорѣ сталъ ему ненуженъ, продалъ его за 21 р., потерявши при этомъ столько процентовъ, сколько рублей предметъ ему стоилъ. Сколько онъ потерялъ при продажѣ?

24. Нѣкто купилъ картину, принявши ее за оригиналъ. Убѣдившись впослѣдствіи, что его обманули, онъ продалъ картину за 54 р., потерявши столько %, сколько рублей въ шестой части покупной цѣны. За сколько была куплена картина?

25. Нѣкто купилъ персиковъ по такой цѣнѣ, что еслибы на 1 р. 20 к. ему дали 2-мя штуками больше, то дюжина обошлась бы 10-ю коп. дешевле, чѣмъ онъ заплатилъ. Сколько онъ платилъ за дюжину?

26. Служанкѣ поручнно было купить грушъ на 60 к. Дѣйствительно, она ихъ купила на эту сумму; но дорогою съѣла 4 штуки, вслѣдствіи чего оказалось, что хозяйка заплатила за дюжину грушъ 6-ю коп. дороже настоящей цѣны. Сколько грушъ было куплнно служанкою?

27. Нѣкто арендовалъ нѣсколько десятинъ земли за 840 р. Изъ этого числа самъ онъ обработываетъ 7 десятинъ, а остальныя отдаетъ въ аренду 10-ю рублями дороже за десятину, чѣмъ платитъ самъ; и такимъ образомъ за отданныя имъ въ наемъ десятины получаетъ 840 р. Сколько десятинъ онъ отдаетъ въ наемъ?

28. Одинъ изъ двухъ крановъ можетъ наполнить бассейнъ 3-мя часами скорѣе, нежели другой кранъ. Оба крана вмѣстѣ наполняютъ бассейнъ въ 3 ч. 36 м. Во сколько часовъ каждый кранъ, дѣйствуя отдѣльно, можетъ наполнить бассейнъ?

29. Лодочникъ, плывя по теченію рѣки на протяженіи 5 верстъ и возвращаясь назадъ, употребляетъ на весь путь 1 ч. 6 м. 40 с. Скорость теченія рѣки = 2,4 вер. въ часъ. Сколько лодочникъ можетъ проѣхать на спокойномъ озерѣ, если будетъ грести съ тою же силою?

30. Два поѣзда пробѣгаютъ въ 12 ч.: первый нѣкоторое неизвѣстное разстояніе x, другой 114 верстами больше. На переѣздъ $142\frac{1}{2}$ верстъ второй поѣздъ употребляетъ 45-ю минутами меньше, нежели первый. Найти пространство, пробѣгаемое первымъ поѣздомъ и среднюю скорость каждаго поѣзда?

31. Нѣкто помѣстилъ подъ проценты капиталъ 12000 р.; черезъ годъ капиталъ съ наросшею прибылью онъ помѣстилъ въ нѣкоторое предпріятіе, дававшее 1% больше, и въ концѣ втораго года получилъ прибыли 756 р. Найти проценты.

32. Нѣкто далъ взаймы 15000 р. за опредѣленные проценты. Спустя 3 м. 18 дней, должникъ, имѣвшій право на уплату въ этотъ срокъ, найдя возможность достать деньги 1%-мъ дешевле, предлагаетъ заимодавцу за дальнѣйшее пользованіе капиталомъ эти уменьшенные %. Послѣдній соглашается, возвращаетъ первый вексель и беретъ другой на 15524,5 р. срокомъ на 4 м. Найти проценты.

33. Спекулянтъ покупаетъ на 24000 р. облигаціи, стоящія x процентами ниже своей ниминальной цѣны. Потомъ, когда облигаціи поднялись на x% выше своей номинальной цѣны, онъ оставилъ 20 облигацій у себя, а остальныя продалъ за 15600 р. Номинальная цѣна облигаціи = 500 р. Найти число купленныхъ облигацій и цѣну каждой?

34. Банкиръ учелъ два векселя: одинъ въ 2080 р. срокомъ на 8 м., другой въ 3150 р., срокомъ на 10 м. Полный учетъ составлялъ 230 р. Узнать, по скольку % учтены оба векселя (полагая учетъ точный).

35. Два поѣзда выходятъ изъ пунктовъ M и N, разстояніе между которыми равно 560 верстамъ, и идутъ навстрѣчу другъ другу. Чтобы они встрѣтились на полпути, нужно, чтобы поѣздъ изъ N вышелъ 1 ч. 45 м. раньше другаго. Если бы оба поѣзда вышли одновременно, то черезъ 7 часовъ разстояніе между ними составляло бы $\frac{1}{10}$ первоначальнаго. Сколько употребляетъ каждый поѣздъ на переѣздъ разстоянія MN?

36. A и B идутъ съ одинаковою скоростью изъ M въ R. A выходитъ раньше нежели B. У третьяго милеваго столба недоходя R, A нагоняетъ стадо гусей, которое въ каждый часъ дѣлаетъ только $\frac{1}{6}$ мили. Черезъ $\frac{1}{2}$ часа послѣ этого встрѣчаетъ онъ стадо овецъ, которое гонятъ со скоростью $\frac{1}{5}$ мили въ часъ. B встрѣчаетъ гусей

въ разстояніи $2\frac{1}{2}$ миль не доходя до R, а овецъ 10-ю минутами раньше того, какъ онъ достигаетъ втораго милеваго столба передъ R. Съ какою скоростью идутъ пѣшеходы A и B?

37. Нѣкто въ первый годъ посѣялъ $4\frac{1}{2}$ четверти пшеницы. На второй годъ онъ посѣялъ 16 четвертями меньше всего умолота, полученнаго отъ первой жатвы, и при одинаковомъ урожаѣ обоихъ посѣвовъ получилъ въ 8 разъ больше того количества, которое имъ было посѣяно, да еще $21\frac{1}{3}$ четверти. Опредѣлить урожай, т. е. узнать, во сколько разъ количество вымолачиваемой пшеницы было больше количества засѣваемой?

38. Найти пять послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, зная что сумма квадратовъ двухъ большихъ равна суммѣ квадратовъ трехъ остальныхъ.

39. Найти 4 послѣдовательныя цѣлыя числа, зная, что кубъ большаго равенъ суммѣ кубовъ трехъ остальныхъ чиселъ.

40. Корпусъ въ 6048 солдатъ былъ разбитъ на нѣкоторое число равныхъ отрядовъ, посланныхъ занять такое же число крѣпостей. Во время компаніи умерло отъ эпидеміи число человѣкъ, равное $2\frac{1}{2}$ отрядамъ, а весь остатокъ, за исключеніемъ 84 инвалидовъ, возвратившихся въ главную квартиру, былъ точно также какъ прежде поровну разставленъ по крѣпостямъ. Но уменьшенные гарнизоны оказались не въ состояніи защищаться, и всѣ крѣпости попали въ руки непріятеля, а люди, за исключеніемъ четырехъ цѣлыхъ гарнизоновъ и 210 бѣглецовъ, были перебиты или взяты въ плѣнъ. Потеря, понесенная въ этомъ случаѣ, вмѣстѣ съ потерею отъ эпидеміи, равнялась 4186 человѣкамъ. Найти число крѣпостей?

41. Извѣстно, что сила притяженія прямо пропорціональна массамъ и обратно пропорціональна квадрату разстояній между взаимодѣйствующими тѣлами. Зная это, опредѣлить, на какомъ разстояніи отъ центра земли находится точка, одинаково притягиваемая луною и землею. Масса луны $=1$, масса земли $=88$, разстояніе между центрами земли и луны $=96000$ километрическихъ лье.

42. Длинная цилиндрическая стеклянная трубка, запаянная съ одного конца, наполнена воздухомъ, находящимся подъ давленіемъ 30″, и вертикально погружена въ ртуть, которая въ трубкѣ и сосудѣ находится на одномъ уровнѣ; длина трубки надъ уровнемъ ртути въ сосудѣ $=10''$. Какую длину трубки будетъ занимать воздухъ, если поднять трубку еще на 10″, такъ что вся высота трубки будетъ $=20''$?

43. Цилиндрическая трубка, въ которой движется поршень, погружена въ чашку со ртутью. Ртуть въ трубкѣ стоитъ на 12 с. м. выше ея уровня въ чашкѣ, колонна же воздуха занимаетъ 30 с. м. длины. Поршень опускаютъ 6 с. м. Какова въ такомъ случаѣ будетъ высота ртути въ трубкѣ?

44. Высота всасывающей трубы насоса равна 2 метрамъ. Поршень можетъ двигаться между 1 д. м. и 5 д. м., считая отъ клапана всасывающей трубы. Радіусъ послѣдней $=1$ с. м., радіусъ верхней трубы $=2$ д. м. На какую высоту поднимется вода послѣ 1-го взмаха поршня?

45. Нужно 88,1625 кг. льда, чтобы понизить съ 35^0 до 15^0 Ц. воду, содержащуюся въ бассейнѣ, имѣющемъ видъ усѣченнаго конуса съ горизонтальными основаніями, причемъ радіусъ верхняго основанія $=1{,}2$ м., высота $=0{,}9$ м., и бассейнъ наполненъ водою до $\frac{1}{2}$ своей высоты. Вычислить радіусъ нижняго основанія, зная, что скрытая теплота таянія льда равна 80.

B. *Вопросы съ нѣсколькими неизвѣстными.*

46. Въ трехзначномъ числѣ квадратъ цифры десятковъ равенъ произведенію крайнихъ цифръ, сложенному съ 4. Разность между удвоенною цифрою десятковъ и цифрою единицъ равна цифрѣ сотенъ; если написать цифры числа въ обратномъ порядкѣ, получится число, дающее, по вычитаніи изъ даннаго, остатокъ 390, увеличенный общею цифрою десятковъ. Найти это число.

47. Названіе одной, знаменитой въ древности, горы пишется тремя буквами. Если эти буквы замѣнить нумерами, означающими ихъ мѣсто въ русской азбукѣ, то сумма всѣхъ трехъ чиселъ составитъ 15. Среднее число вдвое менѣе произведенія крайнихъ, увеличеннаго на 1; а сумма квадратовъ крайнихъ чиселъ на 32 единицы больше удвоеннаго квадрата средняго числа. Какъ называлась гора?

48. Нѣкто, имѣя капиталъ въ 84000 р., раздѣлилъ его на двѣ части, помѣстивъ ихъ подъ различные $^0/_0$, такъ что обѣ части даютъ одинаковый доходъ. Если бы 1-я часть была помѣщена на такіе проценты какъ 2-я, она приносила бы 2880 р. Если же 2-ю помѣстить на проценты 1-й, то она дастъ доходу 1620 р. Найти обѣ части капитала и проценты, на которые онѣ помѣщены.

49. Купецъ, покупая чай и затѣмъ продавая его, употребляетъ фальшивые вѣсы; черезъ это онъ получаетъ 24-мя процентами больше, чѣмъ еслибы онъ пользовался вѣрными вѣсами. Но если бы при покупкѣ онъ клалъ товаръ на ту чашку, на которую кладетъ его при продажѣ и обратно, то на цѣнѣ, которую онъ самъ платитъ, онъ ничего не потерялъ бы и ничего не выигралъ бы. Сколько $^0/_0$ барыша онъ получалъ бы, употребляя вѣрные вѣсы и при покупкѣ и при продажѣ?

50. Бассейнъ наполняется изъ двухъ крановъ. Первый открываютъ на $\frac{2}{3}$ того времени, въ которое 2-й одинъ можетъ наполнить бассейнъ; послѣ этого открываютъ 2-й, изъ котораго и вливается недостающее количество воды. Если бы съ самаго начала были открыты оба крана, то бассейнъ наполнился бы 1 ч. 55 м. 30 с. скорѣе, и первый кранъ далъ бы $\frac{5}{8}$ того количества воды, которое въ дѣйствительности далъ 2-й. Сколько потребовалось бы времени каждому крану въ отдѣльности для наполненія бассейна?

51. Въ трюмѣ корабля, частію залитаго водой, равномѣрно втекающей черезъ пробоину, работаютъ 2 помпы, приводимыя въ движеніе A и B. Изъ нихъ A дѣлаетъ 3 взмаха въ то время, какъ B дѣлаетъ два; но четырьмя взмахами B выкачиваетъ столько же воды, сколько A пятью. B работаетъ нѣкоторое время, въ которое A одинъ опорожнилъ бы трюмъ. Затѣмъ A выкачиваетъ остальное, и трюмъ опорожненъ въ $13\frac{1}{3}$ часовъ. Еслибы они работали вмѣстѣ, то трюмъ опорожнился бы въ $3\frac{3}{4}$ часа, и A выкачалъ бы ста ведрами больше, чѣмъ онъ сдѣлалъ. Сколько притекаетъ воды черезъ щель въ одинъ часъ?

52. A и B выѣхали изъ C и D, первый 3 часами раньше втораго. Они встрѣтились въ 20 миляхъ отъ D, и A достигъ D часомъ раньше, нежели B прибылъ въ C. На слѣдующій день B выѣхалъ раньше и повстрѣчалъ A, проѣхавшаго $\frac{1}{7}$ своего обратнаго пути, и хотя B былъ задержанъ на 3 часа, но все таки прибылъ въ D раньше, чѣмъ A достигъ C, на такое время, въ которое могъ бы проѣхать 28 миль. Съ какою скоростью они путешествовали?

53. Сосудъ можетъ быть наполненъ водою посредствомъ двухъ трубъ, изъ которыхъ одна вливаетъ въ него по 4 литра въ часъ; другая же труба можетъ наполнить сосудъ, употребляя на это однимъ часомъ болѣе, чѣмъ обѣ трубы вмѣстѣ. Послѣ пятичасоваго совмѣстнаго дѣйствія обѣихъ трубъ въ сосудѣ недостаетъ еще 13 ли-

тровъ для наполненія его. Спрашивается: 1) сколько литровъ въ часъ доставляетъ вторая труба; и 2) сколько часовъ должны быть открыты обѣ трубы для наполненія сосуда?

54. Изъ средины города идутъ двѣ улицы, пересѣкающія прямолинейно-текущую рѣку посредствомъ мостовъ A и B. Изъ мѣста встрѣчи улицъ идетъ къ рѣкѣ сточная труба, одинаково наклоненная къ обѣимъ улицамъ и встрѣчающая рѣку въ такой точкѣ, которая отстоитъ отъ A на 6 колѣнъ, а отъ B на 11 колѣнъ меньше длины трубы. Издержки по устройству трубы составляли столько фунтовъ стерлинговъ на каждое колѣно, сколько разъ таковое содержится въ длинѣ улицы, ведущей къ A. Но какъ одной трубы оказалось недостатотно, то проведена была вторая труба отъ пункта этой послѣдней улицы, отстоящаго на 4 колѣна отъ A. Вторая труба проведена была въ тотъ же пунктъ рѣки, какъ и первая и была одинаково наклонена къ рѣкѣ и къ 1-й трубѣ. Если бы проведены были трубы подъ обѣими улицами, то издержки на нихъ, считая по 9 ф. с. за колѣно, превышали бы только на 54 ф. с. стоимость первой трубы. Найти длины: улицъ и первой трубы.

55. Три города A, B и C лежатъ въ вершинахъ прямоугольнаго треугольника, причемъ B — въ вершинѣ прямаго угла; разстояніе отъ A до B — кратчайшее изъ всѣхъ. Пѣшеходъ нашелъ, что время, употребленное имъ на переходъ изъ A въ B, а затѣмъ изъ B въ C, на $2\frac{2}{3}$ часа болѣе времени, въ которое онъ прошелъ изъ A въ C. Карета, выѣхавшая изъ A четырьмя часами позже пѣшехода и ѣдущая втрое скорѣе его, догнала его въ 8 миляхъ за B, по дорогѣ къ C. Пріѣхавши затѣмъ черезъ C въ A и прождавши тамъ $6\frac{2}{3}$ часа, карета совершаетъ опять тотъ же путь и достигаетъ мѣста A въ одно время съ пѣшеходомъ, отдыхавшимъ 4 часа въ C. Найти разстоянія между городами и скорости пѣшехода и кареты.

56. A и B должны совершить путь между двумя верстовыми столбами шоссейной дороги, отстоящими другъ отъ друга на четное число верстъ. Имѣя въ своемъ распоряженіи только одну лошадь, они уговорились, чтобъ каждый изъ нихъ поочередно ѣхалъ версту на лошади, а слѣдующую версту шелъ пѣшкомъ; причемъ чтобы каждый, проѣхавъ версту на лошади, оставлялъ бы ее у столба, гдѣ и находилъ бы ее другой путешественникъ. Скорость лошади вдвое больше скорости B. Первый садится на лошадь B и оба одновременно достигаютъ седьмаго верстоваго столба. Здѣсь, находя, что нужно ускорить путешествіе, они условились проходить пѣшкомъ полуверстою въ часъ больше. Скорость лошади теперь уже вдвое больше скорости A, и первый садится на лошадь опять B. Все путешествіе продолжалось $2\frac{62}{63}$ часа. Опредѣлить скорости путешественниковъ и пройденное ими разстояніе.

592. *Историческое примѣчаніе.*—Окончивъ статью о рѣшеніи уравненій, сдѣлаемъ краткій историческій очеркъ развитія теоріи уравненій; этотъ очеркъ представитъ вмѣстѣ съ тѣмъ и ходъ развитія алгебры.

О познаніяхъ *Халдеевъ* въ алгебрѣ намъ почти ничего неизвѣстно. Съ достовѣрностью можно скатать только, что имъ было извѣстно рѣшеніе нѣкоторыхъ уравненій 1-й ст. съ 2 неизвѣстными. — Единственнымъ источникомъ, изъ котораго можно почерпнуть свѣдѣнія о состояніи алгебры у древнихъ *Египтянъ*, служитъ *папирусъ Ринда*, подлинный текстъ котораго былъ написанъ почти за 3000 лѣтъ до Р. Х. При рѣшеніи уравненій авторъ папируса слѣдуетъ вполнѣ опредѣленнымъ правиламъ, соединяя, напр., неизвѣстные члены въ одну часть ур-нія и приводя ихъ къ одному члену. Въ концѣ нѣкоторыхъ ур-ній указаны и пріемы повѣрки. Изъ содержанія папируса можно заключить, что египетскимъ математикамъ извѣстно было рѣшеніе уравненій 1-й ст. съ 1 неизвѣстнымъ.—Самый древній памятникъ математической литературы *Китай-*

цевъ (Кіу-Чангъ или 9 отдѣловъ ариѳметики) написанъ въ весьма отдаленное время, но когда именно — нѣтъ указаній. Глава VIII этого сочиненія посвящена рѣшенію уравненій. Подробнѣе знакомитъ насъ съ познаніями Китайцевъ въ алгебрѣ соч. *Тши-Кіу-Тшау,* извѣстное подъ именемъ *представленія небесной монады* (написано за 1200 л. слишкомъ до Р. Х.). Здѣсь указаны численные примѣры рѣшенія ур-ній до 4-й степени включительно. Наиболѣе блестящихъ результатовъ достигли Китайскіе математики въ рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій; въ этомъ направленіи они опередили и европейцевъ и индусовъ, хотя послѣдніе и достигли весьма важныхъ результатовъ въ этомъ отдѣлѣ алгебры. Послѣднее самостоятельное сочиненіе по математикѣ, написанное Китайцами, относится къ XVI вѣку; это: *Начала искусства вычисленія.* Здѣсь изложено рѣшеніе уравненій первыхъ трехъ степеній, съ однимъ неизвѣстнымъ, хотя ур-нія 3-й степени рѣшаются ощупью. Начиная съ XVII столѣтія математич. сочиненія Китайцевъ составляются уже подъ вліяніемъ европейскихъ миссіонеровъ.—*Индусы* достигли въ алгебрѣ высокаго развитія. Самый древній изъ индусскихъ математиковъ есть *Аріабгатта* (жилъ въ V вѣкѣ по Р. Х.). Изъ его сочиненій съ достовѣрностью можно заключить, что въ его время извѣстно было рѣшеніе ур-ній 2-й степени общаго вида: $ax^2 + bx + c = o$, а съ этимъ вмѣстѣ извѣстно было и производство алгебраическихъ преобразованій; точно также извѣстно было рѣшеніе ур-ній 1 ст. съ 1 неизв. въ общемъ видѣ; также самое общее рѣшеніе извѣстной задачи о курьерахъ въ примѣненіи къ вопросу о двухъ планетахъ. Затѣмъ формулировано рѣшеніе неопредѣленныхъ ур-ній 1-й степени. Другой индусскій ученый, *Брамегупта,* написалъ около 628 г. по Р. Х. математическое соч. подъ заглавіемъ „Брама-Спута-Сидганта" т. е. „Улучшенная система Брамы". Здѣсь показано рѣшеніе неопред. ур-ній вида $ax + by = c$, ур-ній 1-й ст. съ 1 неизвѣстнымъ, квадратныхъ ур-ній и нѣсколькихъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, преимущественно неопредѣленныхъ. Замѣчательно, что Брамегупта имѣлъ понятіе объ отрицательныхъ величинахъ и объ ихъ значеніи, разсматривая ихъ какъ положительныя, только отсчитываемыя въ другую сторону отъ нуля. Подобный взглядъ принятъ европейскими учеными долгое время спустя послѣ Брамегупты. Третій замѣчательный индусскій математикъ *Баскара* (1141—1225 по Р. Х.) оставилъ трактатъ подъ заглавіемъ „Сидгантацироманп" (т. е. вѣнецъ астрономической системы), вторая часть котораго „Віаганита" (т. е. вычисленіе корней) содержитъ алгебру. Изъ этого сочиненія видно, что Баскара имѣлъ вполнѣ ясное понятіе о положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ, зналъ правило знаковъ при умноженіи. Ему было извѣстно рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій I и II ст. (вида $ay^2 + t = x^2$), 1 ст. съ 1 неизвѣстныхъ, квадратныхъ, также отдѣльныхъ случаевъ рѣшенія ур-ній 3-й и 4-й ст. У Индусовъ находимъ и зачатки приложенія алгебры къ геометріи. — Изъ Грековъ *Діофантъ* (во второй половинѣ IV ст. по Р. Х.), занимавшійся главнымъ образомъ неопредѣленнымъ анализомъ, какъ полагаютъ, былъ первый, кому пришла мысль объ употребленіи буквъ для облегченія рѣшенія задачъ; онъ пользовался иниціалами неизвѣстныхъ для обозначенія этихъ количествъ.—*Арабы* заимствовали свои математическія познанія у индусовъ и грековъ; самостоятельнаго не внесли почти ничего.

Пизанскій купецъ, *Леонардо Фибоначчи,* во время своихъ путешествій на востокѣ, познакомился съ математическими познаніими индусовъ и арабовъ и распространилъ эти познанія среди итальянцевъ, а чрезъ нихъ и въ остальной христіанской Европѣ. Его математическій трактатъ abbacus былъ написанъ въ 1202 году. Но истиннымъ основателемъ алгебры, какъ буквеннаго исчисленія, былъ французъ *Віетъ* (1540—1603).

Что касается слова *алгебра,* то теперь выяснено, что оно происходитъ отъ арабскаго слова djebr, которое означаетъ вставку вывихнутаго члена; въ теченіи всѣхъ

среднихъ вѣковъ слово это употребляли въ хирургіи въ его первоначальномъ значеніи. Еще и въ наше время въ Испаніи словомъ algebra означаютъ вправку вывихнутаго члена, а костоправовъ называютъ—algebrista.—Арабы назвали нашу науку *алгеброю*, желая этимъ словомъ выразить операцію перенесенія отрицательнаго члена изъ одной части уравненія въ другую, иначе говоря, возстановленіе во второй части ур-нія члена, уничтоженнаго въ первой части.

ГЛАВА XXXIX.

Изслѣдованіе измѣненія нѣкоторыхъ функцій.—Maxima и minima.

593. Предварительныя свѣдѣнія и опредѣленія. — Количество наз. *перемѣннымъ*, если оно можетъ измѣнять свою величину; перемѣнное наз. *независимымъ*, если его измѣненія произвольны; если же измѣненія перемѣннаго y зависятъ отъ измѣненій другаго перемѣннаго x, то y наз. *зависимымъ* перемѣннымъ или *функціей* перемѣннаго x. Такъ, окружность и площадь круга, измѣняясь съ измѣненіемъ радіуса, суть функціи радіуса, который въ данномъ случаѣ играетъ роль независимаго перемѣннаго; площадь треугольника есть функція основанія и высоты; объемъ прямоугольнаго параллелепипеда есть функція трехъ его измѣреній и т. п. Чтобы обозначить, что y есть функція x, пишутъ: $y = f(x)$.

Функція непрерывная. — Если измѣнять x отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ постепенно, такъ чтобы это перемѣнное принимало послѣдовательно всѣ промежуточныя значенія между α и β, то если при этомъ $f(x)$ остается дѣйствительною, конечною, а ея приращенія сами могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми,— она наз. функціею *непрерывною* между α и β.

Итакъ, чтобы $f(x)$ была непрерывна въ интервалѣ отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$, она должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) не имѣть въ этомъ интервалѣ мнимыхъ значеній; 2) не обращаться въ $\pm\infty$; 3) когда x-су даемъ безконечно малое приращеніе, то и соотвѣтствующее приращеніе функціи д. б. безконечно—мало; другими словами, непрерывная функція не должна переходить отъ одного своего значенія къ другому скачками, не проходя всѣхъ промежуточныхъ значеній. Напр. такая функція не можетъ изъ положительной сдѣлаться отрицательною, не проходя черезъ ноль. Если независимое перемѣнное x непрерывно измѣнять отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$, то сама функція, предполагая, что она въ этомъ интервалѣ непрерывна, можетъ измѣняться, или постоянно возрастая, или постоянно убывая, или—то возрастая, то убывая.

Maxima и minima. — Когда функція, сначала возраставшая, начинаетъ уменьшаться, то въ самый моментъ перехода отъ увеличенія къ уменьшенію она принимаетъ значеніе большее сосѣднихъ; это значеніе наз. *наибольшимъ значеніемъ* или *maximum*'омъ функціи. Наоборотъ, если функція, сначала уменьшавшаяся, начинаетъ потомъ увеличиваться, то въ самый моментъ перехода

отъ уменьшенія къ увеличенію она принимаетъ значеніе, меньшее непосредственно предшествовавшихъ и непосредственно слѣдующихъ; такое значеніе наз. ея *наименьшею величиною* или *minimum*'омъ.

Пусть γ будетъ то значеніе x, содержащееся между α и β, при которомъ функція принимаетъ значеніе c, и пусть h будетъ положительное количество, какъ угодное близкое къ нулю. Если эта функція при возрастаніи x отъ $\gamma-h$ до γ возрастала, а затѣмъ при увеличеніи x отъ γ до $\gamma+h$ идетъ убывая, то c и есть maximum функціи при $x=\gamma$. Наоборотъ, если функція уменьшалась при возрастаніи x отъ $\gamma-h$ до γ, затѣмъ увеличивается при возрастаніи x отъ γ до $\gamma+h$, то c и будетъ minimum'омъ функціи при $x=\gamma$. Maxima и minima, какъ мы ихъ только-что опредѣлили, не слѣдуетъ смѣшивать съ *самою большою* или съ *самою меньшею величиною* функціи. Во многихъ вопросахъ независимое перемѣнное не можетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$, т. е. черезъ всю область дѣйствительныхъ чиселъ, но въ своихъ измѣненіяхъ бываетъ ограничено конечными предѣлами, и если въ тотъ моментъ какъ независимое перемѣнное x достигло своего предѣла, функція получаетъ значеніе большее или меньшее прежнихъ своихъ значеній, то это самое большее или самое меньшее ея значеніе не составляютъ maximum'а или minimum'а въ выше-опредѣленномъ смыслѣ, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ не можетъ быть сравненія этихъ значеній съ непосредственно слѣдующими: послѣднихъ не существуетъ. Такъ функція $\sqrt{1-x}$ дѣйствительна только для x, не превышающихъ 1; и если измѣнять x отъ $-\infty$ до $+1$, то функція будетъ идти уменьшаясь отъ ∞ до 0, котораго она достигаетъ при $x=1$; здѣсь 0 есть самое меньшее значеніе функціи, но не есть *minimum* въ выше-опредѣленномъ смыслѣ, ибо при $x>1$ функція уже становится мнимою, сл. ея значенія не могутъ быть сравниваемы съ предшествующими.

Эти особыя maxima и minima иногда называются *абсолютными*, въ отличіе отъ наибольшихъ или наименьшихъ значеній функціи по сравненію съ сосѣдними, называемыхъ *относительными*.

Въ виду сказаннаго, нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что одна и таже функція можетъ имѣть нѣсколько относительныхъ maxima или minima, или въ томъ, что относит. minimum функціи можетъ быть больше ея maximum'а.

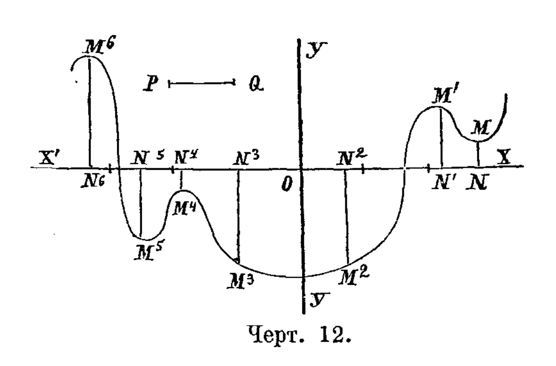
Разрывъ непрерывности. — Нѣкоторыя функціи (не цѣлыя относительно x) могутъ для нѣкоторыхъ значеній перемѣннаго x претерпѣвать разрывъ непрерывности.

Такъ, функція $\frac{1}{2x-3}$ обращается въ ∞ при $x=\frac{3}{2}$; въ этомъ случаѣ говорятъ, что она непрерывна при всякомъ значеніи x, кромѣ $x=\frac{3}{2}$; при $x=\frac{3}{2}$, обращаясь въ ∞, функція теряетъ свойство непрерывности.

Функція $\sqrt{x^2-5x+6}$, которую можно представить въ видѣ $\sqrt{(x-2)(x-3)}$ также не при всякомъ x непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, теорема о знакѣ квадратнаго тринома показываетъ, что триномъ x^2-5x+6 остается положительнымъ при всякомъ x, не содержащемся между его корнями 2 и 3; но при

$2 < x < 3$ становится отрицательнымъ, а функція мнимою. Слѣд. послѣдняя непрерывна для всякаго x, заключающагося между $-\infty$ и $+2$, а также между $+3$ и $+\infty$; и теряетъ непрерывность при всякомъ x, лежащемъ между 2 и 3.

594. Графическое изображеніе измѣненій функціи.—Измѣненія фукціи можно сдѣлать наглядными, слѣдующимъ пріемомъ.



Черт. 12.

Пусть данная функція будетъ $f(x)$; изображая ее буквою y, получимъ уравненіе $y = f(x)$ . . (1)

Начертивъ двѣ перпендикулярныя прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ 0: xx' и yy', и принявъ произвольную прямую PQ за единицу, будемъ изображать величины независимаго перемѣннаго x прямыми, наносимыми на оси xx', вправо отъ точки 0, если x положительно, и влѣво, если x отрицательно. Такъ, если $x = +3$, то отложивъ вправо отъ 0 три раза линію PQ, получимъ прямую 0N, которая и изобразитъ $x = +3$. Взявъ $x = -1$, должны отложить линію PQ разъ влѣво отъ точки 0: прямая $0N_3$ изобразитъ $x = -1$. Разстоянія 0N, $0N_3$, называется *абсциссами.*

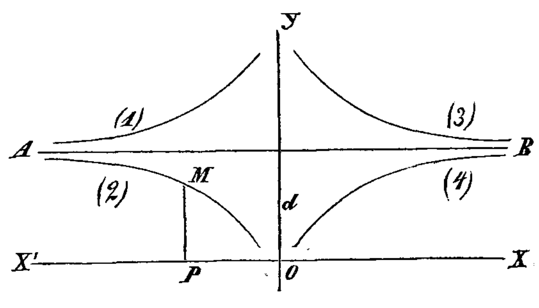
Для всякаго даннаго x можно вычислять величину функціи (т. е. y), подставивъ вмѣсто x его величину въ ур-ніи (1). Пусть напр. при $x = +3$ получится $y = +0{,}7$. Возставивъ въ точкѣ N перпендикуляръ къ линіи xx' вверхъ, отложимъ на немъ линію NM, равную 0,7 PQ. Линія NM и изобразитъ на чертежѣ величину данной функціи, соотвѣтствующую величинѣ $+3$ независимаго перемѣннаго. Подставивъ въ ур. (1) вмѣсто x другое число, напр. -1, получимъ напр. $y = -3$. Возставивъ въ точкѣ N_3 перп. къ линіи xx' внизъ, отложимъ на немъ прямую $N_3M_3 = 3PQ$. Линія N_3M_3 изобразитъ величину функціи, соотвѣтствующую значенію -1 перемѣннаго x. Перпендикуляры NM, N_3M_3, . . откладываемые вверхъ отъ линіи xx', если $y > 0$, и внизъ, если $y < 0$, называются *ординатами.*

Давъ достаточно большое число различныхъ значеній x-су, вычисливъ по ур-нію (1) соотвѣтствующія значенія y, наносимъ тѣ и другія указаннымъ образомъ на чертежъ, и соединяемъ всѣ полученныя вершины M, M_1, . . ординатъ кривою. *Измѣненія ординатъ этой кривой и покажутъ — какъ измѣняется функція при измѣненіи перемѣннаго x.* — Кривая эта называется, поэтому, *кривою функціи.*

Абсциссы и ординаты называются *координатами* точекъ кривой; прямыя xx' и yy'—*осями координатъ*, первая—осью абсциссъ (или иксовъ), вторая — осью ординатъ (или игрековъ). Точка 0 наз. началомъ координатъ.

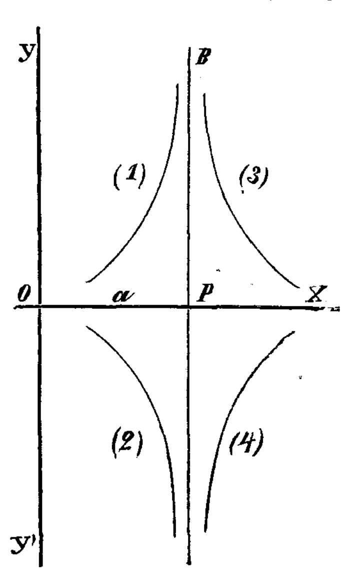
Кривая функціи, указывая наглядно измѣненія функціи, имѣетъ еще ту выгоду, что разъ она начерчена, она съ перваго взгляда показываетъ *maxima* и *minima*: въ самомъ дѣлѣ, эти значенія, по самому ихъ опредѣленію, суть ничто иное какъ ординаты самыхъ высшихъ и самыхъ нисшихъ точекъ кривой Такъ, ординаты N_1M_1, N_4M_4, N_6M_6 суть maxima, а NM, N_5M_5—minima.

Когда разсматриваемая функція — дробная, то можетъ случиться, что при $x = \pm\infty$ величина ея y стремится къ конечному значенію d. Въ такомъ случаѣ построеніе кривой покажетъ, что по мѣрѣ удаленія точки P влѣво, т. е. по мѣрѣ приближенія x къ $-\infty$, ордината MP будетъ стремиться къ d, и слѣд. точка M болѣе и болѣе будетъ приближаться къ прямой AB, параллельной оси $x'x$ и отстоящей отъ нея на d; кривая будетъ имѣть видъ (1) или (2), смотря потому, будетъ-ли функція приближаться къ d уменьшаясь, или же увеличиваясь. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что *прямая* AB *служитъ ассимптотою кривой*; кривая неограниченно приближается къ прямой AB, никогда ея не достигая, ибо ордината (или, что тоже, величина функціи), обращается въ d только при $x = -\infty$. — Такъ какъ при $x = +\infty$ функція получаетъ опять величину d, какъ и при $x = -\infty$, то получится другая вѣтвь кривой, (3) или (4), имѣющая туже ассимптоту AB. Въ данномъ случаѣ ассимптота параллельна оси x.



Черт. 13.

Если разсматривая функція есть дробь, то можетъ случиться, что знаменатель ея обращается въ ноль при нѣкоторомъ дѣйствительномъ значеніи x, напр. при $x = a$. Тогда при $x = a - h$ (гдѣ h какъ угодно мало), т. е. при x стремящемся къ a, но остающемся всегда $< a$, дробь стремится къ $+\infty$, либо къ $-\infty$; иначе говоря, по мѣрѣ приближенія абсциссы къ OP, ордината неограниченно возрастаетъ въ положительномъ, либо въ отрицательномъ направленіи; получается вѣтвь кривой (1), либо (2). Если затѣмъ x сдѣлается немного больше a, принявъ значеніе $a + h$, большее a, функція останется безконечно большою, или того же знака, какъ прежде, или перемѣнивъ знакъ; но эта величина, сначала безконечно большая, будетъ по абсолютной величинѣ становиться все меньше и меньше, по мѣрѣ того какъ x будетъ удаляться отъ a, и получится вѣтвь кривой (3) или (4).



Черт. 14.

Прямая PB будетъ *ассимптотою* кривой, параллельною оси oy.

Переходимъ къ изученію измѣненія нѣкоторыхъ элементарныхъ функцій.

I. Изслѣдованіе функціи первой степени.

595. Теорема. — *Функція первой степени*

$$y = ax + b$$

непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній перемѣннаго x; *при увеличеніи* x *она прогрессивно возрастаетъ, когда* a >0, *и уменьшается, когда* a <0.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ x функція дѣйствительна и конечна. Затѣмъ, пустъ x_0 будетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе перемѣннаго x; соотвѣтствующее значеніе y пусть будетъ y_0, такъ-что

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Дадимъ x_0 нѣкоторое приращеніе h, и пусть соотвѣтствующее приращеніе y_0 будетъ K; то $y_0 + K = a(x_0 + h) + b$; вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ:

$$\mathrm{K} = [a(x_0 + h) + b] - (ax_0 + b) = ah.$$

Такъ какъ a конечно, то по мѣрѣ приближенія h къ нулю, и произведеніе ah приближается къ нулю; слѣд. ah, т. е. приращеніе K функціи м. б. сдѣлано какъ угодно мало. Это имѣетъ мѣсто при всякомъ x_0, слѣд. функція непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній x.

2. Возьмемъ рядъ возрастающихъ значеній x:

$$x' < x'' < x''' < \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (1)$$

Если $a > 0$, то умноженіе на a не измѣнитъ смысла неравенствъ, и получимъ: $ax' < ax'' < ax''' < \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$ Придавая по b, также не нарушимъ неравенствъ, слѣд.

$$ax' + b < ax'' + b < ax''' + b < \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Если же $a < 0$, то изъ (1) найдемъ: $ax' > ax'' > x''' \cdot\;\cdot\;\cdot$; а отсюда

$$ax' + b > ax'' + b > ax''' + b > \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Итакъ, когда x возрастаетъ, то функція постоянно возрастаетъ при $a > 0$, и постоянно уменьшается при $a < 0$.

Примѣръ I. — Функція $y = 5x - 2$ при возрастаніи x возрастаетъ; при x безконечномъ она безконечна; когда x, увеличиваясь, проходитъ чрезъ значеніе $\frac{2}{5}$, обращающее функцію въ 0, она изъ отрицительной обращается въ положительную:

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdot\cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot \frac{2}{5} \cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot +\infty \\ y & -\infty \cdot\cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\; 0 \;\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot +\infty \end{array}$$

Примѣръ II. Функція $y = -2x + 1$ при возрастаніи x идетъ убывая; когда x безконечно, абсолютная величина ея безконечна; когда x, увеличиваясь проходитъ чрезъ значеніе $\frac{1}{2}$, обращающее функцію въ 0, она изъ положительной обращается въ отрицательную:

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdot\cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot \frac{1}{2} \cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot +\infty \\ y & +\infty \cdot\cdot\cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot\cdot > \cdot\cdot\; 0 \;\cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot -\infty \end{array}$$

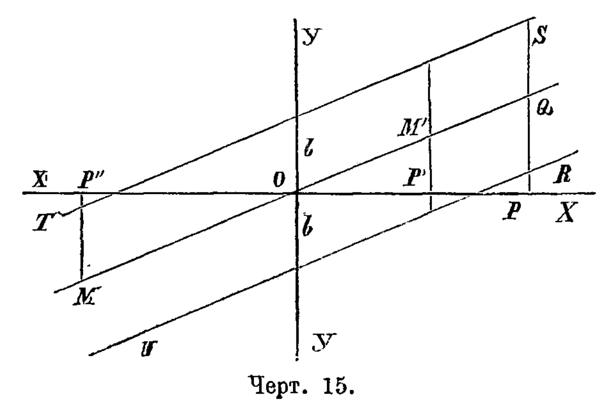
Примѣчаніе. — Такимъ образомъ функція $ax + b$ не имѣетъ относительныхъ maxima и minima, ибо она измѣняется не колеблясь; она имѣетъ *абсолютный minimum*, равный $-\infty$, и *абсолютный maximum*, равный $+\infty$.

596. Теорема. *Линія, изображающая функцію, связанную съ независимымъ перемѣннымъ уравненіемъ первой степени, есть прямая.*

Возьмемъ уравненіе $y = ax + b$ и, положивъ $Y = ax$, построимъ сперва геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ координаты удовлетворяютъ ур-нію $Y = ax$. Пусть Q, M′, M″ будутъ точки искомаго мѣста; проведя ихъ ординаты QP, M′P′, M″P″, соединимъ точки Q, M′, M″ съ O. Такъ какъ координаты искомаго мѣста должны удовлетворять ур-нію $Y = ax$, то

$$\frac{QP}{OP} = a,\ \frac{M'P'}{OP'} = a,\ \frac{-M''P''}{-OP''} = a, \text{ и т. д., откуда } \frac{QP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \ldots$$

Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники QOP, M′OP′, M″OP″,... имѣютъ по равному (прямому) углу, заключенному между пропорціональными сторонами, сл. подобны. Изъ подобія же ихъ слѣдуетъ равенство угловъ QOP, M′OP′, M″OP″,... доказывающее, что линіи OQ, OM′, OM″,... совпадаютъ, а слѣд. точки Q, M′, M″,... лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Итакъ, геометрическое мѣсто уравненія $Y = ax$ есть прямая OQ.



Черт. 15.

Чтобы отъ ординатъ Y перейти къ ординатамъ y, соотвѣтствующимъ тѣмъ же значеніямъ x, достаточно къ первымъ прибавить b (въ ту или другую сторону, см. по знаку b): получится прямая ST, либо RU, параллельная первой.

Итакъ, *функція $ax + b$ во всякомъ случаѣ представляетъ ординаты прямой.*

II. Изслѣдованіе квадратнаго тринома.

597. Теорема. *Квадратный триномъ*

$$y = ax^2 + bx + c$$

есть функція непрерывная для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x отъ $-\infty$ до $+\infty$; когда $a > 0$, функція эта имѣетъ minimum, при $a < 0$ она имѣетъ maximum; maximum и minimum выражаются формулою

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

а соотвѣтствующія значенія x формулою: $-\frac{b}{2a}$; наконецъ, функція

имѣетъ равныя величины, когда x получаетъ значенія, равноотстоящія отъ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, *и наоборотъ.*

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ значеніи x, триномъ дѣйствителенъ и конеченъ. Давъ перемѣнному x значенія x_0 и x_0+h, обозначивъ соотвѣтствующія величины y черезъ y_0 и y_0+K, находимъ:

$$K=(y_0+K)-y_0=[a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c]-(ax_0{}^2+bx_0+c)$$
$$=ah^2+(2ax_0+b)h=h[2ax_0+b+ah].$$

Множитель въ скобкахъ, будучи цѣлымъ относительно x_0 и h, конеченъ при всякихъ конечныхъ значеніяхъ x_0 и h, а слѣд. произведеніе этого конечнаго количества на h можно сдѣлать какъ угодно близкимъ къ нулю, приближая къ нулю приращеніе h; иначе говоря, когда h стремится къ 0, то и K стремится къ предѣлу — нулю, слѣд. триномъ есть функція непрерывная.

2. Замѣтимъ, что квадратъ какого-либо выраженія измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и абсолютная величина этого выраженія. Если положительныя числа идутъ возрастая, то и квадраты ихъ идутъ возрастая. Если отрицательныя числа идутъ возрастая, ихъ квадраты уменьшаются. Помня это, дадимъ триному знакомую уже форму:

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \dots\dots\dots\dots (1)$$

Будемъ измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, замѣтивъ въ числѣ этихъ значеній то, при которомъ $x+\frac{b}{2a}$ обращается въ нуль, именно $x=-\frac{b}{2a}$. Напишемъ рядъ значеній x, возрастающихъ отъ $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$, а потомъ отъ $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$:

$$x \;\Big|\; -\infty \dots < \dots < \dots -\frac{b}{2a} \dots < \dots < \dots +\infty.$$

Придавая къ каждому, воображаемому въ этомъ ряду количеству по $\frac{b}{2a}$, мы не измѣнимъ смысла неравенствъ; слѣд. измѣненія $x+\frac{b}{2a}$ будутъ идти слѣдующимъ образомъ:

$$x+\frac{b}{2a} \;\Big|\; \underbrace{-\infty \dots < \dots < \dots}_{-} 0 \underbrace{\dots < \dots < \dots +}_{+}\infty.$$

Возвышая значенія $x+\frac{b}{2a}$, воображаемыя здѣсь, въ квадратъ, и замѣчая, что квадраты отрицательныхъ значеній пойдутъ уменьшаясь, а положительныхъ — увеличиваясь; получимъ слѣдующій рядъ измѣненій выраженія $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \;\Big|\; +\infty \dots > \dots > \dots 0 \dots < \dots < \dots +\infty.$$

Замѣтимъ здѣсь, что выраженіе $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ идетъ уменьшаясь до того мо-

мента, когда x достигаетъ критическаго значенія $-\frac{b}{2a}$, а потомъ идетъ, безпредѣльно увеличиваясь. Такимъ образомъ, выраженіе $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ проходитъ черезъ *minimum*, равный 0, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$.

Придавая къ каждому члену, воображаемому въ послѣднемъ ряду, постоянное количество $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, мы не нарушимъ смысла измѣненій, и получимъ нижеслѣдующій рядъ измѣненій выраженія $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\ \Big|\ +\infty\cdots>\cdots>\cdot\cdot-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\cdot\cdot<\cdots<\cdots+\infty.$$

Наконецъ, чтобы отъ этого выраженія перейти къ триному, нужно ввести множителя a; но здѣсь нужно различать два случая: $a>0$ и $a<0$. Въ первомъ случаѣ умноженіе на a не нарушитъ смысла неравенствъ, во второмъ, умноженіе на a измѣнитъ смыслъ всѣхъ неравенствъ. Итакъ окончательно имѣемъ слѣдующую таблицу измѣненій тринома:

x	$-\infty\cdots<\cdots<\cdot\cdot-\frac{b}{2a}\cdot\cdot<\cdots<\cdots+\infty$
ax^2+bx+c при $a>0$	$+\infty\cdots>\cdots>\cdot\cdot-\frac{b^2-4ac}{4a}\cdot\cdot<\cdots<\cdots+\infty$
ax^2+bx+c при $a<0$	$-\infty\cdots<\cdots<\cdot\cdot-\frac{b^2-4ac}{4a}\cdot\cdot>\cdots>\cdots-\infty.$

Отсюда непосредственно видно, что:

1) При $a>0$ триномъ ax^2+bx+c идетъ уменьшаясь до того момента когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$, а съ этого момента онъ идетъ возрастая неограниченно; слѣд. при $a>0$ триномъ имѣетъ *minimum*, равный

$$-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

когда x получаетъ значеніе $\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2) При $a<0$ триномъ ax^2+bx+c идетъ возрастая до того момента, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$, затѣмъ онъ неограниченно уменьшается; слѣд. при $a<0$ триномъ имѣетъ *maximum*, равный

$$-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

котораго достигаетъ при $x=-\frac{b}{2a}$.

3. Дадимъ перемѣнному x два значенія, одинаково по абсолютной величинѣ разнящіяся отъ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$; эти значенія будутъ вида

$$x_1=-\frac{b}{2a}-h \text{ и } x_2=-\frac{b}{2a}+h.$$

Подставивъ эти значенія x въ формулу (1), найдемъ, что триномъ въ обоихъ случаяхъ обращается въ $a\left(h^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$, т. е. получаетъ равныя значенія.

Обратно, пусть триномъ получаетъ равныя величины при двухъ значеніяхъ x' и x'' перемѣннаго x, т. е. пусть

$$ax'^2 + bx' + c = ax''^2 + bx'' + c,$$

откуда

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0,$$

или, раздѣливъ обѣ части на $a(x' - x'')$, найдемъ

$$x' + x'' + \frac{b}{a} = 0;$$

пусть $x' < x''$; мы можемъ предыдущее равенство написать въ видѣ

$$x'' - \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{2a} - x',$$

а это означаетъ, что избытокъ количества x'' надъ $-\frac{b}{2a}$ равенъ избытку $-\frac{b}{2a}$ надъ x', или, другими словами, что x' и x'' равно отстоятъ отъ $-\frac{b}{2a}$; если большее изъ этихъ количествъ равно $-\frac{b}{2a} + h$, то меньшее будетъ $-\frac{b}{2a} - h$.

598. *Примѣчаніе I.* — Изъ предыдущей теоремы непосредствено заключаемъ, что:

Когда $a > 0$ триномъ два раза проходитъ черезъ ноль, если его minimum отрицателенъ, одинъ разъ — когда этотъ minimum $= 0$, и не обращается въ ноль, если minimum положителенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ непрерывенъ и измѣняется въ разсматриваемомъ случаѣ отъ $+\infty$ до minimum'а, а потомъ отъ minimum'а до $+\infty$, проходя чрезъ прежнія значенія; слѣд. онъ можетъ обратиться въ ноль только тогда, когда его minimum < 0, и въ такомъ случаѣ два раза пройдетъ черезъ ноль.

Значенія x, обращающія триномъ въ ноль, даютъ въ этомъ случаѣ полусумму равную $-\frac{b}{2a}$, ибо они равноотстоятъ отъ этой величины.

Иначе говоря: когда $a > 0$ уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ имѣетъ дѣйствительные неравные корни, если $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$, или $b^2 - 4ac > 0$, а сумма корней равна $-\frac{b}{a}$; но имѣетъ равные корни, если $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$, или $b^2 - 4ac = 0$, а общая величина ихъ есть $-\frac{b}{2a}$; наконецъ, корни его мнимы, когда $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$, или $b^2 - 4ac < 0$.

Все это — знакомые результаты, найденные здѣсь только инымъ путемъ.

Такимъ же образомъ; одного взгляда на таблицу измѣненій тринома достаточно, чтобы убѣдиться, что при $a < 0$ необходимо, чтобы maximum былъ положи-

теленъ, для того, чтобы функція прошла черезъ 0, но тогда она и другой разъ пройдетъ черезъ ту же величину. Этотъ случай изслѣдуется какъ и предыдущій.

Примѣчаніе II. — Когда триномъ не можетъ обратиться въ ноль, всѣ его значенія — того же знака, какъ a; тоже самое имѣетъ мѣсто, когда maximum или minimum равенъ нулю.

Когда триномъ проходитъ два раза черезъ ноль, знакъ его противоположенъ знаку a для всѣхъ значеній x, содержащихся между этими двумя частными значеніями x, но знакъ его одинаковъ съ знакомъ a для всѣхъ остальныхъ значеній x.

x	$-\infty \cdots < \cdots x_1$	$< \cdots -\dfrac{b}{2a} \cdots < x_2$	$\cdots < \cdots + \infty$
ax^2+bx+c при $a>0$	$+\infty \cdots > \cdots 0$	$> \cdots -\dfrac{b^2-4ac}{4a} \cdots < 0$	$\cdots < \cdots + \infty$
	знакъ коэф. $+a$	знакъ коэф. $-a$	зн. коэф. $+a$
ax^2+bx+c при $a<0$	$-\infty \cdots < \cdots 0$	$< \cdots -\dfrac{b^2-4ac}{4a} \cdots > 0$	$\cdots > \cdots - \infty$
	знакъ коэф. $+a$	знакъ коэф. $-a$	зн. коэф. $+a$

Такимъ образомъ уже знакомые намъ результаты относительно измѣненія знака тринома ясно вытекаютъ изъ непрерывности измѣненій этой функціи.

Примѣчаніе III. — Относительный maximum или minimum тринома ax^2+bx+c есть вмѣстѣ съ тѣмъ и абсолютный.

Пусть напр. $a>0$; таблица измѣненій показываетъ, что

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

дѣйствительно меньше всѣхъ другихъ значеній функціи; слѣд. это — *minimum абсолютный.*

Это же непосредственно слѣдуетъ изъ формулы

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣнное количество $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$, будучи квадратомъ, имѣетъ наименьшую величину ноль, при $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Слѣд. наименьшая величина скобокъ есть $-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$; умножая на положительное a, найдемъ и для y наименьшую величину, которая слѣд. $=$

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

599. Графическое представленіе хода измѣненій квадратнаго тринома.

Укажемъ планъ построенія кривыхъ, изображающихъ измѣненія тринома, различая два главныхъ случая: $a>0$ и $a<0$, и въ каждомъ изъ нихъ 3 подраздѣленія: $b^2-4ac>0$, $b^2-4ac=0$, $b^2-4ac<0$.

Пусть $a>0$ и $b^2-4ac>0$; въ этомъ случаѣ таблица измѣненій тринома (§ 598) показываетъ, что при $x=-\dfrac{b}{2a}$ онъ имѣетъ отрицательный mini-

mum $= -\frac{b^2-4ac}{4a}$; затѣмъ при x, равныхъ корнямъ (x_1 и x_2) обращается въ ноль; наконецъ, по мѣрѣ: уменьшенія перемѣннаго x отъ x_1 до $-\infty$ и увеличенія отъ x_2 до $+\infty$, триномъ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$. При каждыхъ двухъ значеніяхъ x, равноотстоящихъ отъ $-\frac{b}{2a}$, значенія тринома одинаковы по величинѣ и по знаку. Отсюда такое построеніе. Откладываемъ (черт. 16) на оси абсциссъ, вправо или влѣво, смотря по знаку, отрѣзокъ $OA = -\frac{b}{2a}$. Въ точкѣ A проводимъ параллель BC къ оси yy' и откладываемъ на ней отрѣзокъ $AB = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ внизъ отъ точки A (т. к. minimum этотъ < 0); такимъ образомъ получаемъ наименьшую ординату, и точка B есть нисшая точка кривой. Вправо и влѣво отъ точки A откладываемъ линіи $AH = AH' = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$: получаемъ точки H и H′, которыми опредѣляются корни OH и OH′ тринома; для этихъ значеній x ординаты $= 0$, слѣд. въ точкахъ H и H′ кривая пересѣкаетъ ось x—въ. Соединивъ точку B съ точками H и H′ кривою, продолжаемъ части BH и BH′ этой кривой вверхъ, располагая обѣ вѣтви симметрично относительно прямой BC. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ (§ 597, 3), что для всякихъ двухъ значеній x, равноотстоящихъ отъ OA, значенія y равны, т. е. что если взять $AP = AP'$, то перпендикуляры PM и P′M′ къ оси xx' въ точкахъ P и P′, представляющія ординаты кривой, равны; слѣд. хорда MM′ будетъ параллельна оси x—въ и раздѣлится прямою AC пополамъ. Слѣд. линія AC дѣлитъ пополамъ всѣ хорды кривой, ей перпендикулярныя, т. е. дѣлитъ кривую на двѣ симметричныя части. Поэтому AC наз. *осью* кривой, точка B *вершиною* кривой. Самая кривая есть *парабола*.

Для болѣе точнаго построенія кривой нужно дать x-су большее число значеній и вычислить соотвѣтствующія значенія тринома, нанося ихъ на ординатахъ: такимъ образомъ получится большее число точекъ кривой и фигура ея опредѣлится точнѣе. Такимъ образомъ ходъ измѣненій тринома изображается наглядно и выясняются всѣ частности. Напр., видно, что кривая можетъ пересѣкать ось x-овъ только тогда, когда minimum отрицателенъ, и т. п.

Разъ кривая построена тщательно, т. е. при помощи достаточнаго числа точекъ, она можетъ служить для болѣе быстраго опредѣленія величинъ функціи (y), соотвѣтствующихъ данной величинѣ перемѣннаго x, и обратно, для опредѣленія значеній x, соотвѣтствующихъ данному y. Въ первомъ случаѣ достаточно нанести данной x по оси $x'x$ отъ точки 0, вправо или влѣво, см. по знаку; пусть P будетъ найденная точка; затѣмъ взять точку M кривой, въ которой перпендикуляръ къ оси $x'x$, возставленный въ точкѣ P, пересѣкаетъ кривую. Длина MP и представитъ абсолютную величину тринома, о знакѣ же судимъ по положенію точки M относительно оси x-овъ.

Для опредѣленія значеній x-са, при которыхъ триномъ принимаетъ данную величину k, наносимъ на ось y-въ, начиная отъ точки 0, въ направленіи, опредѣляемомъ знакомъ k, длину $0K = k$; черезъ точку K проводимъ параллель оси x-въ: пусть она встрѣчаетъ кривую въ точкахъ M и M′: абсциссы OP и OP′ этихъ точекъ и будутъ искомыя значенія x.

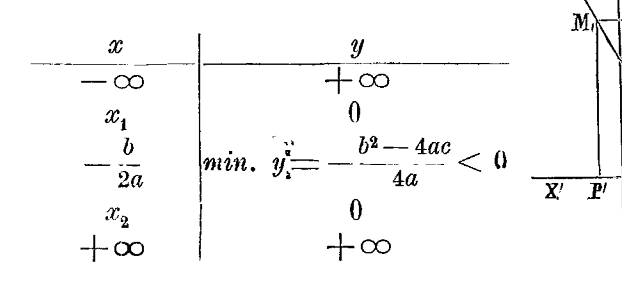
Сказаннаго достаточно для построенія кривыхъ во всѣхъ случаяхъ; разъясненія излишни. Поэтому мы прямо прилагаемъ таблички измѣненій тринома для каждаго случая, а противъ нихъ кривыя, выражающія эти измѣненія.

Значеніе линій указано вслѣдъ за каждымъ чертежемъ.

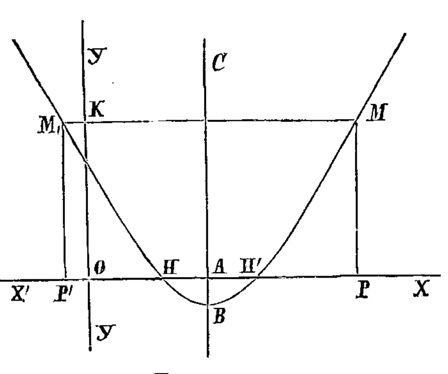
I случай: $a > 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0$; $x_1 < x_2$.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$



x	y
$-\infty$	$+\infty$
x_1	0
$-\frac{b}{2a}$	$min.\ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$
x_2	0
$+\infty$	$+\infty$

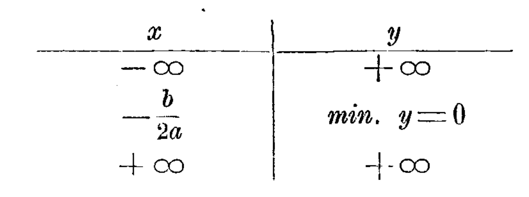


Черт. 16.

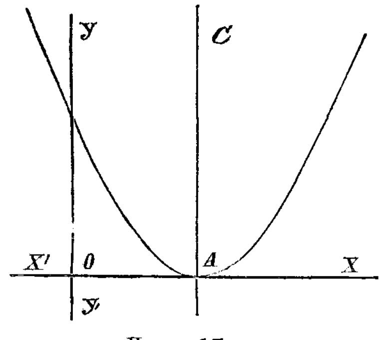
$$OA = -\frac{b}{2a};\quad AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a};\quad OH = x_1;\quad OH' = x_2.$$

2. $b^2 - 4ac = 0$; $x_1 = x_2$.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$



x	y
$-\infty$	$+\infty$
$-\frac{b}{2a}$	$min.\ y = 0$
$+\infty$	$+\infty$



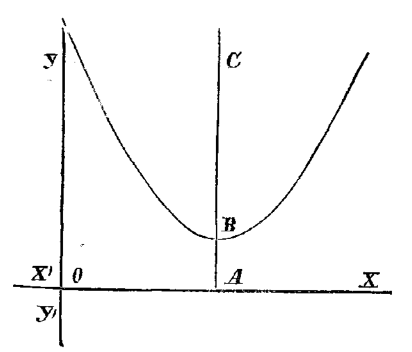
Черт. 17.

$$OA = -\frac{b}{2a}$$

3. $b^2 - 4ac < 0$; x_1 и x_2 мнимые.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

x	y
$-\infty$	$+\infty$
$-\frac{b}{2a}$	$min.\ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$
$+\infty$	$+\infty$



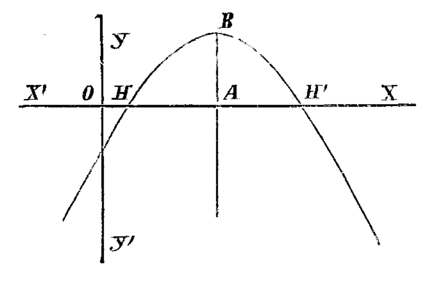
Черт. 18.

$$OA = -\frac{b}{2a};\quad AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

II случай: $a < 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0$; $x_1 < x_2$.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$



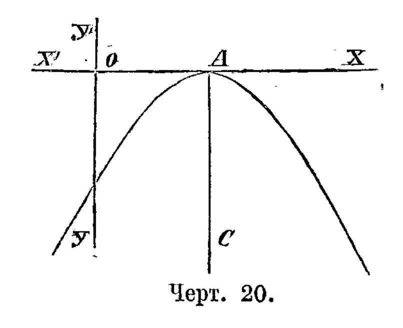
x	y
$-\infty$	$-\infty$
x_1	0
$-\frac{b}{2a}$	$max.\ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$
x_2	0
$+\infty$	$-\infty$

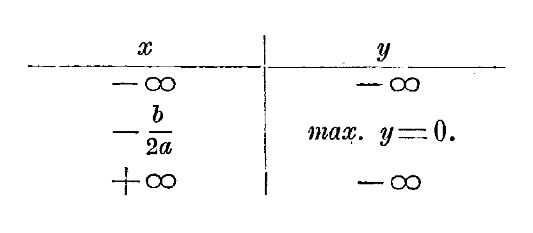
Черт. 19.

$$0A = -\frac{b}{2a};\quad AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a};\quad 0H = x_1;\quad 0H' = x_2.$$

2. $b^2 - 4ac = 0$; $x_1 = x_2$.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$





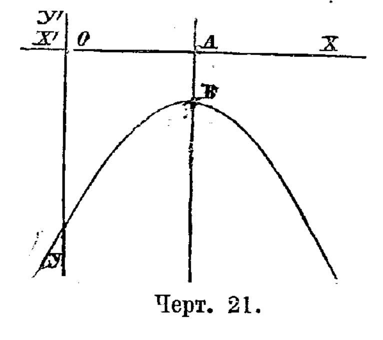
x	y
$-\infty$	$-\infty$
$-\frac{b}{2a}$	$max.\ y = 0.$
$+\infty$	$-\infty$

Черт. 20.

$$0A = -\frac{b}{2a}.$$

3. $b^2 - 4ac < 0$; x_1 и x_2 мнимые.

$$y = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$



x	y
$-\infty$	$-\infty$
$-\frac{b}{2a}$	$max.\ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$
$+\infty$	$-\infty$

Черт. 21.

$$0A = -\frac{b}{2a};\quad AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

600. Примѣръ I. *Изслѣдовать измѣненія тринома* $y=\frac{3}{2}x^2+12x+18$ *при измѣненіи* x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Представимъ триномъ въ видѣ

$$y=\frac{3}{2}\left[(x+4)^2-4\right].$$

Отсюда, по предыдущему, прямо слѣдуетъ таблица измѣненій:

x	$-\infty$	$<$	-6	$<$	-4	$<$	-2	$<$	$+\infty$
y	$+\infty$	$>$	0	$>$	-6	$<$	0	$<$	$+\infty$

т. е. данный триномъ уменьшается отъ $+\infty$ до -6, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до -4; потомъ онъ увеличивается отъ -6 до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ -4 до $+\infty$. Слѣд. триномъ имѣетъ minimum $=-6$ при $x=-4$; проходитъ дважды чрезъ каждую величину, большую -6, и никогда не дѣлается меньше -6.

Графически измѣненія функціи изобразятся измѣненіемъ ординаты параболы, которой ось параллельна оси y, причемъ координаты нисшей точки (вершины) суть: $x=-4$, $y=-6$; кривая два раза пересѣкаетъ ось x, въ точкахъ, коихъ абсциссы суть: -2 и -6.

Черт. 22.

Примѣръ II. — *Изслѣдовать измѣненія тринома* $y=-x^2+2x-3$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ до $+\infty$.

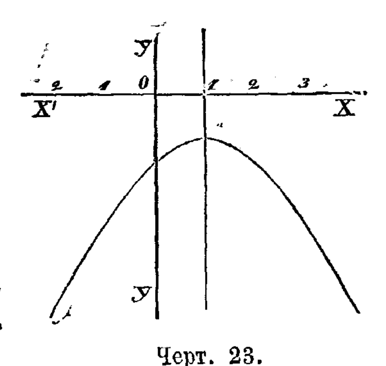
Представимъ триномъ въ видѣ:

$$y=-\left[(x-1)^2+2\right].$$

Имѣемъ таблицу измѣненій

x	$-\infty$	$<$		$<$	$+1$	$<$		$<$	$+\infty$
y	$-\infty$	$<$		$<$	-2	$>$		$>$	$-\infty$

Заключаемъ, что триномъ увеличивается отъ $-\infty$ до -2, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+1$; затѣмъ онъ уменьшается отъ -2 до $-\infty$, когда x возрастаетъ отъ $+1$ до $+\infty$. Слѣдоват. функція имѣетъ maximum (-2), соотвѣтствующій $x=+1$; слѣд. она не проходитъ черезъ 0, но проходитъ дважды чрезъ всякое значеніе, меньшее -2. Парабола, представляющая ходъ измѣненій тринома, вся лежитъ въ области отрицательныхъ игрековъ.



Черт. 23.

III. Изслѣдованіе биквадратнаго тринома.

601. Теорема.—*Биквадратный триномъ*

$$y=ax^4+bx^2+c$$

есть функція непрерывная для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x *отъ*

$-\infty$ до $+\infty$. Функція эта необходимо имѣетъ maximum, либо minimum, равный c*; кромѣ того, когда* a *и* b *имѣютъ противоположные знаки, она еще имѣетъ либо два maximum'а, либо два minimum'а; если же* a *и* b *имѣютъ знаки одинаковые, то никакого max., или minim., кромѣ* c, *триномъ не имѣетъ.*

1. Очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ значеніи x триномъ дѣйствителенъ и конеченъ. Давъ перемѣнному x нѣкоторое приращеніе h и вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ соотвѣтствующее приращеніе y (k):

$$k = a(x+h)^4 + b(x+h)^2 + c - ax^4 - bx^2 - c = h[4ax^3 + 2bx + h(6ax^2 + 4axh + ah^2 + b)].$$

Множитель въ квадратныхъ скобкахъ конеченъ при всякихъ конечныхъ x и h; и слѣд. при безконечно маломъ h, вторая часть м. б. сдѣлана какъ угодно мала; слѣд. триномъ непрерывенъ.

2. Подставимъ триномъ въ видѣ

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Первый случай: $a > 0$, $b < 0$.

Какъ и для квадратнаго тринома, составляемъ таблицу:

x	$-\infty \cdot\cdot < \cdot\cdot -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot\cdot < \cdot\ 0 \cdot < \cdot\cdot +\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot < \cdot +\infty$
x^2	$+\infty \cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot -\frac{b}{2a} \cdot > \cdot\ 0 \cdot < \cdot\cdot\cdot -\frac{b}{2a} \cdot < \cdot +\infty$
$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty \cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot\ 0 \cdot\cdot < \cdot \frac{b^2}{4a^2} \cdot > \cdot\cdot\ 0 \cdot < \cdot +\infty$

Слѣд. $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ проходитъ черезъ minimum 0, когда x проходитъ чрезъ величину $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; затѣмъ тотъ же квадратъ проходитъ чрезъ maximum $\frac{b^2}{4a^2}$, когда x обращается въ 0; уменьшается до minimum'а равнаго нулю, когда x увеличивается до $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, а потомъ увеличивается до безконечности.

Прибавляя постоянное количество $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, и умножая на положительное количество a, мы не измѣнимъ смысла неравенствъ, и найдемъ:

x	$-\infty \cdot\cdot < \cdot\cdot -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot\cdot < \cdot\ 0 \cdot < \cdot\cdot +\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot\cdot < \cdot\cdot +\infty$
y	$+\infty \cdot\cdot > \cdot\cdot -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot\cdot < \cdot\ c \cdot > \cdot\cdot -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot\cdot < \cdot\cdot +\infty$

Итакъ, въ случаѣ: $a > 0$, $b < 0$, биквадратный триномъ имѣетъ два minimum'а, равные $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, и одинъ maximum, равный c. Minima триномъ имѣетъ при $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, maximum при $x = 0$.

Для слѣдующихъ случаевъ мы прямо даемъ результаты, которые получаются тѣмъ же пріемомъ.

Второй случай: $a > 0, \quad b \geqq 0.$

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdot \cdot < \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot +\infty \\ y & +\infty \cdot \cdot > \cdot \cdot > \cdot \cdot \cdot c \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot +\infty \end{array}$$

триномъ имѣетъ minimum $= c$, при $x = 0$.

Третій случай: $a < 0, \quad b \leqq 0.$

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdot \cdot < \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot +\infty \\ y & -\infty \cdot \cdot < \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot c \cdot \cdot \cdot > \cdot \cdot \cdot > \cdot \cdot -\infty \end{array}$$

триномъ имѣетъ maximum $= c$, при $x = 0$.

Четвертый случай: $a < 0, \quad b > 0.$

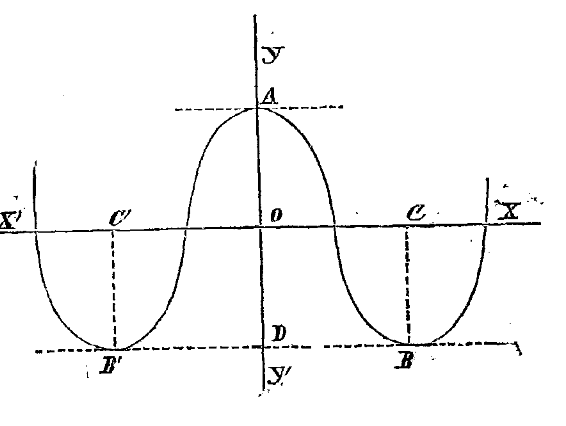
$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdot \cdot < \cdot \cdot < -\sqrt{-\frac{b}{2a}} < \cdot \; 0 \cdot \cdot < \cdot \cdot +\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot \cdot \cdot < +\infty \\ y & -\infty \cdot \cdot < \cdot \cdot < -\frac{b^2-4ac}{4a} > \cdot \; c \cdot \cdot < \cdot \cdot < \cdot -\frac{b^2-4ac}{4a} \cdot > \cdot \cdot -\infty \end{array}$$

Въ этомъ случаѣ триномъ имѣетъ два maximum'а, равные $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, которыхъ онъ достигаетъ при $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, и одинъ minimum $= c$, при $x = 0$.

602. Графическое представленіе. 1. Пусть напр.

$$a > 0, \quad b < 0, \quad b^2 - 4ac > 0, \quad c > 0.$$

При этихъ условіяхъ триномъ имѣетъ положительный maximum c и два отрицат. минимальныя значенія, равныя $-\frac{b^2-4ac}{4a}$; max. c триномъ имѣетъ при $x = 0$, minima при $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Отсюда построеніе: беремъ $0A = c$; $0C = 0C' = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$; $0D = \frac{b^2-4ac}{4a}$. Maximum соотвѣтствуетъ точкѣ A кривой, minima — точкамъ B и B'. Ось xx' пересѣкаетъ кривую въ четырехъ дѣйствительныхъ точкахъ, слѣд. триномъ 4 раза обращается въ ноль, при x попарно равныхъ, но противоположныхъ по знаку. Это совершенно сообразно съ тѣмъ результатомъ, что при данныхъ условіяхъ биквадратное ур. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ имѣетъ 4 различныхъ дѣйствительныхъ корня.



Черт. 24.

Возьмемъ численный примѣръ для разсматриваемаго случая.

Примѣръ. — *Изслѣдовать измѣненіе* y, *связаннаго съ* x *уравненіемъ* $2y = x^4 - 6x^2 + 5$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

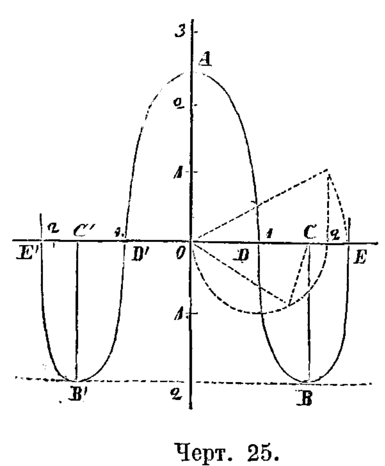
Въ числѣ критическихъ значеній x опредѣливъ и корни тринома $x^4 - 6x^2 + 5$, которые равные $\pm\sqrt{5}$ и ± 1, даемъ y форму:

$$y = \frac{1}{2}\left[(x^2 - 3)^2 - 4\right],$$

и находимъ слѣдующую таблицу измѣненій y:

x	$-\infty$	$<$	$-\sqrt{5}$	$<$	$-\sqrt{3}$	$<$	-1	$<$	0	$<$	$+1$	$<$	$+\sqrt{3}$	$<$	$+\sqrt{5}$	$<$	$+\infty$
y	$+\infty$	$>$	0	$>$	-2	$<$	0	$<$	$\frac{5}{2}$	$>$	0	$>$	-2	$<$	0	$<$	$+\infty$
					minim.				max.				minim.				

Отсюда заключаемъ, что функція уменьшается отъ $+\infty$ до -2, когда x увеличивается отъ $-\infty$ до $-\sqrt{3}$, проходя чрезъ 0 при $x = -\sqrt{5}$; затѣмъ она увеличивается до $\frac{5}{2}$ при возрастаніи x до 0, проходя чрезъ нулевое значеніе при $x = -1$. Съ этого момента функція проходитъ прежнія значенія, въ обратномъ порядкѣ. На чертежѣ:



Черт. 25.

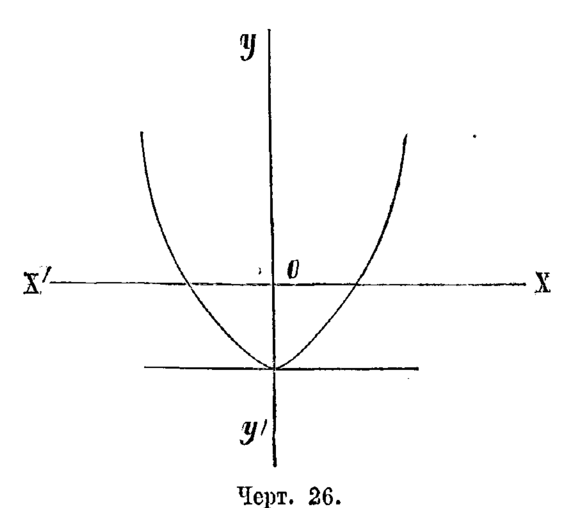
$$0C' = 0C = \sqrt{3};$$

$$C'B' = CB = 2;$$

$$0A = \frac{5}{2};$$

$$0E' = 0E = \sqrt{5}; \quad 0D' = 0D = 1.$$

2. Пусть будетъ: $a > 0$, $b > 0$.



Черт. 26.

При этихъ условіяхъ триномъ $ax^4 + bx^2 + c$ уменьшается отъ $+\infty$ до c, а потомъ возрастаетъ отъ c до $+\infty$, проходя черезъ minimum c при $x = 0$. Въ ноль она можетъ обратиться только два раза, при двухъ равныхъ и противоположныхъ значеніяхъ x, и то лишь въ томъ случаѣ, когда $c < 0$.

Эти измѣненія представлены на чертежѣ, причемъ предполагается $c < 0$.

IV. Изслѣдованіе дроби: $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$.

603. Даемъ перемѣнному x нѣкоторое приращеніе h; для соотвѣтствующаго приращенія k дроби находимъ:

$$k=\frac{a(x+h)+b}{a'(x+h)+b'}-\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{h(ab'-a'b)}{(a'x+b')(a'x+b'+a'h)}.$$

Отсюда заключаемъ: 1) когда x приближается къ $-\frac{b'}{a'}$, знаменатель выраженія k приближается къ 0, а слѣд. коэффиціентъ при h, т. е. дробь $\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')(a'x+b'+a'h)}$ приближается къ ∞, поэтому и приращеніе k функціи приближается къ ∞, т. е. функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. При всѣхъ другихъ значеніяхъ x, по мѣрѣ приближенія h къ 0, и k стремится къ 0, т. е. функція непрерывна. Итакъ, дробь y непрерывна къ каждомъ изъ интервалловъ:

$$\text{отъ } -\infty \text{ до } -\frac{b'}{a'} \quad \text{и} \quad \text{отъ } -\frac{b'}{a'} \text{ до } +\infty,$$

претерпѣвая разрывъ непрерывности только при $x=-\frac{b'}{a'}$, общему предѣлу этихъ интервалловъ.

2) Знакъ выраженія k зависитъ только отъ числителя; въ самомъ дѣлѣ, знаменатель можно представить въ видѣ $(a'x+b')^2+h\,.\,a'(a'x+b')$, а это выраженіе, при достаточно маломъ h, существенно—положительно, ибо знакъ его будетъ зависить только отъ перваго члена $(a'x+b')^2$, который (какъ квадратъ) положителенъ при всякомъ дѣйствительномъ x. Но числитель $ab'-a'b$, какъ количество постоянное, всегда имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ, сл. функція всегда идетъ: или возрастая, или уменьшаясь; т. е. въ каждомъ изъ интервалловъ непрерывности дробь

идетъ постоянно увеличиваясь, если $ab'-a'b>0$;
идетъ постоянно уменьшаясь, если $ab'-a'b<0$;
имѣетъ постоянную величину, если $ab'-a'b=0$,

ибо въ послѣднемъ случаѣ всегда $k=0$; т. е. дробь не получаетъ приращеній при измѣненіяхъ x, сохраняя одну и туже величину.

Итакъ, при изслѣдованіи измѣненій функціи, должны различать три указанные случая; при этомъ, раздѣливъ числ. на знаменателя дроби, получаемъ

$$y=\frac{a}{a'}+\frac{a'b-ab'}{a'^2x+a'b'}=\frac{a}{a'}+\frac{\frac{a'b-ab'}{a'^2}}{x+\frac{b'}{a'}}.$$

Положивъ, для краткости, $\frac{a'b-ab'}{a'^2}=\lambda$, замѣчаемъ, что знакъ λ зависитъ только отъ числителя, именно: при $ab'-a'b>0$ будетъ $\lambda<0$, а при $ab'-a'b<0$ будетъ $\lambda>0$; дробь можно представить въ видѣ

$$y=\frac{a}{a'}+\frac{\lambda}{x+\frac{b'}{a'}}.$$

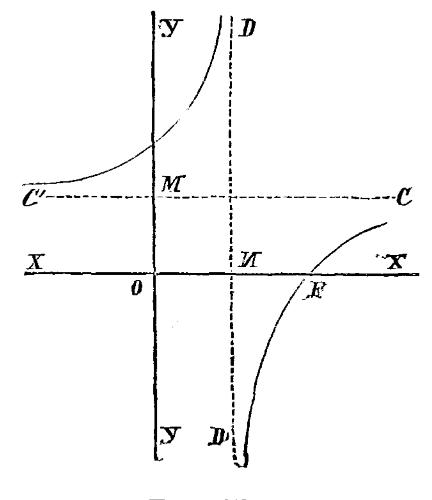
Соображая все сказанное, прямо находимъ слѣдующіе выводы относительно измѣненій дроби при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

I. $ab'-ba'>0$.

$$y=\frac{a}{a'}+\frac{\lambda}{x+\frac{b'}{a'}},\ \text{гдѣ}\ \lambda<0.$$

x	$-\infty<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot<-\frac{b'}{a'}-\varepsilon$	$-\frac{b'}{a'}+\varepsilon<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot<+\infty$
y	$\frac{a}{a'}<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot<+\infty$	$-\infty<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot<\frac{a}{a'}$.

Т. е. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-\frac{b'}{a'}$, функція идетъ постоянно увеличиваясь отъ $\frac{a}{a'}$ до $+\infty$; при $x=-\frac{b'}{a'}$ имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности: функція изъ $+\infty$ внезапно обращается въ $-\infty$; затѣмъ при возрастаніи x отъ $-\frac{b'}{a'}$ до $+\infty$, идетъ постоянно увеличиваясь отъ $-\infty$ до $\frac{a}{a'}$. Въ одномъ изъ интерваловъ она проходитъ чрезъ 0, при $x=-\frac{b}{a}$.



Черт. 27.

Измѣненія функціи изобразятся, такимъ образомъ, измѣненіями ординатъ слѣдующей кривой (гипербола).

На чертежѣ (27);

$$0M=\frac{a}{a'}.$$

$$0N=-\frac{b'}{a'}.$$

$$0F=-\frac{b}{a}.$$

CC' и DD'—двѣ ассимптоты кривой.

II. $ab'-ba'<0$.

$$y=\frac{a}{a'}+\frac{\lambda}{x+\frac{b'}{a'}},\ \text{гдѣ}\ \lambda>0.$$

x	$-\infty\cdot\ \cdot<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot<\cdot\ \cdot-\frac{b'}{a'}-\varepsilon$	$-\frac{b'}{a'}+\varepsilon<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot<+\infty$
y	$\frac{a}{a'}\cdot\ \cdot>\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot>\cdot\ \cdot-\infty$	$+\infty>\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot>\frac{a}{a'}$.

Т. е. при возрастанiи x отъ $-\infty$ до $-\frac{b'}{a'}$, функцiя идетъ уменьшаясь непрерывно отъ $\frac{a}{a'}$ до $-\infty$; при $x=-\frac{b'}{a'}$ происходитъ разрывъ непрерывности: изъ $-\infty$ въ $+\infty$; затѣмъ, при увеличенiи x отъ $-\frac{b'}{a'}$ до $+\infty$, функцiя идетъ постоянно уменьшаясь отъ $+\infty$ до $\frac{a}{a'}$. Въ одномъ изъ интерваловъ непрерывности она проходитъ чрезъ 0, при $x=-\frac{b}{a}$.

Кривая измѣненiй (гипербола) такова:

$$0M=\frac{a}{a'}$$

$$0N=-\frac{b'}{a'}$$

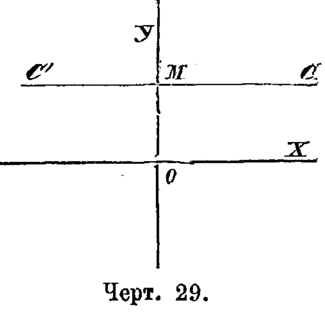
$$0F=-\frac{b}{a}.$$

CC′ и DD′—двѣ ассимптоты кривой.

Черт. 28.

III. $ab'-ba'=0$.

При этомъ и $\lambda=0$, а потому при всякомъ x имѣемъ $y=\frac{a}{a'}$, — величинѣ постоянной. Слѣд. при измѣненiи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, дробь не измѣняетъ своей величины; ея кривая будетъ прямая CC′, которой ординаты равны $0M=\frac{a}{a'}$.



Черт. 29.

Задача.—*Найти прямо условiе необходимое и достаточное для того, чтобы дробь* $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ *имѣла постоянную величину при всякомъ* x.

1-й способъ. — Такъ какъ дробь должна имѣть одну и туже величину при всякомъ x, то, между прочимъ, она должна имѣть постоянную величину, напр. при $x=0$ и при $x=1$. Но при $x=0$, $y=\frac{b}{b'}$; при $x=1$, $y=\frac{a+b}{a'+b'}$; слѣд. должно быть: $\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{b}{b'}$, откуда по свойству пропорцiи, имѣемъ: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

Это условiе, будучи необходимымъ, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно; ибо изъ него: $b'=\frac{a'b}{a}$, и слѣд. дробь обращается въ

$$\frac{ax+b}{a'\left(x+\frac{b}{a}\right)}, \text{ или въ } \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{a'\left(x+\frac{b}{a}\right)}, \text{ а это } = \frac{a}{a'}.$$

Итакъ, условіе необходимое и достаточное для того, чтобы наша дробь имѣла постоянную величину, есть $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, или $ab'-a'b=0$, что и было найдено при изслѣдованіи.

2-й способъ. — Пусть k будетъ эта постоянная, пока неизвѣстная, величина. Нахожденіе условія, необх. и дост. для того, чтобы $\frac{ax+b}{a'x+b'}=k$, сводится къ нахожденію условія, при которомъ было бы $ax+b=k(a'x+b')$, или $(a-a'k)x+(b-b'k)=0$ при всякомъ x; а для этого необходимо и достаточно (§ 72), чтобы было: $a-a'k=0$ и $b-b'k=0$, или $k=\frac{a}{a'}$ и $k=\frac{b}{b'}$, откуда $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, или $ab'-a'b=0$.

604. *Приложенія. I.—Изслѣдовать измѣненія* x *задачи § 388, полагая, что шарикъ, помѣщенный внѣ билліарда, можетъ свободно проникать внутрь круга и свободно возвращаться въ исходную точку?*

Для x мы имѣемъ формулу

$$x=\frac{R(R-a)}{2a}.$$

R—величина постоянная, слѣд. x измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ дробь $\frac{R-a}{2a}$. Эта дробь даетъ: $ab'-ba'=-2R$, а потому заключаемъ, что увеличенію a соотвѣтствуетъ уменьшеніе x-са. Формула даетъ: если $x=R$, то $a=\frac{R}{3}$; если же $a=\infty$, $x=-\frac{R}{2}$. Отсюда заключаемъ, что когда a возрастаетъ отъ своего minimum'a до $+\infty$, x уменьшается отъ своего maximum'a R до minimum'a $=-\frac{R}{2}$; такимъ образомъ сразу находимъ таблицу критическихъ величинъ x:

a	$\frac{R}{3}$	$\frac{R}{2}$	R	$+\infty$
x	R	$\frac{R}{2}$	0	$-\frac{R}{2}$.

II. *Пересѣчь данный шаръ плоскостью такъ, чтобы объемъ одного изъ сегментовъ составлялъ данную дробь К объема цилиндра одной высоты и одного основанія съ сегментомъ. Между какими предѣлами можно задавать число К?*

Обозначивъ высоту сегмента буквою x, найдемъ:

$$x=3R\cdot\frac{2K-1}{3K-1}.$$

3R — постоянно, сл. x измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ дробь $\frac{2K-1}{3K-1}$; дробь эта даетъ: $ab'-ba'=+1$; заключаемъ, что x и K измѣняются въ одномъ смыслѣ. Но предѣльныя значенія x суть 0 и 2R; подставляя въ формулу вм. x сперва 0, потомъ 2R, находимъ:

x	$0 \cdot\cdot\cdot 2R$
K	$\frac{1}{2} \cdot\cdot\cdot \infty$.

Слѣд. для K можно брать всѣ числа отъ $\frac{1}{2}$ до $+\infty$.

Примѣчаніе. — Изъ числа дробныхъ функцій элементарному изслѣдованію подлежитъ еще квадратная дробь $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$; но изученіе ея раціональнѣе отнести къ специальной статьѣ о maxima и minima.

V. Примѣры изслѣдованія ирраціональныхъ функцій.

605. Примѣръ I. — *Изслѣдовать функцію* $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ до $+\infty$.

Триномъ x^2+2x-3 имѣетъ дѣйствительные корни: -3 и $+1$; слѣд. онъ положителенъ при всѣхъ x, меньшихъ -3, а также большихъ $+1$, и отрицателенъ при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между -3 и $+1$. Итакъ функція y дѣйствительна при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней тринома, и мнима для всякаго x, заключающагося между корнями.

Докажемъ, что она непрерывна для всѣхъ x, заключающихся между $-\infty$ и -3, и между $+1$ и $+\infty$. Пусть x' и $x'+h$ будутъ два значенія x, лежащихъ внѣ интервалла отъ -3 до $+1$. Имѣемъ:

$$y'=\sqrt{x'^2+2x'-3} \quad \text{и} \quad y'+K=\sqrt{(x'+h)^2+2(x'+h)-3};$$

отсюда $$K=\sqrt{(x'+h)^2+2(x'+h)-3}-\sqrt{x'^2+2x'-3};$$

или, множа и дѣля вторую часть на сумму радикаловъ:

$$K=\frac{h^2+2h(x'+1)}{\sqrt{(x'+h)^2+2(x'+h)-3}+\sqrt{x'^2+2x'-3}};$$

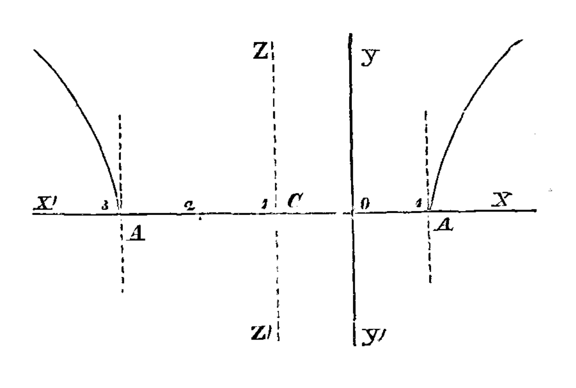
по мѣрѣ приближенія h къ нулю, числитель стремится къ нулю; знаменатель же, будучи дѣйствительнымъ при x' и $x'+h$, отличенъ отъ нуля, ибо эти значенія x отличны отъ -3 и $+1$. Слѣд. частное K стремится къ нулю вмѣстѣ съ h, а сл. функція y непрерывна въ указанныхъ интервалахъ ея дѣйствительности.

Сперва изслѣдуемъ измѣненія подрадикальнаго тринома, а отсюда и самой функціи; получаемъ таблицу:

x	$-\infty \ldots < \ldots -3 \ldots < \ldots -1 \ldots < \ldots +1 \ldots < \ldots +\infty$
x^2+2x-3	$+\infty \ldots > \ldots \; 0 \ldots > \ldots -4 \ldots < \ldots \; 0 \ldots < \ldots +\infty$
$\sqrt{x^2+2x-3}$	$+\infty \ldots > \ldots \; 0$ ———————— $0 \ldots < \ldots +\infty$.

y — мнимый.

Не трудно изобразить измѣненія функціи графически. Для этого замѣтимъ, что триномъ имѣетъ равныя значенія, когда x получаетъ величины, равноотстоящія отъ -1; сл, и y имѣетъ это свойство, и потому кривая имѣетъ осью симметріи прямую ZZ', параллельную оси y и отстоящую отъ этой оси на $OC=1$.



Черт. 30.

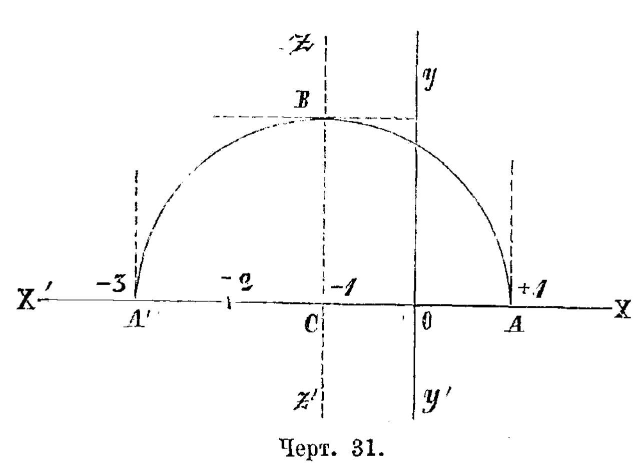
Затѣмъ, кривая не имѣетъ точекъ между параллелями къ оси yy', находящимися отъ этой оси въ разстояніяхъ: $OA=+1$, $OA'=-3$, ибо въ этихъ предѣлахъ y имѣетъ мнимыя значенія; наконецъ, кривая не имѣетъ точекъ, лежащихъ внизу отъ оси x, ибо y есть положительная величина $\sqrt{x^2+2x-3}$, по заданію.

Примѣръ II. — *Изслѣдовать функцію* $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$, *когда* x *измѣняется отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Корни тринома $-x^2-2x+3$ суть -3 и $+1$; изъ закона измѣненій тринома заключаемъ, что онъ имѣетъ положительныя величины только при x, содержащихся между -3 и $+1$; для всѣхъ значеній x, лежащихъ внѣ этихъ предѣловъ, триномъ отрицателенъ; слѣд. функція y дѣйствительна, когда x измѣняется внутри корней, и мнима при всѣхъ x, лежащихъ внѣ корней. Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ докажемъ, что она непрерывна для интервалла отъ -3 до $+1$. Отсюда такая таблица измѣненій:

x	$-\infty$ ...	< ...	-3 ...	< ...	-1 ...	< ...	$+1$ ...	< ...	$+\infty$
$-x^2-2x+3$	$-\infty$ ...	< ...	0 ...	< ...	$+4$ ...	> ...	0 ...	> ...	$-\infty$
$\sqrt{-x^2-2x+3}$	————	————	0 ...	< ...	$+2$ ...	> ...	0	————	————
	y — мнимый.							y — мнимый.	

Итакъ, функція возрастаетъ отъ 0 (при $x=-3$) до $+2$ (при $x=-1$), затѣмъ уменьшается до 0 (при $x=+1$). Слѣд. она имѣетъ maximum $=+2$ при $x=-1$.



Черт. 31.

Кривая имѣетъ ось симметріи, параллельную yy' и проходящую черезъ точку C, причемъ $OC=1$; на этой оси помѣщается maximum $=+2$. Кривая не имѣетъ точекъ внѣ параллелей оси yy', проведенныхъ черезъ точки A и A', такія, что $OA=1$ и

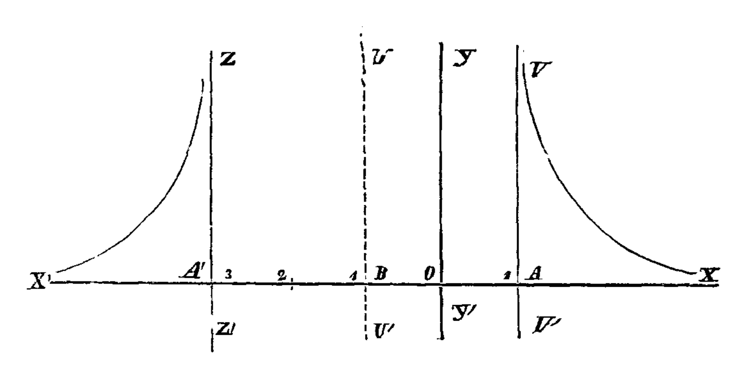
OA' = 3; она не имѣетъ точекъ внизу отъ оси xx'. Кривая эта — полуокружность центра C.

Примѣръ III. — *Изслѣдовать функцію* $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Функція непрерывна въ интерваллахъ: отъ $-\infty$ до -3 и отъ $+1$ до $+\infty$; и претерпѣваетъ разрывъ непрерывности отъ -3 до $+1$. Измѣненія ея обратны измѣненіямъ тринома $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$; отсюда таблица:

x	$-\infty \ldots < \ldots -3 \ldots < \ldots -1 \ldots < \ldots +1 \ldots < \ldots +\infty$
$x^2 + 2x - 3$	$+\infty \ldots > \ldots \quad 0 \ldots > \ldots -4 \ldots < \ldots \quad 0 \ldots < \ldots +\infty$
$\sqrt{x^2 + 2x - 3}$	$+\infty \ldots > \ldots \quad 0$ ———————— $0 \ldots < \ldots +\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$	$0 \ldots < \ldots +\infty$ ———————— $+\infty \ldots > \ldots 0$.

Кривая функціи имѣетъ ось симметріи uu', параллельную оси yy' и опредѣляемую линіей OB = -1. Затѣмъ она не имѣетъ точекъ между vv' и zz', параллельными оси yy' и отстоящими отъ этой оси на OA = 1 и OA' = 3.



Черт. 32.

Вмѣстѣ съ этимъ, тѣ же прямыя и ось xx' суть три ассимптоты кривой, которая, къ тому же, не имѣетъ точекъ внизу отъ оси x—овъ.

606. Задачи.

1. Изслѣдовать функціи:

$$y = 3x + 4;\ y = -2x + 7;\ 2x - 5y + 3 = 0;\ 3x + 4y - 1 = 0;$$
$$7x - 8y = 0;\ 5x + 5y = 0$$

и построить соотвѣтствующія прямыя.

2. Построивъ прямую: $5x - 3y + 4 = 0$, опредѣлить, въ какой части плоскости находятся точки, которыхъ координаты удовлетворяютъ тому или другому изъ неравенствъ.

$$5x - 3y + 4 > 0,\ 5x - 3y + 4 < 0.$$

3. Изслѣдовать измѣненіе триномовъ:

$$3x^2 - x - 2;\ 14x^2 - x - 3;\ -2x^2 + x + 3;\ 2x^2 - 4x + 7;\ 5x^2 + 6x - 3;$$
$$4x^2 - 20x + 25;\ 2 + 8x - 3x^2$$

и начертить кривыя, изображающія эти измѣненія.

4. Изслѣдовать измѣненія триномовъ:

$$x^4 - 25x^2 + 144;\ x^4 - 8x^2 - 9;\ 3x^4 + 8x^2;\ 2x^4 + 5x^2 + 8;\ x^4 - 6x^2 + 9;$$
$$x^4 - 16;\ \frac{5}{81}x^4 - \frac{10}{9}x^2 + 2;$$

и построить кривыя измѣненій.

5. Изслѣдовать измѣненія функцій:

$$\frac{1}{2x-5};\ \frac{1}{2x-1};\ \frac{x+1}{2x-3};\ \frac{3-x}{4x+1};\ \frac{2x-3}{3x-5};\ \frac{1+3x}{1+2x}$$

и построить кривыя измѣненій.

6. Изслѣдовать измѣненіе функцій

$$\pm\sqrt{3x^2-4};\ \pm\sqrt{x^2-7x+12};\ \pm\sqrt{-x^2+7x-12};\ \pm\frac{1}{\sqrt{-x^2+7x-12}}.$$

7. Изслѣдовать формулу вогнутыхъ зеркалъ

$$p' = \frac{fp}{p-f}.$$

8. Между какими предѣлами можетъ измѣняться количество m въ формулѣ

$$x = \frac{m+10}{2m+1},$$

если x можетъ измѣняться между 0 и $+1$.

ГЛАВА XL.

Образцы изслѣдованія вопросовъ второй степени.

Задача I.

607. *Раздѣлить данную прямую* AB *въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т. е. найти на ней такую точку* C, *чтобы большій отрѣзокъ* AC *былъ среднимъ пропорціональнымъ между всею линіею* AB *и меньшимъ ея отрѣзкомъ* BC.

По условію задачи должно быть: $\overline{AC}^2 = AB \times CB$, или, назвавъ данную прямую AB буквою a, разстояніе AC буквою x, и слѣд. обозначивъ BC разностью $a - x$, получимъ уравненіе

$$x^2 = a(a-x) \ .\ .\ .\ .\ .\ (1) \quad \text{или} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Изслѣдованіе. Чтобы корень ур-нія (2) представлялъ рѣшеніе задачи въ прямомъ смыслѣ, необходимо, чтобы онъ былъ дѣйствителенъ, положителенъ и былъ $< a$.

Ур-ніе (2) имѣетъ всегда корни дѣйствительные, потому что послѣдній членъ ($-a^2$) отрицателенъ; далѣе, корни имѣютъ противоположные знаки, такъ какъ произведеніе ихъ отрицательно ($= -a^2$); притомъ, меньшій по абсолютной величинѣ корень положителенъ, ибо сумма корней отрицательна ($= -a$). Остается убѣдиться, будетъ-ли положительный корень меньшіе a; для этого подставляемъ въ триномъ, образующій первую часть ур-нія (2), вмѣсто x сперва 0, потомъ a, и замѣчаемъ, что результаты этихъ подстановокъ ($-a^2$ и $+a^2$) имѣютъ противоположные знаки. Слѣд.

положительный корень меньше a: онъ даетъ точку C, лежащую между A и B и представляющую рѣшеніе задачи въ прямомъ смыслѣ.

Другой корень уравненія отрицателенъ; чтобы найти его значеніе, подставимъ въ ур-ніе (1), *первоначальное*, $-x$ вмѣсто x; получимъ ур-ніе

$$x^2 = a(a + x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

имѣющее корни равные по величинѣ, но противоположные по знаку корнямъ ур-нія (1). Такимъ образомъ, отрицательный корень ур-нія (1), взятый съ противоположнымъ знакомъ, представляетъ прямое рѣшеніе задачи, отвѣчающей ур-нію (3). Послѣднее, какъ непосредственно видно, опредѣляетъ точку C′, лежащую на продолженіи линіи BA вправо отъ A, и также удовлетворяющую вопросу: въ самомъ дѣлѣ, положивъ $AC' = x$, имѣемъ $BC' = a + x$, и ур-ніе (3) тождественно съ

$$\overline{AC'}^2 = AB \times BC'.$$

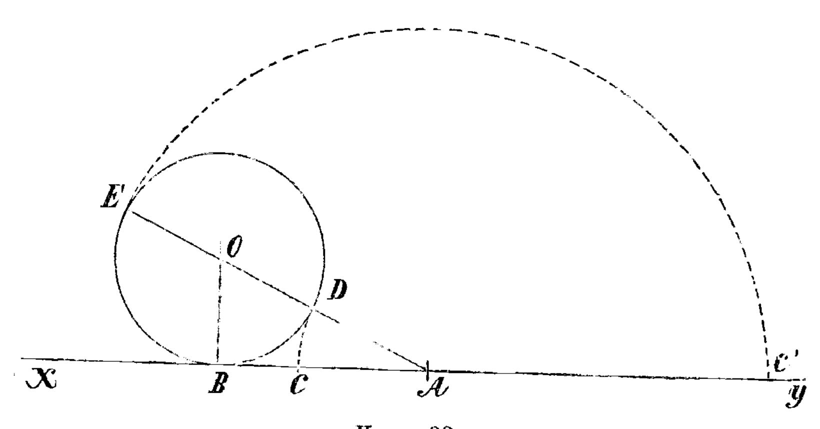
Итакъ, отрицательный корень даетъ другое рѣшеніе задачи, а знакъ этого корня показываетъ, что послѣдній д. б. нанесенъ на продолженіи линіи AB, въ сторону отъ A, противоположную первому корню. Алгебраическое рѣшеніе, кромѣ отвѣта на вопросъ въ тѣсномъ смыслѣ заданія, показало намъ, что вопросу, взятому въ болѣе широкомъ смыслѣ, удовлетворяютъ двѣ точки: C и C′, причемъ знаки корней указываютъ расположеніе этихъ точекъ относительно A.

Рѣшая ур-ніе (1), находимъ:

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$x'' = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}\right) = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Построеніе корней. Взявъ неограниченную прямую xy и на ней отрѣзокъ $AB = a$, возставляемъ къ этой прямой перпендикуляръ въ точкѣ B, откладываемъ на немъ часть $BO = \frac{a}{2}$; изъ точки O, какъ изъ центра, радіусомъ BO описываемъ окруж-



Черт. 33.

ность, и соединивъ A съ центромъ, продолжаемъ прямую AO до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ E; другую точку пересѣченія назовемъ буквою D. Прямыя AD и AE представляютъ абсолютныя величины корней x' и x''. Въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоуг. треуг. AOБ имѣемъ:

$$AO = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2};$$

Слѣд.

$$AD = AO - OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = x',$$

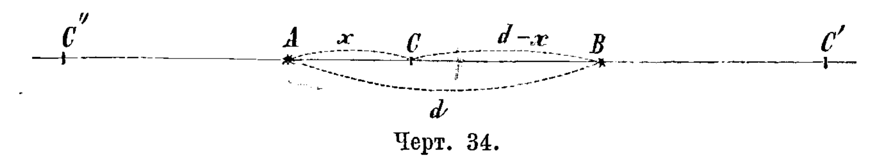
$$AE = AO + OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{a}{2} = -x''.$$

Остается нанести AD на AB влѣво отъ точки A, линію же AE на продолженіе AB вправо отъ A: для этого нужно засѣчь пряму xy двумя дугами круговъ, описанными изъ точки A, какъ изъ центра, радіусами AD и AE. Такимъ образомъ получимъ требуемыя точки C и C′.

Задача II.

608. *На неограниченной прямой, соединяющей два источника свѣта* A *и* B, *найти точку, равноосвѣщенную обоими.*

Задача эта впервые появилась въ алгебрѣ *Клеро* (1746 г.), и съ тѣхъ поръ вошла въ учебники, какъ одинъ изъ поучительныхъ образцовъ изслѣдованія вопросовъ.



Черт. 34.

Обозначимъ разстояніе AB буквою d, разстояніе искомой точки C отъ A буквою x; тогда BC будетъ равно $d-x$. Далѣе, пусть сила освѣщенія источникомъ A тѣла, находящагося отъ него на единичномъ разстояніи, будетъ α, а сила освѣщенія источникомъ B на единичномъ разстояніи пусть будетъ β. Изъ физики извѣстно, что сила освѣщенія обратно пропорціональна квадрату разстоянія освѣщаемаго тѣла отъ источника. Слѣд., если сила освѣщенія источникомъ A на разстояніи 1 есть α, то на разстояніи 2, 3, 4,... единицъ она будетъ $\frac{\alpha}{2^2}, \frac{\alpha}{3^2}, \frac{\alpha}{4^2}, \ldots$, а потому на разстояніи x она будетъ $\frac{\alpha}{x^2}$. Такимъ же образомъ сила освѣщенія точки C источникомъ B будетъ $\frac{\beta}{(d-x)^2}$. Но, по условію задачи, точка C освѣщена обоими источниками одинаково, слѣд.

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(d-x)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$(\alpha - \beta)x^2 - 2\alpha\beta \cdot x + d^2\alpha = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{d(\alpha \pm \sqrt{\alpha\beta})}{\alpha - \beta}.$$

Выраженіе это можно упростить, замѣтивъ, что: 1) $\alpha \pm \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})$; 2) $\alpha - \beta = (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})$. Взязъ сначала нижній знакъ, найдемъ:

$$x' = \frac{d\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} = \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Взявъ верхній знакъ, получимъ:

$$x'' = \frac{d\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})} = \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Эти величины мы могли бы непосредственно получить изъ ур-нія (1), написавъ его въ видѣ $\frac{(d-x)^2}{x^2} = \frac{\beta}{\alpha}$; извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ $\frac{d-x}{x} = \pm\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$, т. е. получаемъ два ур-нія первой степени: рѣшивъ ихъ, найдемъ формулы (2) и (3).

Изслѣдованіе. Такъ какъ α и β, по смыслу задачи, существенно положительны, то x' и x'' всегда дѣйствительны; d есть также величина положительная, могущая въ частности обратиться въ 0, слѣд. возможны слѣдующіе случаи:

1) $d > 0$, $\alpha > \beta$; 2) $d > 0$, $\alpha < \beta$; 3) $d > 0$, $\alpha = \beta$; 4) $d = 0$, $\alpha \gtrless \beta$; 5) $d = 0$, $\alpha = \beta$.

1-й случай: $d > 0$, $\alpha > \beta$.

Первый корень, x', положителенъ; а какъ дробь $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} < 1$, то $x' < d$. Это значитъ, что требуемая точка С находится между А и В. Кромѣ того: изъ условія $\alpha > \beta$ имѣемъ: $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$, а слѣд. и $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha} > \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, или $2\sqrt{\alpha} > \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, откуда $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} > \frac{1}{2}$, а потому $\frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} > \frac{d}{2}$, или $x' > \frac{d}{2}$. Это значитъ, что искомая точка С ближе къ источнику В, нежели къ А, что и должно быть, такъ какъ источникъ А сильнѣе.

Второй корень, x'', также положителенъ; но какъ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} > 1$, то $x'' > d$. Слѣд. второй корень опредѣляетъ другую равноосвѣщенную точку С′, лежащую отъ А на разстояніи большемъ d, т. е. вправо отъ В. Такъ и должно быть: въ самомъ дѣлѣ, оба источника изливаютъ свѣтъ во всѣ стороны, слѣд. на продолженіи АВ должна лежать другая равноосвѣщенная точка, которая должна быть ближе къ слабѣйшему источнику В.

2-й случай. $d > 0$, $\alpha < \beta$.

Первый корень, x', положителенъ, и, какъ и въ первомъ случаѣ, $< d$; кромѣ того, изъ условія $\alpha < \beta$ имѣемъ: $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$, слѣд. $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, или $2\sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, откуда $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} < \frac{1}{2}$, а сл. $x' < \frac{d}{2}$. Это значитъ, что искомая точка С ближе къ источнику А, нежели къ В, какъ и должно быть, ибо источникъ А слабѣе.

Второй корень, x'', существенно отрицателенъ, такъ какъ знаменатель его отрицателенъ. Для истолкованія значенія этого корня обратимся къ первоначальному ур-нію (1); подставивъ въ него $-x$ вмѣсто x, найдемъ ур-ніе

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(d+x)^2}.$$

Выраженіе $d-x$ означало разстояніе отъ искомой точки до В; въ новомъ ур-ніи это разстояніе выражается суммою $d+x$, а потому искомая точка должна находиться влѣво отъ А, напр. въ С″. Итакъ, отрицательный корень опредѣляетъ точку С″, ле-

жащую *влѣво отъ* A. Дѣйствительно, такая точка, находясь ближе къ слабѣйшему источнику A, будетъ равно освѣщена обоими.

3-й случай: $d > 0$, $\alpha = \beta$.

Первый корень, x', обращается въ $\frac{d}{2}$. Это означаетъ, что искомая точка находится по-срединѣ линіи AB; такъ и должно быть при равенствѣ силы свѣта обоихъ источниковъ.

Второй корень, x'', обращается въ $\frac{d\sqrt{\alpha}}{0}$ или въ ∞. Это значитъ, что вторая равноосвѣщенная точка удалена на безконечно большое разстояніе отъ точекъ A и B, т. е. что такой точки не существуетъ. Выводъ этотъ вполнѣ согласенъ съ предположеніемъ $\alpha = \beta$; въ самомъ дѣлѣ, если α весьма мало разнится отъ β, то знаменатель $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ будетъ весьма малъ, а x'' весьма велико, т. е. вторая равноосвѣщенная точка будетъ находиться на чрезвычайно большомъ разстояніи отъ A и B; чѣмъ меньше будетъ знаменатель, тѣмъ больше будетъ x'', т. е. вторая равноосвѣщ. точка будетъ болѣе и болѣе удаляться; и если положимъ окончательно $\alpha = \beta$, то x'' обратится въ ∞, т. е. искомой точки не будетъ.

4-й случай: $d = 0$, $\alpha \gtrless \beta$.

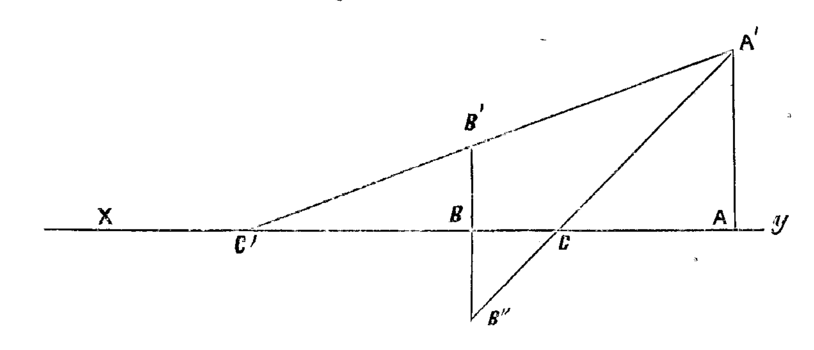
Оба корня обращаются въ 0; это значитъ, что только одна точка равноосвѣщена: *та точка, въ которой находятся оба источника свѣта.*

5-й случай: $d = 0$, $\alpha = \beta$.

Въ этомъ случаѣ: $x' = 0$, $x'' = \frac{0}{0}$. Второе рѣшеніе — *неопредѣленное,* означаетъ, что всякая точка прямой будетъ одинаково освѣщена обоими источниками, что и понятно, такъ какъ оба источника находятся въ одномъ мѣстѣ и равносильны. Первое рѣшеніе, $x' = 0$, даетъ точку, находящуюся въ томъ же мѣстѣ, гдѣ и оба источника.

Примѣчаніе I. Изслѣдованіе этой задачи, по своему характеру, не отличается отъ изслѣдованія вопросовъ первой степени.

Примѣчаніе II. Нетрудно *построить* обѣ равноосвѣщенныя точки. Возставивъ въ точкѣ A перпендикуляръ равный $\sqrt{\alpha}$, а въ точкѣ B два перпендикуляра, одинъ



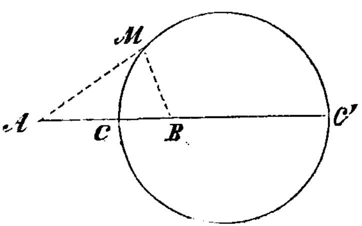
Черт. 35.

кверху, другой книзу отъ линіи xy, равные $\sqrt{\beta}$, проводимъ прямыя A'B' и A'B'', изъ коихъ первая пересѣчетъ линію xy въ точкѣ C', вторая въ C. Это и будутъ искомыя точки, въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{BB''}{BC}, \text{ или } \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{d-x}; \quad \frac{AA'}{AC'} = \frac{BB'}{BC'}, \text{ или } \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{x-d} = -\frac{\sqrt{\beta}}{d-x}.$$

Результаты алгебраическаго изслѣдованія предоставляемъ читателю вывести изъ этого чертежа.

Примѣчаніе III. Если бы требовалось найти геометрическое мѣсто точекъ плоскости, равноосвѣщенныхъ источниками A и B, то, положивъ, что M есть одна изъ точекъ искомаго мѣста, мы нашли бы, что



$$\frac{\alpha}{\overline{AM}^2}=\frac{\beta}{\overline{BM}^2}, \quad \text{или} \quad \frac{AM}{BM}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}.$$

Заключаемъ, что искомое мѣсто есть мѣсто такихъ точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ A и B имѣетъ данную величину. Изъ геометріи извѣстно, что это есть окружность, описанная на прямой CC′ (точки C и C′ опредѣляются построеніемъ, указаннымъ въ примѣчаніи II) какъ на діаметрѣ.

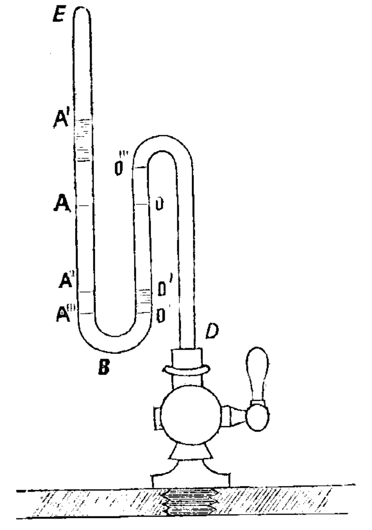
Черт. 36.

Примѣчаніе IV. Если бы требовалось опредѣлить мѣсто точекъ въ пространствѣ, равноосвѣщаемыхъ точками A и B, то достаточно было бы обернуть окружность MCC′ около діаметра CC′: точки полученной шаровой поверхности и были бы требуемыя.

Наконецъ, если бы требовалось найти точки, равноосвѣщенныя источниками A и B, на нѣкоторой линіи или на поверхности, расположенныхъ вблизи точекъ A и B, то очевидно, что искомыя точки были бы общими точками данной линіи или поверхности съ вышеуказанною сферою. Въ случаѣ поверхности, этихъ точекъ было бы безконечное множество, но могла бы быть и одна только искомая точка, еслибъ сфера и поверхность были касательны; могло бы и не быть искомыхъ точекъ, еслибы поверхность и сфера не имѣли общихъ точекъ.

Задача III.

609. *Манометръ со сжатымъ воздухомъ состоитъ изъ дважды согнутой строго цилиндрической трубки* ABOD; *вѣтвь* EB *содержитъ сухой воздухъ; согнутая часть* B — *ртуть, а вѣтвь* OD *находится въ сообщеніи съ паровымъ котломъ паровой машины. Когда уровень ртути стоитъ на одной горизонтальной плоскости* AO, *давленіе воздуха въ манометрѣ равно давленію атмосферы; когда давленіе въ котлѣ увеличивается, ртуть поднимается въ вѣтви* BE *и на столько же опускается въ* BO. *Зная, что* AE $= l$, *что давленіе атмосферы* $=$ H, *вычислить высоту* x *уровня* A′ *надъ* A, *если давленіе въ котлѣ равно* n *атмосферамъ.*



Черт. 37.

Рѣшеніе. Ртуть въ трубкѣ BE перестанетъ подниматься и остановится въ A′, когда упругость воздуха, сжатаго въ этой вѣтви, увеличенная колонною A′A″ ртути, уравновѣситъ давленіе въ котлѣ. Высота $A'A'' = 2AA' = 2x$.

Новое давленіе y воздуха, сжатаго въ A′E, опредѣляется по *закону Маріотта*, именно: если температура не измѣняется, то давленія, производимыя одною и тою же массою газа, обратно пропорціональны объемамъ, ею занимаемымъ. Въ данномъ случаѣ, объемы, послѣдовательно занимаемые воздухомъ въ мано-

метрѣ, суть цилиндры, имѣющіе одинаковое основаніе, а высоты l и $l-x$; сл., назвавъ сѣченіе трубки буквою ω, имѣемъ:

$$\frac{\omega l}{\omega(l-x)}=\frac{y}{H}, \text{ откуда } y=H\times\frac{l}{l-x}.$$

Такъ какъ давленіе въ котлѣ равно nH, то ур. задачи будетъ:

$$nH=2x+H\times\frac{l}{l-x},$$

или, по освобожденіи отъ знаменателя:

$$2x^2-(2l+nH)x+l(n-1)H=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Рѣшивъ его, найдемъ

$$x=\frac{2l+nH\pm\sqrt{(2l+nH)^2-8l(n-1)H}}{4},$$

или

$$x=\frac{2l+nH\pm\sqrt{(nH-2l)^2+8lH}}{4}.$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ подъ знакомъ радикала находится существенно-положительное количество, то оба корня всегда дѣйствительны. Если $n>1$, то произведеніе корней будетъ положительно; а какъ и сумма ихъ положительна, то оба корня будутъ положительны. Но какъ неизвѣстное должно быть еще $<l$, то нужно убѣдиться, имѣетъ-ли ур-ніе корень, меньшій l. Подставляя l вмѣсто x въ первую часть ур-нія (1), найдемъ

$$2l^2-2l^2-nHl+lnH-lH \quad \text{или} \quad -lH,$$

т. е. результатъ отрицательный; это значитъ, что l заключается между корнями ур-нія (1), и сл. меньшій корень $<l$, а большій $>l$. Задачѣ отвѣчаетъ меньшій корень, слѣд.

$$x''=\frac{2l+nH-\sqrt{(nH-2l)^2+8lH}}{4} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

и есть искомый отвѣтъ.

Примѣчаніе I. Если n неограниченно увеличивать, то при $n=\infty$ x'' принимаетъ неопредѣленный видъ $\infty-\infty$; чтобы найти истинное значеніе этой неопредѣленности, нужно числ. и знам. умножить на $2l+nH+\sqrt{(nH-2l)^2+8lH}$; найдемъ

$$x''=\frac{2l(n-1)H}{2l+nH+\sqrt{(nH-2l)^2+8lH}}.$$

При $n=\infty$ это выраженіе принимаетъ неопредѣленную форму вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытія которой дѣлимъ числ. и знам. на n; такимъ образомъ получимъ

$$x''=\frac{2l\left(1-\frac{1}{n}\right)H}{\frac{2l}{n}+H+\sqrt{\left(H-\frac{2l}{n}\right)^2+\frac{8lH}{n^2}}};$$

а положивъ здѣсь $n=\infty$, найдемъ

$$x''=\frac{2lH}{H+H}=\frac{2lH}{2H}=l.$$

Это значитъ, что по мѣрѣ того какъ давленіе увеличивается, уровень A′ ртутной колонны болѣе и болѣе приближается къ вершинѣ E трубки BE.

Примѣчаніе II. Если давленіе въ котлѣ сдѣлается меньше атмосферы, уровень ртути опустился до A''' ниже точки A въ колѣнѣ EB, и поднимается до 0'' въ BO, причемъ AA'''=00''. Равновѣсіе наступитъ тогда, когда давленіе y воздуха въ манометрѣ будетъ равно давленію пара + колонна ртути 0''0''', равная 2AA'''. Если новое неизвѣстное AA''' назовемъ буквою z, y опредѣлится изъ пропорціи

$$\frac{l}{l+z}=\frac{y}{H}, \text{ откуда } y=H\cdot\frac{l}{l+z};$$

новое ур-ніе задачи будетъ

$$nH=H\cdot\frac{l}{l+z}-2z,$$

или

$$2z^2+(2l+nH)z+l(n-1)H=0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

оно отличается отъ (1) только перемѣною x на $-z$; сл, корни (3) равны по величинѣ и противоположны по знаку корнямъ (1). Такъ какъ здѣсь $n<1$, то произведеніе корней отрицательно, сл. одинъ корень ур-нія (3) положителенъ, другой отрицателенъ; новому вопросу отвѣчаетъ положительный корень

$$z'=\frac{-(2l+Hn)+\sqrt{(2l-nH)^2+8lH}}{4}.$$

Сличая z' съ x'', видимъ, что рѣшеніе $x''(2)$ примѣнимо къ обоимъ случаямъ: $n>1$ и $n<1$; достаточно только откладывать отрицательныя значенія, которыя можетъ получать выраженіе (2), внизъ отъ точки A.

Задача IV.

610. *Тяжелое тѣло брошено въ пустотѣ вертикально вверхъ съ начальною скоростью* V_0; *опредѣлить, въ какое время оно достигнетъ высоты* h *надъ начальною точкою?*

Въ равномѣрно-замедлительномъ движеніи, какое имѣетъ тяжелое тѣло, поднимающееся вверхъ, пройденное пространство l связано съ временемъ t, употребленнымъ на его прохожденіе, формулою

$$l=V_0t-\frac{1}{2}gt^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Слѣдовательно, если искомое время назовемъ буквою x, то это неизвѣстное должно удовлетворять ур-нію

$$h=V_0x-\frac{1}{2}gx^2,$$

или

$$gx^2-2V_0x+2h=0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Изслѣдованіе. Чтобы x, выведенное изъ этого ур-нія, давало отвѣтъ на вопросъ, нужно, чтобы рѣшеніе было дѣйствительно и положительно. Условіе дѣйствительности корней ур-нія (2) таково:

$$V_0^2-2gh \geqq 0, \quad \text{или} \quad h \leqq \frac{V_0^2}{2g}.$$

Итакъ, различаемъ три случая:

Первый случай: $h>\frac{V_0^2}{2g}$.

Корни ур-нія (2) мнимы, слѣд. задача невозможна. Это очевидно à priori. Въ самомъ дѣлѣ, тѣло остановится, когда его уменьшающаяся скорость обратится въ ноль

Но скорость въ концѣ времени t опредѣляется формулою: $V = V_0 - gt$; слѣд. она обратится въ ноль, когда время $t = \frac{V_0}{g}$; пройденное до этого момента пространство будетъ $l = V_0 \cdot \frac{V_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 = \frac{V_0^2}{2g}$. Это есть maximum высоты, до которой можетъ подняться тѣло при начальной скорости V_0.

Второй случай: $h = \frac{V_0^2}{2g}$.

Корни ур-нія (2) въ этомъ случаѣ — дѣйствительные равные, а общая величина ихъ есть $\frac{V_0}{g}$, что согласно съ вышеуказаннымъ результатомъ.

Третій случай: $h < \frac{V_0^2}{2g}$.

Въ этомъ случаѣ ур-ніе (2) имѣетъ корни дѣйствительные, неравные и оба положительные (послѣднее потому, что ихъ произведеніе $\frac{2h}{g}$ и сумма $\frac{2V_0}{g}$ — положительны).

Чтобы дать себѣ отчетъ въ происхожденіи этихъ *двухъ* положительныхъ корней, замѣтимъ, что тѣло при движеніи бываетъ дважды въ точкѣ M, отстоящій по вертикалу на h отъ A: одинъ разъ летя вверхъ, другой разъ, падая внизъ. Оба положительные корня и даютъ эти времена. Въ самомъ дѣлѣ, эти корни суть.

$$x' = \frac{V_0}{g} - \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}; \quad x'' = \frac{V_0}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Припомнимъ, что сколько времени тѣло употребляетъ на поднятіе отъ M до B, столько же и на паденіе отъ B до M. Пусть это время $= \Theta$; сл., взявъ случай паденія, имѣемъ: $BM = \frac{1}{2} g\Theta^2$ или $\frac{V_0^2}{2g} - h = \frac{1}{2} g\Theta^2$, откуда

$$\Theta = \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Затѣмъ, зная, что $\frac{V_0}{g}$ есть время кульминаціи, находимъ, что меньшій корень, x', представляетъ разность между временемъ кульминаціи и временемъ, необходимымъ тѣлу на прохожденіе вверхъ разстоянія BM, слѣд.—*время до кульминаціи*, въ которое тѣло находится отъ точки A на высотѣ h; большій корень, x'', представляетъ сумму временъ, необходимыхъ тѣлу на поднятіе вверхъ до высшей точки B и затѣмъ на паденіе внизъ до M, слѣд. — *время послѣ кульминаціи*, въ которое тѣло находится отъ A на высотѣ h.

Черт. 38.

Задача V.

611. *Отъ момента, въ который наблюдатель, стоящій у отверстія колодца, выпустилъ изъ рукъ камень, до момента, въ который услышанъ былъ ударъ камня о воду, прошло t секундъ. Найти глубину колодца, зная:* 1) *что звукъ распространяется равномѣрно со скоростью v;* 2) *что связь между пространствомъ l, прой-*

деннымъ при свободномъ паденіи, и временемъ Θ *паденія выражается формулою* $l = \frac{1}{2} g\Theta^2$, *гдѣ* g*—ускореніе тяжести.*

Рѣшеніе. Пусть искомая глубина колодца будетъ x; данное время t составляется изъ двухъ частей:

1) Изъ времени y, которое камень употребляетъ на прохожденіе свободнымъ паденіемъ глубины x колодца, причемъ связь между x и y выражается формулою $x = \frac{1}{2} gy^2$, изъ которой

$$y = \sqrt{\frac{2x}{g}};$$

2) изъ времени z, въ которое звукъ проходитъ разстояніе x равномѣрнымъ движеніемъ со скоростью v, причемъ по закону равномѣрнаго движенія $x = zv$, откуда

$$z = \frac{x}{v}.$$

Приравнивая $z + y$ данному времени t, имѣемъ ур-ніе

$$\frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Это уравненіе — ирраціональное; для рѣшенія его, изолируемъ радикалъ:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадратъ, что даетъ послѣдовательно:

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2}, \quad \text{или} \quad gx^2 - 2v(v + gt)x + gv^2t^2 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Изслѣдованіе. Ур-ніе (3) не тождественно (2), ибо оно есть тоже, что ур-ніе

$$\frac{2x}{g} = \left(t - \frac{x}{v}\right)^2,$$

но послѣднее есть результатъ возвышенія въ квадратъ какъ даннаго ур-нія

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v},$$

такъ и ур-нія

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}.$$

Чтобы корень ур-нія (3) удовлетворялъ данному ур-нію, нужно, чтобы онъ обращалъ разность $t - \frac{x}{v}$ въ количество положительно, т. е. удовлетворялъ бы неравенству

$$t - \frac{x}{v} > 0, \quad \text{или} \quad x < vt.$$

Итакъ, чтобы корень ур-нія (3) представлялъ отвѣтъ на данную задачу, нужно, чтобы онъ былъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и меньше vt.

Чтобы корни ур-нія (3) были дѣйствительны, необходимо и достаточно, чтобы было

$$v^2(v + gt)^2 - g^2v^2t^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad v^2(v^2 + 2gvt) \geqslant 0.$$

Но каждое изъ количествъ g, v и t положительно, слѣд. условіе дѣйствительности всегда удовлетворено.

Затѣмъ, оба корня положительны, потому что произведеніе ихъ v^2t^2 и сумма $\frac{2v(v+gt)}{g}$ — положительны. Остается убѣдиться, будетъ-ли хотя одинъ изъ корней $< vt$. Для этого въ триномъ, составляющій первую часть ур-нія (3), подставляемъ vt вмѣсто x; получимъ: $gv^2t^2 - 2v(v+gt)vt + gv^2t^2$, или $-2v^3t$, результатъ отрицательный, т. е. противуположнаго знака коэффиціенту g при x^2 въ триномѣ (3). Это значитъ, что vt содержатся между корнями ур-нія (3), и слѣд. меньшій корень $< vt$, и только онъ одинъ даетъ отвѣтъ на задачу. Итакъ

$$x = \frac{v}{g}\left(v + gt - \sqrt{v^2 + 2gvt}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Задача VI.

612. *Построить прямоугольный треугольникъ, зная его периметръ $2p$ и площадь m^2.*

Рѣшеніе. Обозначимъ искомые катеты буквами x и y, а гипотенузу z; найдемъ уравненія

$$x + y + z = 2p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$xy = 2m^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Изъ (1) имѣемъ $x + y = 2p - z$; возвысивъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ и замѣнивъ $x^2 + y^2$ равнымъ этой суммѣ количествомъ z^2 (изъ (2)), получаемъ: $z^2 + 2xy = (2p - z)^2$; или, замѣчая, что по (3): $2xy = 4m^2$, находимъ, раскрывъ $(2p - z)^2$:

$$z^2 + 4m^2 = 4p^2 - 4pz + z^2,$$

откуда

$$z = \frac{p^2 - m^2}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Подставляя вмѣсто z это значеніе въ ур. (1), имѣемъ:

$$x + y = \frac{p^2 + m^2}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Изъ ур-ній (3) и (5) видно, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$pu^2 - (p^2 + m^2)u + 2pm^2 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

откуда:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{p^2 + m^2 \mp \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Изслѣдованіе. Для дѣйствительности x и y необходимо, чтобы было

$$(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2 \gtrless 0, \quad \text{или} \quad (p^2 + m^2)^2 - (2\sqrt{2} \,.\, pm)^2 \gtrless 0, \quad \text{или}$$

$$(p^2 + m^2 + 2\sqrt{2} \,.\, pm)(p^2 + m^2 - 2\sqrt{2} \,.\, pm) \gtrless 0,$$

т. е. оба множителя 1-й части должны имѣть одинаковый знакъ: но какъ первый множитель положителенъ, то и второй д. б. > 0; такимъ образомъ, располагая по степенямъ m, имѣемъ неравенство

$$m^2 - 2\sqrt{2} \,.\, p \,.\, m + p^2 \gtrless 0.$$

Опредѣляя корни тринома 1-й части, найдемъ: $m' = p(\sqrt{2}-1)$ и $m'' = p(\sqrt{2}+1)$; и какъ триномъ долженъ имѣть знакъ перваго члена, то m должно лежать внѣ корней; итакъ должно быть:

$$m \leqslant p(\sqrt{2}-1) \ldots\ldots (8), \quad \text{или} \quad m \geqslant p(\sqrt{2}+1) \ldots\ldots (9)$$

Когда то или другое изъ этихъ неравенствъ удовлетворено, величины x и y будутъ дѣйствительны. Но они должны быть и положительны; это такъ и есть, ибо какъ видно изъ ур. (6), ихъ произведеніе $2m^2$ и сумма $\frac{p^2+m^2}{p}$ — положительны. Что касается z, то изъ формулы (4) видно, что эта величина всегда дѣйствительна; но нужно, чтобы она была и положительна, а для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$m < p \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Другихъ условій не существуетъ; въ самомъ дѣлѣ, положительныя величины x, y, z удовлетворяютъ даннымъ ур-мъ, но ур. (2) показываетъ, что большее изъ этихъ количествъ z, меньше суммы двухъ другихъ (въ самомъ дѣлѣ, z^2, будучи $= x^2+y^2$, меньше x^2+y^2+2xy, или $(x+y)^2$, откуда $z<x+y$), а слѣд. можно построить треугольникъ изъ трехъ линій, мѣрами которыхъ служатъ числа x, y и z.

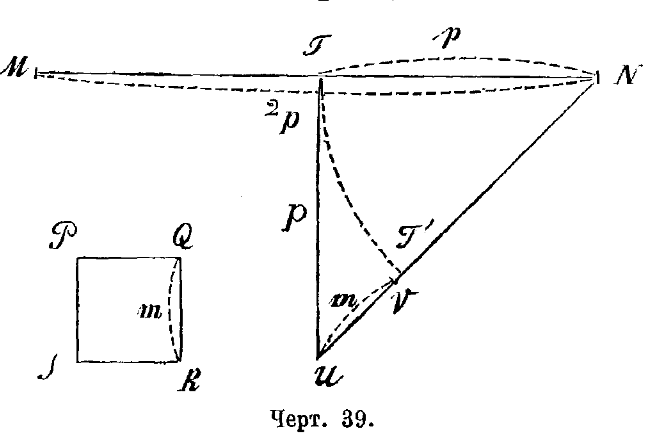
Зная это, замѣчаемъ, что неравенство (9), будучи не необходимымъ, противорѣчитъ необходимому неравенству (10), и потому должно быть отброшено. Тогда останутся два неравенства одного смысла (8) и (10); но какъ второе изъ нихъ заключается въ первомъ, то и заключаемъ, что единственнымъ условіемъ возможности задачи является:

$$m \leqslant p(\sqrt{2}-1).$$

Это неравенство показываетъ, что *наибольшая величина* или *maximum* m есть $p(\sqrt{2}-1)$; такъ какъ это есть одинъ изъ корней подрадикальнаго тринома, то послѣдній при $m = p(\sqrt{2}-1)$ обратится въ ноль, x и y сдѣлаются равными, а треугольникъ равнобедреннымъ, такъ что находимъ теорему: *Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь* (ибо при наиб. значеніи m, и m^2 имѣетъ наиб. значеніе).

Примѣчаніе. Еслибъ мы рѣшили неравенства относительно p, то легко нашли бы подобнымъ же образомъ, что: *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треуг-въ, имѣющихъ одинаковую площадь, равнобедренный имѣетъ наименьшій периметръ.*

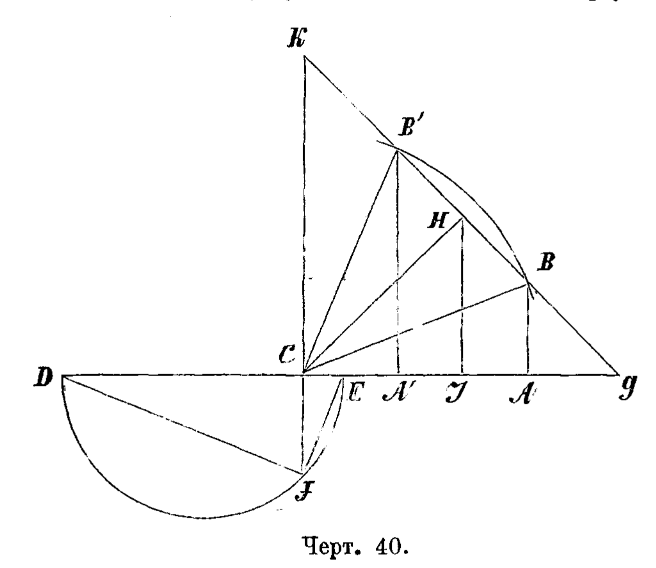
Построеніе. — Пусть данный периметръ $2p$ равенъ линіи MN, а данный квадратъ стороны m равенъ PQRS. Раздѣливъ линію MN пополамъ, возставимъ въ точкѣ T перпендикуляръ $TU = TN = p$, и соединимъ U съ N; изъ прямоугольнаго Δ NTU имѣемъ: $NU = p\sqrt{2}$. Описавъ изъ точки N дугу радіусомъ $= p$, получимъ: $UT' = p(\sqrt{2}-1)$. Изслѣдованіе намъ показало, что для возможности задачи сторона



Черт. 39.

m квадрата m^2 не должна превышать линіи UT′: беремъ для заданнаго квадрата сторону, равную UV < UT′.

Строимъ z по формулѣ (4). Для этого, взявъ прямую $DG = 2p$, на половинѣ ея DE описываемъ полукругъ, наносимъ въ немъ хорду $EF = m$, опускаемъ перпендикуляръ FC на DE, и соединяемъ точки D и F. Изъ прямоугольнаго треугольника DEF имѣемъ: $DF^2 = DE^2 - EF^2 = p^2 - m^2$; съ другой стороны: $DF^2 = DE \times DC = p \times DC$; слѣдоват. $p \times DC = p^2 - m^2$, откуда



Черт. 40.

$$DC = \frac{p^2 - m^2}{p} = z.$$

Замѣчая, что

$$CG = DG - DC = 2p - z,$$

изъ ур-нія (1) видимъ, что

$$CG = x + y.$$

Допустивъ, что CAB есть требуемый треугольникъ, имѣемъ:

$CA + AB = x + y = CG = CA + AG$, откуда $AB = AG$: слѣд. уголъ G треуг-ка ABG равенъ 45°; приэтомъ $CB = CD = z$.

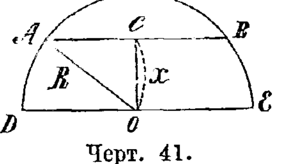
Поэтому въ треугольникѣ BCG извѣстны стороны CB и CG и уголъ G; такъ что дальше продолжаемъ построеніе такъ: продолжаемъ FC и беремъ $CK = CG$, соединяемъ точки K и G и опускаемъ перпендикуляръ CH на KG, который раздѣлитъ прямую KG въ точкѣ H пополамъ. Не трудно удостовѣриться, что въ разсматриваемомъ случаѣ $CD > CH$; поэтому, описавъ изъ C, какъ изъ центра, дугу радіусомъ CD, найдемъ, что она пересѣчетъ линію KG въ двухъ точкахъ B и B′. Опустивъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры BA и B′A′ на CG, найдемъ два требуемые треугольника ABC и A′B′C; легко видѣть, что они равны. Въ самомъ дѣлѣ, CG, равно и AA′ въ точкѣ I дѣлятся пополамъ; поэтому

$$AG = AB = A'C; \text{ а также } CB = CB'.$$

При условіи $m = p(\sqrt{2} - 1)$ легко видѣть, что будетъ $CD = CH$, и задача имѣетъ одно рѣшеніе: равнобедренный треугольникъ CHI. Наконецъ, при $m > p(\sqrt{2} - 1)$ будетъ $CD < CH$, и задача невозможна.

Задача VII.

613. *Въ данный полукругъ вписать хорду такъ, чтобы сумма ея длины съ разстояніемъ отъ центра равнялась данной линіи* m.



Черт. 41.

Рѣшеніе. Пусть будетъ AB требуемая хорда, OC ея разстояніе отъ центра. По условію задачи:

$$AB + OC = m.$$

Примемъ за неизвѣстное $OC = x$; соединивъ A съ O, изъ треугольника ACO получимъ: $AC = \sqrt{R^2 - x^2}$, откуда уравненіе задачи:

$$2\sqrt{R^2 - x^2} + x = m.$$

Это ур-ніе ирраціональное; для рѣшенія его, изолируемъ корень въ первой части:

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадратъ; приведя члены въ порядокъ, найдемъ ур-ніе:

$$5x^2 - 2mx + m^2 - 4R^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изслѣдованіе. Это ур-ніе не тождественно съ (1), ибо оно получилось-бы и изъ ур-нія: $-2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x$ . . . . . (1′), такъ что ур. (2), удовлетворяется корнями двухъ уравненій: (1) и (1′). Поэтому, корни ур-нія (2) только тогда будутъ удовлетворять ур-нію (1), когда они дѣлаютъ разность $m - x$ положительною, т. е. когда $x < m$. Затѣмъ, необходимо, чтобы x было дѣйствительно, положительно и не больше R; при несоблюденіи послѣдняго условія точка C будетъ лежать внѣ окружности и потому не дастъ хорды.

Итакъ, чтобы алгебраическій корень x ур-нія (2) удовлетворялъ предложенной геометрической задачѣ, нужно, чтобы было: x—дѣйствительно, $x > 0$, $x < m$, $x < R$.

Но если x удовлетворяетъ первымъ тремъ условіямъ, то оно удовлетворяетъ и ур-нію (1), а слѣд. $\sqrt{R^2 - x^2}$, равняясь дѣйствительному количеству $m - x$, также будетъ дѣйствителенъ, а слѣдоват. будетъ и $x < R$. Такимъ образомъ, предыдущія условія сводятся къ слѣдующимъ тремъ:

$$x \text{ дѣйств.}, \qquad x > 0, \qquad x < m.$$

Условіе дѣйствительности корней ур-нія (2) выражается неравенствомъ: $m^2 - 5(m \;\; - 4R^2) \gtreqless 0$, или, по упрощеніи, $m^2 - 5R^2 \leqq 0$,

или
$$(m + R\sqrt{5})(m - R\sqrt{5}) \leqq 0.$$

Но первой множитель > 0, слѣд. должно быть $m - R\sqrt{5} \leqq 0$, или

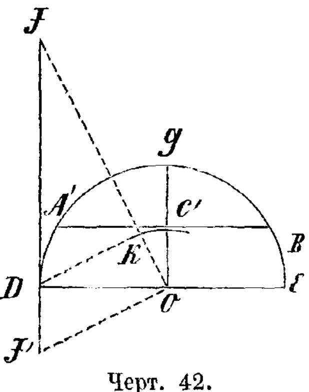
$$m \leqq R\sqrt{5}.$$

Отсюда три случая:

Первый случай. $m > R\sqrt{5}$. Ур-ніе (2) будетъ имѣть корни мнимые: задача невозможна.

Второй случай. $m = R\sqrt{5}$. Ур-ніе (2) имѣетъ корни дѣйствительные равные: ихъ общая величина равна $\frac{m}{5}$, или

$$x' = x'' = \frac{R\sqrt{5}}{5}.$$



Черт. 42.

Это — величина дѣйствит., положительная и меньшая $m = R\sqrt{5}$, слѣд. представляетъ рѣшеніе данной задачи; ей соотвѣтствуетъ особое положеніе точки C. Проведя въ точкѣ D касательную DF=2R, соединяемъ точки F и O: прямая FO будетъ $= R\sqrt{5}$; отрѣзавъ отъ нея пятую часть, OK, отложимъ ее на радіусѣ OG: найдемъ точку C_1 и хорда A_1B_1, будетъ требуемая.

Замѣтимъ, что величина $R\sqrt{5}$ есть *maximum данной суммы* m, ибо задача невозможна, когда m больше этой величины, но m

можетъ достичь этой величины, когда точка C находится въ C_1. Итакъ сумма $AB+OC$ достигаетъ maximum'а $=R\sqrt{5}$ когда $x=\frac{R\sqrt{5}}{5}$.

Третій случай. $m<R\sqrt{5}$. Въ этомъ случаѣ корни ур-нія (2) дѣйствительные и неравные; разсмотримъ ихъ знаки. Произведеніе корней $\frac{m^2-4R^2}{5}$ положительно, равно нулю, или отрицательно, смотря по тому, будетъ-ли $m >, =$, или $<2R$, что не несовмѣстно съ условіемъ: $m<R\sqrt{5}$. Итакъ, этотъ случай подраздѣляется на три другихъ:

$$m<R\sqrt{5}\begin{cases} m>2R \\ m=2R \\ m<2R. \end{cases}$$

I. $2R<m<R\sqrt{5}$. Корни ур-нія (2) дѣйствительные, неравные, и оба положительны, потому что произведеніе и сумма ихъ >0. Нужно знать, какъ они расположены относительно m; а для этого подставляемъ m вмѣсто x въ триномъ (2); находимъ:

$$5m^2-2m^2+m^2-4R^2 \quad \text{или} \quad 4m^2-4R^2, \quad \text{или} \quad 4(m^2-R^2).$$

Такъ какъ $m>2R$, то этотъ результатъ всегда положителенъ, т. е. одного знака съ членомъ $5x^2$, слѣд. m лежитъ внѣ корней; и какъ полусумма корней, равная $\frac{m}{10}$, меньше m, то заключаемъ, что оба корня меньше m, слѣд. задача имѣетъ 2 рѣшенія, выражаемыя формулою

$$x=\frac{m}{5}\pm\frac{2}{5}\sqrt{5R^2-m^2}.$$

II. $m=2R$. Произведеніе корней равно нулю, слѣд., одинъ корень $=0$, другой удовлетворяетъ уравненію

$$5x-4R=0, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{4}{5}R,$$

и задача опять имѣетъ 2 рѣшенія, изъ которыхъ первое даетъ хорду, сливающуюся съ діаметромъ.

III. $m<2R$. Корни ур-нія (2) дѣйствительные, неравные и противоположны по знаку, ибо ихъ произведеніе отрицательно. Чтобы положительный корень давалъ отвѣтъ на задачу, надо чтобы онъ былъ $<m$. Результатъ подстановки m вмѣсто x въ первую часть ур-нія (2) $=4(m^2-R^2)$; отсюда заключаемъ:

1) Если m, будучи $<2R$, въ тоже время $>R$, то результатъ этотъ положителенъ, слѣд., m лежитъ внѣ корней, и какъ m положительно, то оно больше положительнаго корня, который, слѣд., даетъ отвѣтъ на задачу: задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

2) Когда $m=R$, результатъ подстановки R вмѣсто x обращается въ 0, а это значитъ, что R есть корень даннаго ур-нія: задача имѣетъ одно рѣшеніе: $x=R$ — хорда обращается въ ноль.

3) Когда $m<R$, результатъ $4(m^2-R^2)$ — отрицателенъ, слѣд. m заключается между корнями, и потому положительный корень больше m: задача невозможна, что очевидно, ибо уже $AC+OC$, по свойству сторонъ треугольника, больше R, а $AB+OC$ и подавно.

Резюме изслѣдованія.

$m > R\sqrt{5}$ . . . . . . x' и x'' мнимы : 0 рѣшеній.

$m = R\sqrt{5}$ . . . . . . $x' = x'' = \dfrac{R\sqrt{5}}{5}$ даетъ

maximum для m : 1 рѣшеніе (2 равныхъ рѣшенія.)

$m < R\sqrt{5}$ $\begin{cases} m > 2R \ \ldots\ 0 < x' < m;\ 0 < x'' < m & : 2 \text{ рѣшенія.} \\ m = 2R \ \ldots\ x' = 0;\ x'' = \frac{4}{5}R & : 2 \text{ рѣшенія.} \\ m < 2R \begin{cases} m > R \ \ldots & : 1 \text{ рѣшеніе.} \\ m = R \ \ldots\ x' = R \ \ldots & : 1 \text{ рѣшеніе.} \\ m < R \ \ldots & : 0 \text{ рѣшеній.} \end{cases} \end{cases}$

Заключаемъ, что когда m измѣняется отъ своего maximum'a $= R\sqrt{5}$ до $2R$, задача имѣетъ два рѣшенія; при m меньшихъ $2R$, но не меньшихъ R, она имѣетъ 1 рѣшеніе; при $m < R$, она невозможна.

Построеніе. Проведя касательную $EF = R$, и соединивъ точки D и F, получимъ линію $DF = R\sqrt{5}$. Затѣмъ на касательной DL откладываемъ отрѣзокъ $DG = m$, взявъ его $> 2R$, но $< R\sqrt{5}$, и проводимъ прямую GH параллельно DE. Описавъ изъ точки D дугу радіусомъ DF до пересѣченія съ прямою GH въ точкѣ H, найдемъ:

$$GH = \sqrt{5R^2 - m^2};$$

затѣмъ беремъ линію $GK = 2GH$:

$$GK = 2\sqrt{5R^2 - m^2},$$

и изъ точки G радіусомъ GK описываемъ полуокружность, которая пересѣчетъ прямую DL въ точкахъ I и L; очевидно:

$$DI = m - 2\sqrt{5R^2 - m^2},$$

$$DL = m + 2\sqrt{5R^2 - m^2}.$$

Черт. 43.

Остается отъ каждой изъ этихъ прямыхъ отрѣзать пятую часть. Беремъ $DT = ES = \dfrac{R}{2}$, проводимъ SI и SL, и изъ точки T прямыя: TP параллельно SL

и TP′ параллельно SI; остается изъ точекъ P и P′ провести параллели діаметру DE, которыя и дадутъ требуемыя хорды AB и A′B′.

Задача VIII.

614. *Зная высоту h усѣченнаго конуса, его объемъ V и радіусъ R одного изъ основаній, вычислить радіусъ x другаго основанія.*

Рѣшеніе. Объемъ конуса, усѣченнаго параллельно основанію, дается формулою: $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rx+x^2)$, и если данный объемъ V мы представимъ въ видѣ конуса той же высоты h, какъ и искомый, съ радіусомъ a основанія, т. е. положимъ $V=\frac{1}{3}\pi h a^2$, то прямо получимъ ур-ніе

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rx+x^2)=\frac{1}{3}\pi h\,.\,a^2,$$

или

$$x^2+Rx+R^2-a^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

откуда

$$x=\frac{-R\pm\sqrt{4a^2-3R^2}}{2}.$$

Изслѣдованіе. Если предположить, что искомый усѣченный конусъ состоитъ изъ двухъ конусовъ, сложенныхъ вершинами, т. е. представляетъ усѣченный конусъ 2-го рода, то нашли бы ур-ніе

$$x^2-Rx+R^2-a^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

отличающееся отъ перваго только перемѣною x на $-x$: слѣд. отрицательные корни ур-нія (1) служатъ положительными корнями (2), и потому даютъ рѣшенія 2-го рода.

Зная это, обратимся къ изслѣдованію ур-нія (1). Условіе дѣйствительности его корней выражается неравенствомъ:

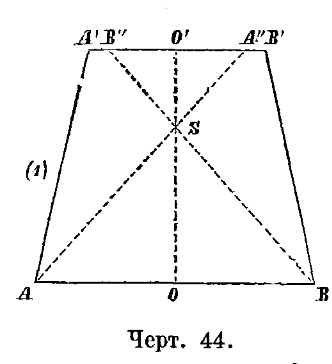
$$a^2 \gtrless \frac{3}{4}R^2.$$

Отсюда три случая: $a^2<\frac{3}{4}R^2$, $a^2=\frac{3}{4}R^2$, $a^2>\frac{3}{4}R^2$.

Первый случай: $a^2<\frac{3}{4}R^2$ Корни ур-нія (1) мнимы, и задача невозможна.

Второй случай: $a^2=\frac{3}{4}R^2$, т. е. при наименьшей величинѣ a^2:

$$x=-\frac{R}{2},$$



Черт. 44.

что даетъ усѣченный конусъ 2-го рода, у котораго радіусъ верхняго основанія вдвое меньше радіуса нижняго основанія. Это значитъ, что изъ всѣхъ усѣченныхъ конусовъ 1-го или 2-го рода, которые можно построить на данномъ основаніи и съ данною высотою, наименьшій объемъ принадлежитъ конусу 2-го рода ABSB″A″, котораго вершина находится на $\frac{2}{3}$ высоты отъ нижняго основанія.

Третій случай: $a^2>\frac{3}{4}R^2$. Уравненіе (1) имѣетъ корни дѣйствительные неравные; ихъ знакъ зависитъ отъ послѣдняго члена R^2-a^2; поэтому слѣдуетъ различать

три случая, смотря по тому, будетъ-ли $a^2 <, =,$ или $> R^2$, имѣя въ виду, что когда $a^2 < R^2$, оно должно быть въ тоже время $> \frac{3}{4} R^2$.

1. $\frac{3}{4} R^2 < a^2 < R^2$. Произведеніе корней ур-нія (1) положительно, а сумма ихъ отрицательна ($= -R$), слѣд. оба корня отрицательны и даютъ два рѣшенія 2-го рода (2) и (2′), которыхъ вершины расположены по обѣ стороны точки S (1).

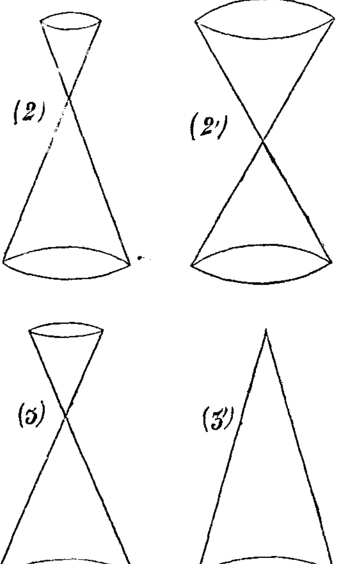
2. $a^2 = R^2$. Ур-ніе (1) имѣетъ корни:

$$x = 0, \quad x = -R.$$

Второй корень даетъ усѣченный конусъ 2-го рода (3), имѣющій вершину въ срединѣ высоты; первое рѣшеніе даетъ полный конусъ (3′), который по произволу можно разсматривать или какъ усѣченный 1-й рода, или какъ усѣч. кон. 2-го рода.

3. $a^2 > R^2$. Произведеніе корней ур-нія (1) отрицательно; слѣд. одинъ корень положителенъ, а другой отрицателенъ: первый даетъ усѣч. конусъ 1-го рода, второй — 2-го рода, какъ на черт. (1).

Если теперь помножить обѣ части предыдущихъ равенствъ и неравенствъ на $\frac{1}{3}\pi h$, чтобы ввести данный объемъ V, то все изслѣдованіе можно резюмировать такъ:



Черт. 45.

Резюме изслѣдованія.

$V < \frac{1}{4}\pi R^2 h$ . . . . x' и x'' мнимы : 0 рѣшеній.

$V = \frac{1}{4}\pi R^2 h$ . . . . $x' = x'' = -\frac{R}{2}$ даетъ : 1 рѣш. 2-го рода.

minimum для V.

$V > \frac{1}{4}\pi R^2 h$:

- $V < \frac{1}{3}\pi R^2 h$. . : $x' < 0$, $x'' < 0$: 2 рѣшенія 2-го рода.
- $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. . : $x' = -R$, $x'' = 0$: 2 рѣшенія 2-го рода.
- $V > \frac{1}{3}\pi R^2 h$. . : $x' < 0$, $x'' > 0$: 1 рѣш. 1-го и 1 рѣш. 2-го рода.

615. Изслѣдованіе измѣненія объема V. Для объема V мы нашли формулу: $V = \frac{1}{3}\pi h(x^2 + Rx + R^2)$, которую можно написать въ видѣ

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left[\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} R^2\right].$$

Это есть квадратный триномъ относительно x; изученіе его измѣненій при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ приведетъ насъ къ вышенайденнымъ результатамъ, но кратчайшимъ путемъ.

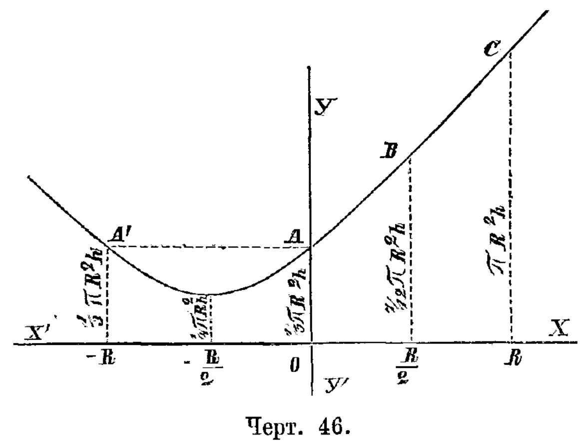
Даемъ x-су сначала значенія отъ 0 до $+\infty$, и вычисляемъ соотвѣтствующія значенія выраженія въ квадратныхъ скобкахъ; помноживъ каждое изъ этихъ значеній на $\frac{1}{3}\pi h$, найдемъ измѣненія объема V. Тоже самое дѣлаемъ, измѣняя x отъ 0 до $-\infty$. Такимъ образомъ получаемъ двѣ таблицы измѣненій V: для положительныхъ и для отрицательныхъ значеній x.

x	$0 < \ldots$	$< \frac{R}{2} \ldots$	$< R \ldots$	$< +\infty$
$\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}$	$R^2 \ldots$	$< \frac{7}{4} R^2 \ldots$	$< 3R^2 \ldots$	$< +\infty$
V	$\frac{1}{3}\pi R^2 h \ldots$	$< \frac{7}{12}\pi R^2 h \ldots$	$< \pi R^2 h \ldots$	$< +\infty$

x	$0 \ldots$	$> -\frac{R}{2} \ldots$	$> -R \ldots$	$> -\infty$
$\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}$	$R^2 \ldots$	$> \frac{3}{4} R^2 < \ldots$	$R^2 \ldots$	$< +\infty$
V	$\frac{1}{3}\pi R^2 h \ldots$	$> \frac{1}{4}\pi R^2 h < \ldots$	$\frac{1}{3}\pi R^2 h \ldots$	$< +\infty$

Итакъ конусъ перваго рода неограниченно возрастаетъ отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до безконечности; конусъ втораго рода сперва уменьшается отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до $\frac{1}{4}\pi R^2 h$, потомъ увеличивается до $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, проходя два раза черезъ всѣ величины между $\frac{1}{4}\pi R^2 h$ и $\frac{1}{3}\pi R^2 h$; а затѣмъ продолжаетъ увеличиваться проходя разъ черезъ каждое значеніе отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до $+\infty$.

Представимъ эти измѣненія объема кривою. Для этого наносимъ положительныя значенія x по оси x вправо отъ начала 0, отрицательныя— влѣво отъ 0. Въ конечной точкѣ каждаго значенія x проводимъ перпендикуляръ къ оси $x'x$, и откладываемъ на немъ величину функціи V. Соединивъ вершины ординатъ, получимъ параболу, изображающую наглядно измѣненія V. Эта кривая показываетъ:



Черт. 46.

1) Чтобы найти значеніе V, соотвѣтствующее данному значенію x, нужно нанести x на ось $x'x$ вправо или влѣво отъ точки 0, смотря по знаку x-са, и провести ординату кривой, соотвѣтствующую взятому значенію x.

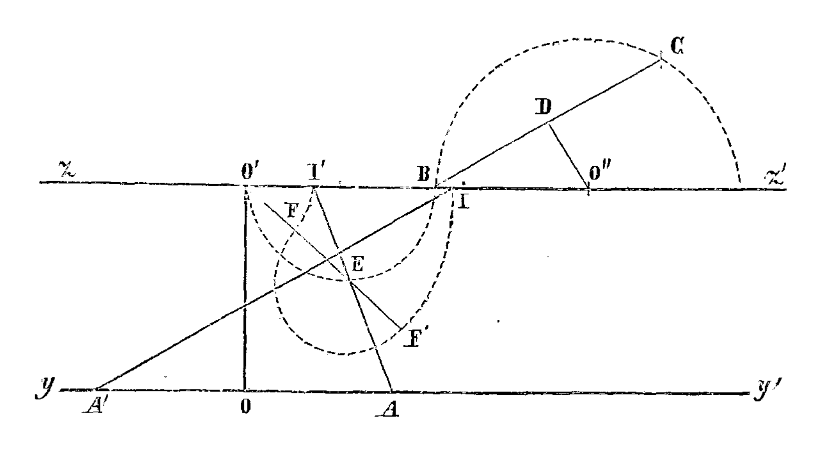
2) Чтобы найти значеніе x, соотвѣтствующее данной величинѣ V, нужно пересѣчь кривую параллелью оси $x'x$, взятою на разстояніи отъ $x'x$, равномъ значенію V, и построить абсциссы точекъ пересѣченія этой параллели съ кривою.

Такимъ образомъ легко видѣть, что задача не имѣетъ рѣшенія, когда V меньше $\frac{1}{4}\pi R^2 h$, ибо кривая не имѣетъ точекъ, которыхъ ординаты были бы меньше $\frac{1}{4}\pi R^2 h$; что наименьшее значеніе V есть $\frac{1}{4}\pi R^2 h$, и что оно соотвѣтствуетъ $x = -\frac{R}{2}$; что V принимаетъ два раза каждое значеніе между $\frac{1}{4}\pi R^2 h$ и $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ при двухъ различныхъ отрицательныхъ значеніяхъ x, одномъ, содержащемся между 0 и $-\frac{R}{2}$, другомъ — между $-\frac{R}{2}$ и $-R$; это — усѣченные конусы 2-го рода; что наконецъ, при x-хъ большихъ нуля и меньшихъ $-R$ задача принимаетъ по одному рѣшенію — въ первомъ случаѣ 1-го рода, во второмъ 2-го рода.

Построеніе. Возьмемъ случай: $a > R$, когда задача имѣетъ два рѣшенія — усѣченные конусы 1-го и 2-го рода. Верхнія основанія ихъ имѣютъ радіусы, выражаемые формулами:

$$x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Взявъ линію $OO' = h$, проведемъ къ ней въ точкахъ O и O′ перпендикуляры yy и zz'; на первомъ отъ точки O отложимъ $OA = OA' = R$, на второмъ отъ точки O′ ли-



Черт. 47.

нію $O'B = a$, а на продолженіи ея линію $BO'' = R$. Изъ точки O″ радіусомъ O″B описываемъ полукругъ, въ которомъ вписываемъ сторону правильнаго треугольника BC, и дѣлимъ ее въ точкѣ D пополамъ; линія $BD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Описавъ на a полуокружность, наносимъ въ нее хорду $BE = BD$ и соединяемъ точку E съ O′: очевидно, $O'E = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}$. Затѣмъ, описавъ изъ точки E радіусомъ $EF = EF' = \frac{R}{2}$ полукругъ, получимъ окончательно:

$$O'F = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = x''; \quad O'F' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{R}{2} = -x'.$$

Нанеся линіи O′F и O′F′ на линію O′O″, получимъ: $O'I = x''$, $O'I' = -x'$. Остается соединить I съ A, а I′ съ A′ и повернуть чертежъ около оси OO′: вращеніе дастъ искомые конусы.

Задача IX.

616. *Построить треугольникъ, зная его сторону a, соотвѣтствующую ей высоту h и радіусъ R описаннаго круга.*

Рѣшеніе. Пусть неизвѣстныя стороны будутъ x и y. По извѣстнымъ теоремамъ геометріи имѣемъ:

$$xy = 2Rh;\ \frac{ah}{2} = \sqrt{\frac{(x+y+a)}{2} \cdot \frac{(x+y-a)}{2} \cdot \frac{(a+x-y)}{2} \cdot \frac{[a-(x-y)]}{2}}.$$

Возвышая обѣ части 2-го ур. въ квадратъ, найдемъ:

$$4a^2h^2 = [(x+y)^2 - a^2][a^2 - (x-y)^2].$$

Примемъ за вспомогательное неизвѣстное сумму $x + y = s$; x и y будутъ корнями уравненія

$$X^2 - sX + 2Rh = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Для опредѣленія s имѣемъ соотношеніе

$$4a^2h^2 = (s^2 - a^2)[a^2 - (s^2 - 8Rh)],$$

или

$$s^4 - 2(a^2 + 4Rh)s^2 + a^4 + 4a^2h^2 + 8a^2Rh = 0 \quad \dots\dots \quad (2)$$

Рѣшая это ур-ніе относительно s^2, найдемъ, что подрадикальное количество $= (4R^2 - a^2) \cdot 4h^2$: оно положительно, если $a < 2R$. Если это условіе выполнено, оба значенія s^2 дѣйствительны; они и положительны, ибо произведеніе и сумма корней ур-нія (2), разсматриваемаго какъ квадратное, положительны; слѣд. s, при условіи $a < 2R$, имѣетъ всегда *два* положительныя значенія, именно:

$$s = \sqrt{a^2 + 4Rh \pm 2h\sqrt{4R^2 - a^2}} = \sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)},$$

полагая $d = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

Рѣшая затѣмъ ур-ніе (1), находимъ:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

полагая, что $x > y$, что позволительно; въ этихъ формулахъ нужно брать передъ d или верхніе знаки вмѣстѣ, или нижніе вмѣстѣ (въ силу ур-нія $xy = 2Rh$). Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R + d)} + \sqrt{a^2 + 2h(-2R + d)}\right\} \\ y_1 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R + d)} - \sqrt{a^2 + 2h(-2R + d)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R - d)} + \sqrt{a^2 + 2h(-2R - d)}\right\} \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R - d)} - \sqrt{a^2 + 2h(-2R - d)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (4)$$

Изъ этихъ формулъ выводимъ слѣдующія заключенія.

Въ системѣ (3) рѣшеній первый корень всегда дѣйствителенъ; чтобы и второй былъ дѣйствителенъ, надо, чтобы было

$$a^2 + 2h(-2R + d) > 0, \quad \text{откуда} \quad h < \frac{a^2}{2(2R - d)}.$$

Система (4) рѣшеній будетъ дѣйствительна, если подкоренное количество подъ вторымъ радикаломъ будетъ положительно, т. е. если $a^2 - 2h(2R + d) > 0$, откуда $h < \frac{a^2}{2(2R+d)}$. Въ этомъ предѣлѣ заключается первый. Умножая оба члена второй части неравенства на $2R - d$, имѣемъ:

$$h < \frac{a^2(2R - d)}{2(4R^2 - d^2)}, \quad \text{или} \quad h < \frac{2R - d}{2}, \quad \text{или} \quad h < R - \frac{d}{2}.$$

Итакъ, задача имѣетъ *два рѣшенія*, если $h < R - \frac{d}{2}$.

Если $a^2 - 2h(2R + d) < 0$, но $a^2 - 2h(2R - d) > 0$, откуда

$$\frac{a^2}{2(2R - d)} > h > \frac{a^2}{2(2R + d)},$$

то система (4) даетъ мнимыя значенія для x и y, а система (3) дѣйствительныя; заключаемъ, что при условіи

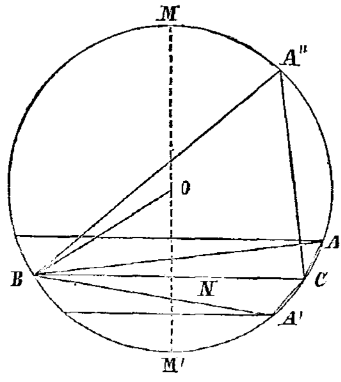
$$R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$$

задача имѣетъ *одно рѣшеніе*, выражаемое корнями x_1 и y_1.

Наконецъ, если $h > R + \frac{d}{2}$, то обѣ системы (3) и (4) мнимы, и задача невозможна.

Эти результаты легко обнаружить на чертежѣ. Описавъ кругъ радіусомъ R, проведемъ въ немъ хорду $BC = a$, и къ ней перпендикулярный діаметръ MM'; $ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, слѣдовательно;

$$d = 2ON, \qquad \frac{d}{2} = ON.$$



Черт. 48.

При $h < R - \frac{d}{2}$, т. е. при $h < OM' - ON$, или при $h < NM'$ существуютъ двѣ точки A и A′, расположенныя въ разстояніи h отъ BC, по ту и по другую сторону отъ BC и лежащія на данной окружности; слѣд. задачѣ отвѣчаютъ два треугольника: ABC и A′BC.

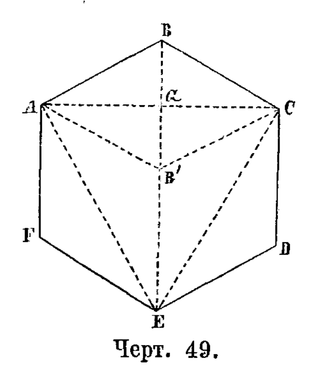
Если $R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$, т. е. если $NM' < h < NM$, одинъ треугольникъ A″BC отвѣчаетъ вопросу.

Наконецъ, если $h > NM$, то невозможно вписать въ окружность треугольникъ, высота котораго была-бы $= h$, и задача невозможна.

Задача X.

617. *По данной площади* $m\sqrt{3}$ *и периметру* $6a$ *шестіугольника, составленнаго тремя равными равнобедренными треугольниками, построенными на сторонахъ равносторонняго треугольника* ACE, *какъ на основаніяхъ, найти сторону* AC *этого правильнаго треугольника.*

Рѣшеніе. Замѣтимъ прежде всего, что шестіугольникъ можетъ быть двоякаго вида, смотря по тому, будутъ-ли равнобедренные треугольники построены внѣ треугольника ACE, или внутри его: въ первомъ случаѣ будемъ называть шестиугольникъ фигурою *перваго рода*, во второмъ — *втораго рода*.



Черт. 49.

Пусть $AC = 2x$; $AB = a$; ур-ніе будетъ

$$m\sqrt{3} = x^2\sqrt{3} \pm 3x\sqrt{a^2 - x^2},$$

причемъ знакъ $+$ относится къ шестіугольнику 1-го рода, знакъ — къ фигурѣ 2-го рода.

Раздѣливъ обѣ части на $\sqrt{3}$, и изолировавъ радикалъ имѣемъ:

$$m - x^2 = \pm x\sqrt{3(a^2 - x^2)}.$$

Изслѣдованіе. Для того, чтобы вторая часть была дѣйствительною, необходимо, чтобы существенно положительное количество x содержалось между 0 и a; затѣмъ, смотря по знаку разности $m - x^2$, различаемъ, какой родъ шестіугольника отвѣчаетъ вопросу.

Возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ ур-ніе, отвѣчающее задачѣ въ самомъ общемъ ея смыслѣ:

$$(m - x^2)^2 = 3(a^2 - x^2)x^2,$$

или, приведя въ порядокъ:

$$4x^4 - (2m + 3a^2)x^2 + m^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{6m + 3a^2} \pm \sqrt{-2m + 3a^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Различаемъ два случая: $m > 0$ и $m < 0$, что возможно, ибо можетъ случиться, что въ шестіугольникѣ 2-го рода площадь каждаго изъ равнобедренныхъ треугольниковъ будетъ больше площади равносторонняго треугольника.

1-й случай: $m > 0$. Первое подкоренное количество > 0; чтобы второе было не меньше 0, надо, чтобы было $-2m + 3a^2 \geqq 0$, откуда

$$m \leqq \frac{3}{2}a^2.$$

Какъ скоро это условіе удовлетворено, значенія x, выражаемыя формулою (1), дѣйствительны; а какъ абсолютная величина перваго члена въ скобкахъ больше втораго, то положительныя значенія x, которыя только и отвѣчаютъ на вопросъ, будутъ:

$$x_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{6m + 3a^2} - \sqrt{-2m + 3a^2}),$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{6m + 3a^2} + \sqrt{-2m + 3a^2}).$$

I. При $m = \frac{3}{2} a^2$, имѣемъ: $x_1 = x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, и задача имѣетъ одно рѣшеніе; соотвѣтствующій шестіугольникъ — правильный.

II. При $m < \frac{3}{2} a^2$ вопросъ имѣетъ два рѣшенія: существуютъ два шестіугольника, отвѣчающіе вопросу, и чтобы опредѣлить ихъ родъ, надо знать знаки разностей $m - x_1^2$ и $m - x_2^2$; но какъ $x_2 > x_1$, то опредѣлимъ сначала знакъ $m - x_2^2$; имѣемъ

$$m - x_2^2 = m - \frac{4m + 6a^2 + 2\sqrt{(6m + 3a^2)(-2m + 3a^2)}}{16} = \frac{6m - 3a^2 - \sqrt{(6m + 3a^2)(-2m + 3a^2)}}{8}.$$

Пусть сперва $6m > 3a^2$, такъ что

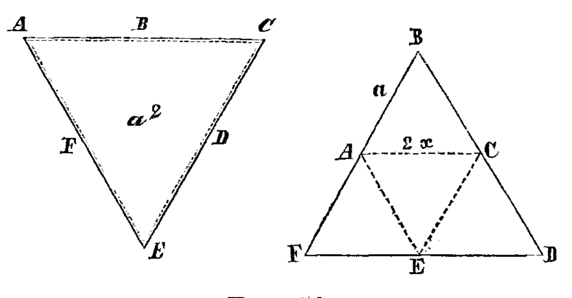
$$\frac{a^2}{2} < m < \frac{3a^2}{2};$$

оба члена дроби можно умножить на положительное количество $6m - 3a^2 + \sqrt{(6m - 3a^2)(-2m + 3a^2)}$, и разсматривать только числителя, отъ котораго зависитъ искомый знакъ разности; но числитель, по упрощеніи, даетъ $48m^2 - 48a^2m$, или $48m.(m - a^2)$: эта разность положительна, если $m > a^2$. Слѣд, если

$$a^2 < m < \frac{3}{2} a^2,$$

то $m - x_2^2 > 0$, и подавно $m - x_1^2 > 0$ ибо, $x_1 < x_2$; слѣд. оба шестіугольника относятся къ 1-му роду.

При $m = a^2$, имѣемъ, $x_2 = a$, $x_1 = \frac{a}{2}$, и оба шестіугольника превращаются въ правильные треугольники: 1-й x_2 совпадаетъ съ треугольникомъ АСЕ; 2-й x_1 имѣетъ стороны ($2a$) вдвое большія сторонъ треугольника АСЕ, ибо $2x_1 = a$.



Черт. 50.

Когда m заключается между a^2 и 0, шестіугольникъ, соотвѣтствующій корню x_2, будетъ 2-го рода, ибо $m - x_2^2 < 0$. Что касается разности $m - x_1^2$, то она одного знака съ выраженіемъ $6m - 3a^2 + \sqrt{(6m + 3a^2)(-2m + 3a^2)}$ . . . . (2); слѣд. положительна, если $m > \frac{a^2}{2}$, и остается положительною, если m содержится между $\frac{a^2}{2}$ и 0, ибо при $m < \frac{a^2}{2}$, откуда $3a^2 - 6m > 0$, умножая выраженіе (2) на положит. количество

$$3a^2 - 6m + \sqrt{(6m + 3a^2)(-2m + 3a^2)},$$

не измѣнимъ его знака; но это произведеніе $=$

$(6m + 3a^2)(-2m + 3a^2) - (3a^2 - 6m)^2 = -48m^2 + 48a^2m = 48m(a^2 - m)$, что > 0, ибо $m < \frac{a^2}{2}$. Итакъ, во всемъ этомъ интервалѣ шестіугольникъ, соотвѣтствующій корню x_1, будетъ *перваго рода*.

2-й случай: $m<0$. Чтобы корни были дѣйствительны, нужно чтобы было

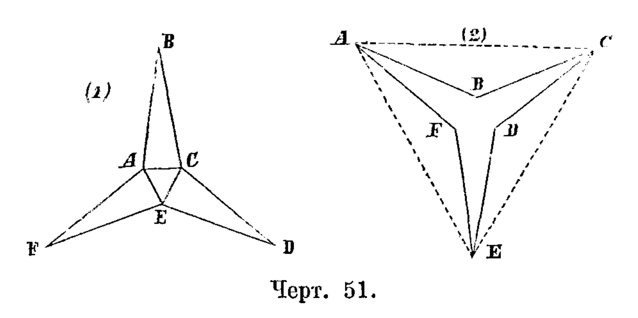
$$6m+3a^2>0, \qquad \text{откуда} \qquad m \geqq -\frac{a^2}{2}\cdot$$

Величина перваго члена скобокъ въ формулѣ (1) будетъ меньше втораго члена, и потому положительные корни, отвѣчающіе вопросу, будутъ;

$$x_1=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{6m+3a^2}+\sqrt{-2m+3a^2}\right),$$

$$x_2=\frac{1}{4}\left(+\sqrt{6m+3a^2}+\sqrt{-2m+3a^2}\right).$$

Оба соотвѣтствующіе шестіугольника относятся ко *второму роду*.



Черт. 51.

Въ частномъ случаѣ: $m=0$ имѣемъ

$$x_1=0, \qquad x_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Если положимъ, что m приближается къ нулю, оставаясь положительнымъ, 6-къ 1-го рода, соотвѣтствующій x_1, имѣетъ видъ (черт. 1), а 6-къ 2-рода, соотвѣтствующій x_2, имѣетъ видъ (черт. 2), разнящійся отъ 1-го только расположеніемъ вершинъ относительно правильнаго треугольника ACE.

Резюме изслѣдованія.

$m>\frac{3}{2}a^2$ . . .	x_1 и x_2 мнимы . . .	0 рѣшеній.
$m=\frac{3}{2}a^2$ . . .	$x_1=x_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . . .	1 рѣшеніе *(перваго рода).*
$a^2<m<\frac{3}{2}a^2$.	$x_1>0,\ x_2>0$ . . .	2 рѣшенія *(перваго рода).*
$0<m<a^2$ . . .	$x_1>0,\ x_2>0$ . . .	1 рѣш. 1-го рода, 1 рѣш. 2-го р.
$-\frac{a^2}{2}<m<0$ . . .	$x_1>0,\ x_2>0$ . . .	2 рѣшеніе (2-го рода).

Задача XI.

618. *Шаръ радіуса* r *лежитъ на плоскости; на той же плоскости поставленъ конусъ, котораго радіусъ основанія равенъ* R, *а высота* 2r. *На какомъ разстояніи* x *отъ данной плоскости нужно провести параллельную ей плоскость, чтобы объемы, содержащіеся между обѣими плоскостями, были равновелики? — Изслѣдовать положеніе сѣкущей плоскости относительно центра шара.*

Рѣшеніе. Объемъ сферическаго сегмента, имѣющаго высоту x, выражается формулою $\frac{1}{3}\pi x^2(3r-x)$. Объемъ усѣченнаго конуса, у котораго радіусы основаній суть R и y, а высота x, выражается формулою $\frac{1}{3}\pi x(R^2+y^2+Ry)$. Кромѣ того

между x и y имѣемъ соотношеніе $y:\mathrm{R}=(2r-x):2r$, при помощи котораго можно изъ предыдущей формулы исключить y; найдемъ

$$\frac{1}{3}\pi\mathrm{R}^2x\cdot\frac{12r^2-6rx+x^2}{4r^2}.$$

Уравненіе задачи, по сокращеніи на $\frac{1}{3}\pi$, будетъ

$$4r^2x^2(3r-x)=\mathrm{R}^2x(x^2-6rx+12r^2).$$

Рѣшеніе $x=0$ не соотвѣтствуетъ задачѣ, ибо оба объема обращаются въ нули; остается квадратное ур-ніе

$$(\mathrm{R}^2+4r^2)x^2-6r(\mathrm{R}^2+2r^2)x+12\mathrm{R}^2r^2=0\ \ldots\ldots\ (1).$$

Изслѣдованіе. Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы x было дѣйствительно, положительно и $<2r$. Условіе дѣйствительности корней выражается неравенствомъ

$$9r^2(\mathrm{R}^2+2r^2)^2-12\mathrm{R}^2r^2(\mathrm{R}^2+4r^2)\gtrless 0,$$

которое по сокращеніи на положительное количество $3r^2$ и по упрощеніи даетъ

$$-\mathrm{R}^4-4\mathrm{R}^2r^2+12r^4\gtrless 0\ \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Положивъ $\frac{\mathrm{R}}{r}=m$, находимъ, что m^2 должно заключаться между корнями ур-нія

$$m^4+4m^2-12=0;$$

и какъ, сверхъ того, m^2 д. б. >0, также какъ и m, находимъ, что должно быть

$$\mathrm{R}\leqslant r\sqrt{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

При соблюденіи этого условія, корни ур-нія (1) дѣйствительны; но они и положительны, такъ какъ ихъ произведеніе и сумма положительны. Чтобы узнать, какъ расположено количество $2r$ по отношенію къ корнямъ, подставимъ въ первую часть ур-нія (1) $2r$ вмѣсто x. Найдемъ въ результатѣ $4r^2(\mathrm{R}^2+4r^2)-12r^2(\mathrm{R}^2+2r^2)+12\mathrm{R}^2r^2$ или, $(\mathrm{R}^2-2r^2)4r^2$.

Но въ силу неравенства (3) заключаемъ, что первый множитель этого произведенія отрицателенъ, когда корни неравные; и обращается въ ноль при равныхъ корняхъ.

Этотъ крайній случай означаетъ, что $2r$ есть величина дѣйствительныхъ равныхъ корней при условіи $\mathrm{R}=r\sqrt{2}$. При дѣйствительныхъ же неравныхъ корняхъ, $2r$ заключается между корнями, сл. большій корень не соотвѣтствуетъ вопросу, меньшій даетъ отвѣтъ на вопросъ: задача имѣетъ 1 рѣшеніе:

$$x=r\cdot\frac{3(\mathrm{R}^2+2r^2)-\sqrt{3(12r^4-4\mathrm{R}^2r^2-\mathrm{R}^4)}}{\mathrm{R}^2+4r^2}\ \ldots\ldots\ (4).$$

619. Изслѣдованіе положенія сѣкущей плоскости относительно центра шара. Съ этою цѣлью опредѣлимъ знакъ, принимаемый первою частью ур-нія (1) при замѣнѣ x количествомъ r. Находимъ

$$r^2(7\mathrm{R}^2-8r^2);$$

слѣд. пока $7\mathrm{R}^2<8r^2$, рѣшеніе (4) меньше r, и потому сѣкущая плоскость и данная лежатъ по одну сторону отъ центра; если $7\mathrm{R}^2-8r^2=0$, то $x=r$: сѣкущая плоскость проходитъ черезъ центръ; наконецъ, когда $7\mathrm{R}^2>8r^2$, сѣкущая плоскость проходитъ надъ центромъ.

Задача XII.

620. *Зная радіусъ R шара и полную поверхность $2\pi m^2$ вписаннаго въ него цилиндра, вычислить радіусъ основанія и высоту цилиндра.*

Рѣшеніе. Обозначимъ буквою x радіусъ основанія, а $2y$—высоту цилиндра; ур-нія задачи будутъ

$$x^2+2xy=m^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1) \qquad x^2+y^2=R^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Изъ перваго имѣемъ:

$$y=\frac{m^2-x^2}{2x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

а подставляя эту величину y въ ур-ніе (2), имѣемъ

$$5x^4-2(m^2+2R^2)x^2+m^4=0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

откуда

$$x^2=\frac{m^2+2R^2\mp\sqrt{(m^2+2R^2)^2-5m^4}}{5} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Взявъ со знакомъ $+$ корни квадратные изъ второй части ур. (5), получимъ два значенія для x, а подставивъ ихъ въ формулу (3), найдемъ для каждаго изъ нихъ соотвѣтствующее значеніе y.

Изслѣдованіе. Чтобы значенія x и y, выведенныя изъ ур-ній (3) и (5), давали отвѣтъ на вопросъ, необходимо, чтобы они были дѣйствительны, положительны и меньше R.

Чтобы значенія x^2 были дѣйствительны, должно быть

$$(m^2+2R^2)^2 \geqslant 5m^4, \quad \text{или} \quad m^2+2R^2 \geqslant m^2\sqrt{5},$$

или

$$m^2 \leqslant R^2 \, . \, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Когда это условіе удовлетворено, величины x^2 будутъ дѣйствительны; они будутъ и положительны, ибо ихъ сумма и произведеніе положительны. Но чтобы какое-либо изъ значеній x отвѣчало на задачу, необходимо еще, какъ видно изъ ур-нія (3), чтобы оно было меньше m, для того чтобы соотвѣтствующее значеніе y само было положительно. Другихъ условій нѣтъ: ибо какъ скоро дѣйствительныя положительныя значенія x и y удовлетворяютъ ур-нію (2), въ силу этого уже величины эти меньше R.

Теперь необходимо опредѣлить, сколько значеній x^2 содержится между 0 и m^2, а для этого подставимъ m^2 вмѣсто x^2 въ первую часть ур-нія (4), какъ квадратнаго относительно x^2. Результатъ подстановки есть $4m^2(m^2-R^2)$. Должно прослѣдить измѣненія m^2 отъ 0 до R^2, и затѣмъ отъ R^2 до maximum'а m^2, равнаго $R^2 \, . \, \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

I. $m^2<R^2$. Въ такомъ случаѣ $4m^2(m^2-R^2)<0$; слѣд. одно, и только одно, значеніе x^2 меньше m^2, другое $>m^2$: задача имѣетъ одно рѣшеніе; значеніе x, его дающее, таково:

$$x=\sqrt{\frac{m^2+2R^2-\sqrt{(m^2+2R^2)^2-5m^4}}{5}}.$$

II. $m^2=R^2$. Результатъ указанной подстановки обращается въ ноль, а это значитъ, что одно изъ значеній x есть m или R; соотвѣтствующее значеніе y равно

нулю; цилиндръ обращается въ два свои основанія, сливающіяся съ большимъ кругомъ шара. Что касается другаго рѣшенія, то оно есть: $x^2 = \frac{R^2}{5}$, откуда

$$x = \frac{R\sqrt{5}}{5}, \quad \text{а} \quad y = \frac{2R\sqrt{5}}{5}:$$

это — цилиндръ, подобный литру (мѣрѣ жидкостей). Это другое значеніе x получаемъ, замѣчая, что произведеніе двухъ значеній x^2, въ силу ур. (5), равно $\frac{m^4}{5}$, или, въ данномъ случаѣ, $\frac{R^4}{5}$.

III. $R^2 < m^2 < R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Въ этомъ случаѣ $4m^2(m^2 - R^2) > 0$, и слѣд. или оба значенія x^2 меньше m^2, или оба больше m^2; но послѣднее предположеніе невозможно, ибо произведеніе обоихъ значеній x^2, т. е. $\frac{m^4}{5}$ меньше m^4. Заключаемъ, что когда m^2 содержится между R^2 и $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, задача всегда имѣетъ два рѣшенія.

IV. $m^2 = R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т. е. своей наибольшей величинѣ. Оба значенія x^2 въ этомъ предѣльномъ случаѣ равны $\frac{m^2 + 2R^2}{5}$, или, замѣняя m^2 его величиною, находимъ: $x^2 = R^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, откуда

$$x = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \quad 2y = 2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}};$$

полная же поверхность цилиндра $= 2\pi R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т. е. она равновелика боковой поверхности цилиндра, имѣющаго основаніемъ большой кругъ даннаго шара, а высотою сторону правильнаго звѣзднаго десятиугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ.

V. $m^2 > R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, для x получаются мнимыя значенія, слѣд. задача невозможна.

Если теперь назовемъ полную поверхность цилиндра буквою S и помножимъ на 2π предыдущія неравенства и равенства, можно все изслѣдованіе резюмировать слѣдующимъ образомъ.

Резюме изслѣдованія.

$S < 2\pi R^2$	. . . . задача имѣетъ . . .	1 рѣшеніе.
$S = 2\pi R^2$	. . . .	2 рѣшенія.
$2\pi R^2 < S < \pi R^2(\sqrt{5}+1)$	. . . .	2 „
$S = \pi R^2(\sqrt{5}+1)$	. . . .	1 рѣшеніе.
$S > \pi R^2(\sqrt{5}+1)$	. . . .	0 рѣшеній.

Примѣчаніе. Если въ ур-ніяхъ (1) и (2) перемѣнимъ y на $-y$, то легко видѣть, что ур-ніе (4) можно истолковать, полагая, что вмѣсто полной поверхности

цилиндра дается разность между суммою его основаній и боковою поверхностью. Можно бы было повторить изслѣдованіе предыдущей задачи, называя рѣшеніями втораго рода — рѣшенія, отвѣчающія измѣненной задачѣ.

Задача XIII.

621. *Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ* $2p$ *и сумму* S *гипотенузы и высоты.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ x и y — искомые катеты, z — гипотенуза, u — соотвѣтствующая высота. Ур-нія задачи будутъ:

$$x+y+z=2p;\quad z+u=S;\quad x^2+y^2=z^2;\quad xy=uz.$$

Изъ перваго имѣемъ: $x^2+y^2+2xy=(2p-z)^2=4p^2-4pz+z^2$, или, въ силу третьяго и четвертаго ур-ній: $uz=2p^2-2pz$; но $u=S-z$, сл.

$$z(S-z)=2p^2-2pz,\quad \text{или}\quad z^2-(2p+S)z+2p^2=0\quad .\ .\ .\ (1)$$

Найдя z, для опредѣленія x и y получимъ ур-нія

$$x+y=2p-z\quad \text{и}\quad xy=(S-z)\,.\,z,$$

откуда видно, что x и y суть корни ур-нія

$$X^2-(2p-z)X+(S-z)z=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Изслѣдованіе. Чтобы корни ур-нія (1) были дѣйствительны, надо, чтобы $(2p+S)^2-8p^2 \geqslant 0$, откуда

$$S \geqslant 2p(\sqrt{2}-1).$$

Пусть это условіе удовлетворено; тогда оба корня ур-нія (1) будутъ и положительны, ибо ихъ произведеніе ($2p^2$) и сумма ($2p+S$) положительны. Но большій корень долженъ быть отброшенъ; въ самомъ дѣлѣ, высота u есть количество существенно положительное, а изъ ур-нія $u=S-z$ видно, что для того, чтобы было $u>0$, необходимо, чтобы было $z<S$; но большій корень больше полусуммы корней, равной $p+\frac{S}{2}$, а само количество $p+\frac{S}{2}$ больше S, ибо для возможности треугольника, очевидно, необходимо, чтобы было $p>\frac{S}{2}$. Что касается меньшаго корня, то онъ будетъ меньше S, если результатъ подстановки S вмѣсто z въ первую часть ур-нія (1) отрицателенъ, что приводитъ къ неравенству

$$-2Sp+2p^2<0\quad \text{или}\quad S>p.$$

Какъ скоро это условіе удовлетворено, то будетъ удовлетворено и условіе дѣйствительности корней, ибо

$$p>2p(\sqrt{2}-1),\quad \text{или}\quad 3>2\sqrt{2},\quad \text{или}\quad 9>8.$$

Итакъ, для z получается одно значеніе:

$$z'=\frac{2p+S-\sqrt{(2p+S)^2-8p^2}}{2},$$

съ условіемъ: $p<S<2p$.

Условіе дѣйствительности корней ур-нія (2) есть:

$$(2p-z')^2-4(S-z')z' \gtrless 0,\quad \text{или}\quad 5z'^2-4z'(p+S)+4p^2 \gtrless 0,$$

или, въ силу равенства (1),

$$5z'(2p+S)-10p^2-4z'(p+S)+4p^2 \gtrless 0,\quad \text{или}\quad (6p+S)z'-6p^2 \geqslant 0,$$

откуда
$$z' \gtrless \frac{6p^2}{6p+S}.$$

Итакъ, чтобы x и y были дѣйствительны, необходимо, чтобы $\frac{6p^2}{6p+S}$ было меньше меньшаго корня ур. (1); для этого же необходимо: 1) чтобы результатъ подстановки $\frac{6p^2}{6p+S}$ вмѣсто z въ первую часть ур. (1) былъ >0; и 2) чтобы притомъ $\frac{6p^2}{6p+S}$ было $<$ меньшаго корня, что въ свою очередь требуетъ, чтобы было $\frac{6p^2}{6p+S} < \frac{2p+S}{2}$. Подстановка даетъ:

$$36p^4 - 6p^2(6p+S)(2p+S) + 2p^2(6p+S)^2 = 36p^4 - 24Sp^3 - 4S^2p^2$$
$$= 4p^2(9p^2 - 6Sp - S^2),$$

этотъ результатъ д. б. >0. Замѣтивъ, что $\frac{6p^2}{6p+S}$ въ самомъ дѣлѣ $< \frac{2p+S}{2}$, заключаемъ, что для дѣйствительности x и y должно быть удовлетворено неравенство

$$-S^2 - 6Sp + 9p^2 > 0,$$

вмѣстѣ съ условіемъ $p < S < 2p$.

Отсюда находимъ, что при $S \lesseqgtr 3p(\sqrt{2}-1)$ x и y будутъ дѣйствительны; а замѣтивъ, что $z' < p$ и $S > p$, находимъ, что сумма $x+y$, равная $2p - z'$ и произведеніе xy, равное $(S-z')z'$, положительны, сл. x и y положительны.

Итакъ, условія возможности задачи таковы:

$$p < S < 2p, \quad S \lesseqgtr 3p(\sqrt{2}-1).$$

Но $3p(\sqrt{2}-1) < 2p$, ибо это неравенство тождественно съ $18 < 25$; слѣд. условія, необходимыя и достаточныя для возможности задачи, приводятся къ:

$$p < S \leq 3p(\sqrt{2}-1),$$

причемъ задача имѣетъ *одно рѣшеніе*.

Отсюда, между прочимъ, заключаемъ, что maximum $S = 3p(\sqrt{2}-1)$; при этомъ $x=y$; слѣд. *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имѣетъ наибольшую сумму гипотенузы съ соотвѣтствующею высотою.*

Задача XIV.

622. *Вписать въ данный полукругъ прямоугольникъ, зная сумму p его основанія и высоты.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ: R — радіусъ даннаго круга, $2x$ — основаніе и y высота искомаго прямоугольника; имѣемъ непосредственно ур-нія:

$$y + 2x = p. \quad \ldots \quad (1) \qquad x^2 + y^2 = R^2. \quad \ldots \quad (2)$$

Рѣшая первое относительно y, имѣемъ:

$$y = p - 2x \quad \ldots \quad (3)$$

Подставляя это выраженіе y въ ур-ніе (2), найдемъ:

$$5x^2 - 4px + p^2 - R^2 = 0. \quad \ldots \quad (4)$$

откуда
$$x = \frac{2p \mp \sqrt{5R^2 - p^2}}{5} \quad \ldots \quad (5)$$

Затѣмъ y вычисляется по формулѣ (3).

Изслѣдованіе. Въ этой задачѣ будемъ разсматривать и отрицательныя значенія x и y. Когда x и y будутъ положительны, будемъ называть рѣшеніе — рѣшеніемъ перваго рода; оно будетъ втораго рода, если при $x < 0$ будетъ $y > 0$, т. е. когда дана будетъ разность между высотой и основаніемъ; наконецъ, рѣшеніемъ третьяго рода называемъ то, когда $x > 0$, а $y < 0$, т. е. когда дана разность между основаніемъ и высотою.

Условіе дѣйствительности x выражается неравенствомъ

$$p \leqslant R\sqrt{5}.$$

Затѣмъ, изъ ур-нія (4) видимъ, что оба значенія x будутъ положительны, или одно положительно, а другое отрицательно, смотря по тому, будетъ-ли p больше, или меньше R. Съ другой стороны, изъ формулы (3) заключаемъ, что положительному x будетъ соотвѣтствовать положительный y, когда $x < \frac{p}{2}$, и отрицательный y, когда $x > \frac{p}{2}$. Въ такомъ случаѣ, нужно знать результатъ подстановки $\frac{p}{2}$ вмѣсто x въ первую часть ур-нія (4). Этотъ результатъ $= \frac{p^2 - 4R^2}{4}$; слѣд. надо различать три случая: $p < 2R$, $p = 2R$, $p > 2R$ (послѣдній случай возможенъ, ибо 2R меньше $R\sqrt{5}$).

Итакъ, количества, подлежащія разсмотрѣнію, въ порядкѣ возрастающихъ величинъ, таковы: R, 2R, $R\sqrt{5}$; мы должны измѣнять p: отъ 0 до R, отъ R до 2R, и наконецъ отъ 2R до $R\sqrt{5}$.

I. $p < R$. Произведеніе корней ур-нія (4) отрицательно, сл. одно значеніе x положительно, другое отрицательно. Отрицательной величинѣ x соотвѣтствуетъ положительное значеніе y; слѣд. всегда имѣемъ рѣшеніе 2-го рода. Положительное значеніе x больше $\frac{p}{2}$; въ самомъ дѣлѣ, p, будучи меньше R, меньше и 2R, слѣд. количество $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ отрицательно: это значитъ, что $\frac{p}{2}$ заключается между корнями ур. (4), а потому отрицательный корень д. б. $< \frac{p}{2}$, а положительный больше. Такимъ образомъ, положительному x соотвѣтствуетъ, въ силу ур. (3), отрицательное значеніе y. Слѣд. имѣемъ рѣшеніе 3-го рода. Итакъ: при $p < R$ задача имѣетъ два рѣшенія: одно 2-го рода, другое 3-го рода.

II. $p = R$. Въ этомъ случаѣ

$$x = 0,\ y = R;\quad x = \frac{4}{5}R,\ y = -\frac{3}{5}R.$$

Первое рѣшеніе можемъ разсматривать, какъ рѣшеніе 1-го или 2-го рода; второе — рѣшеніе 3-го рода. Этотъ случай относится къ первому, но его можно отнести и къ слѣдующему.

III. $R < p < 2R$. Оба корня ур-нія (4) положительны, но какъ $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ отрицательно, одинъ изъ корней меньше, другой больше $\frac{p}{2}$. Первому соотвѣтствуетъ положительное значеніе y, второму — отрицательное. И такъ: одно рѣшеніе относится къ 1 му роду, другое къ 3-му.

IV. $p = 2R$. Оба значенія x положительны, но количество $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ обращается

въ ноль, слѣд. одно значенiё x равно $\frac{p}{2}$ или R, а соотвѣтствующее значенiе y равн. нулю. Другое значенiе x, $\frac{3}{10}p$ или $\frac{3}{5}$ R найдемъ, вычтя $\frac{p}{2}$ изъ суммы корней $\frac{4}{5}p$, а для соотвѣтствующаго значенiя y находимъ $\frac{4}{5}$R. Итакъ, имѣемъ два рѣшенiя, изъ коихъ второе будетъ 1-го рода, между тѣмъ какъ первое можно отнести, по произволу, или къ 1-му или къ 3-му роду.

V. $2R < p < R\sqrt{5}$. Въ этомъ случаѣ оба значенiя x положительны, и оба меньше $\frac{p}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, сумма корней, равная $\frac{4}{5}p$, меньше p, слѣд. оба корня не могутъ быть больше $\frac{p}{2}$, и какъ количество $\frac{p^2-4R^2}{4}$ положительно, они необходимо меньше $\frac{p}{2}$. Въ такомъ случаѣ положительнымъ значенiямъ x соотвѣтствуютъ и положительные y-ки: имѣемъ два рѣшенiя 1-го рода.

VI. $p = R\sqrt{5}$. Имѣемъ двойное рѣшенiе 1-го рода.

Нельзя брать $p > R\sqrt{5}$, ибо тогда оба значенiя x дѣлаются мнимыми, и задача невозможна.

Резюме изслѣдованiя.

Измѣненiя p.	Число рѣшенiй:		
	1-го рода;	2-го рода;	3-го рода.
$p < R$	0	1	1
$p = R$	0	1	1
$R < p < 2R$.	1	0	1
$p = 2R$.	1	0	1
$2R < p < R\sqrt{5}$	2	0	0
$p = R\sqrt{5}$	1	0	0
$p > R\sqrt{5}$	0	0	0

Задача XV.

623. *Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ 2p, если притомъ извѣстно, что сумма объемовъ, образуемыхъ треугольникомъ при обращенiи его поочередно около каждаго катета, равновелика полушару радiуса* R.

Рѣшенiе. Пусть будутъ x и y — катеты, z — гипотенуза; непосредственно имѣемъ 3 ур-нiя:

$$x + y + z = 2p;\quad xy(x+y) = 2R^3;\quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Легко исключить изъ этихъ ур-нiй x и y; для этого выводимъ изъ 1-го и 2-го $x + y$ и xy черезъ z; имѣемъ

$$x + y = 2p - z;\quad xy = \frac{2R^3}{2p-z}.$$

Отсюда имѣемъ: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2p-z)^2 - \frac{4R^3}{2p-z}$.

Вставляя это выраженіе x^2+y^2 въ третье ур. системы, находимъ

$$z^2=(2p-z)^2-\frac{4R^3}{2p-z}, \quad \text{или} \quad pz^2-3p^2z+2p^3-R^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Итакъ, для опредѣленія z имѣемъ ур-ніе (1), квадратное относительно z. Опредѣливъ z, можемъ вычислить x и y; въ самомъ дѣлѣ, зная, что сумма $x+y=2p-z$, а произведеніе $xy=\frac{2R^3}{2p-z}$, найдемъ эти неизвѣстныя изъ ур-нія

$$X^2-(2p-z)X+\frac{2R^3}{2p-z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изслѣдованіе. Чтобы система опредѣленныхъ такимъ образомъ величинъ x, y и z отвѣчала задачѣ, необходимо и достаточно, чтобы эти величины были дѣйствительны и положительны.

Чтобы корни ур-нія (2) были дѣйствительны, необходимо, чтобы

$$(2p-z)^2 \geqslant \frac{8R^3}{(2p-z)};$$

а чтобы они были положительны, необходимо, чтобы былъ

$$2p-z>0, \text{ или } z<2p.$$

Пусть это послѣднее условіе удовлетворено; въ такомъ случаѣ, умноживъ обѣ части предыдущаго неравенства на положительное количество $2p-z$, найдемъ: $(2p-z)^3 \geqslant 8R^3$, или, извлекая изъ обѣихъ частей кубичный корень, имѣемъ: $2p-z \geqslant 2R$, или $z \leqslant 2(p-R)$; и какъ z должно быть положительно, необходимо, чтобы

$$0<z \leqslant 2(p-R),$$

а это предполагаетъ, чтобы было $p>R$. Какъ скоро z меньше или равно $2(p-R)$, оно и подавно будетъ меньше $2p$, и условіе $z<2p$ будетъ удовлетворено. Итакъ, число рѣшеній задачи равно числу корней ур-нія (1), удовлетворяющихъ условіямъ

$$0<z \leqslant 2(p-R).$$

Нетрудно убѣдиться, что корни ур-нія (1) всегда дѣйствительны; а какъ предполагается $R<p$, то они и положительны. Остается изслѣдовать, сколько этихъ корней заключается между 0 и $2(p-R)$. Для этого нужно знать величины первой части ур-нія (1) при $z=0$ и $z=2(p-R)$. При $z=0$, она даетъ $2p^3-R^3$ — величину положительную. Подстановка $2(p-R)$ вмѣсто z даетъ

$$-(R^2-4pR+3p^2), \quad \text{или} \quad -[R-p(2-\sqrt{2})][R-p(2+\sqrt{2})].$$

Итакъ, нужно разсмотрѣть три случая:

$$0<R<p(2-\sqrt{2}); \quad p(2-\sqrt{2})<R<p; \quad R>p.$$

I. Пусть: $0<R<p(2-\sqrt{2})$. Въ такомъ случаѣ результатъ подстановки вм. z выраженія $2(p-R)$ отрицателенъ, а потому одинъ изъ корней ур-нія (1) заключается между 0 и $2(p-R)$, другой корень больше $2(p-R)$. Первый корень даетъ искомое рѣшеніе, второй не соотвѣтствуетъ вопросу: задача имѣетъ 1 рѣшеніе. Это рѣшеніе мы получимъ, взявъ для z меньшій корень ур-нія (1), а для x и y корни ур-нія (2), когда въ немъ z замѣненъ меньшимъ корнемъ ур-нія (1).

II. Когда $p(2-\sqrt{2})<R<p$, то при $z=2(p-R)$ триномъ положителенъ, и слѣд. или оба корня ур-нія (1) заключаются между 0 и $2(p-R)$, или оба больше $2(p-R)$. Чтобы оба корня содержались между 0 и $2(p-R)$, нужно, чтобы ихъ полу-

сумма $\frac{3}{2}p$ была $< 2(p - R)$, т. е. чтобы $3p < 4(p - R)$, или $R < \frac{p}{4}$, условіе, несогласное съ положеніемъ $R > p(2 - \sqrt{2})$. Итакъ, въ данномъ случаѣ оба корня ур-нія (1) больше $2(p - R)$, и ни тотъ, ни другой не даютъ рѣшенія.

III. Если $R > p$,, то уже видѣли, что въ такомъ случаѣ задача невозможна.

Резюме изслѣдованія.

1. $R < p(2 - \sqrt{2})$: Задача имѣетъ 1 рѣш, ($z =$ меньшему корню ур-нія (1)).
2. $R = p(2 - \sqrt{2})$: „ „ 1 „ ($z = 2(p - R)$, треугольникъ равнобедренный).
3. $R > p(2 - \sqrt{2})$: Задача невозможна.

Задача XVI.

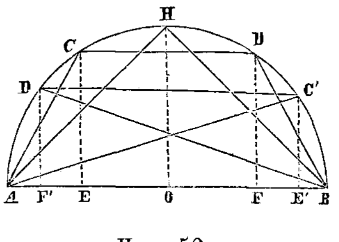
624. *Въ данный полукругъ діаметра* $AB = 2R$ *вписать хорду* CD, *параллельную* AB, *такъ чтобы* $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = m^2$, *гдѣ* m — *данная линія.*

Рѣшеніе. Принявъ за неизвѣстное $AC = x$, выразимъ CD въ зависимости отъ R и x. Но $CD = 2R - 2AE$ и $\overline{AC}^2 = 2R \times AE$, слѣд. $CD = 2R - \frac{x^2}{R}$. Ур-ніе будетъ

$$2x^2 + \left(2R - \frac{x^2}{R}\right)^2 = m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Это ур-ніе, выведенное для одного случая, приложимо ко всѣмъ случаямъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть хорда CD приняла положеніе $C'D'$, въ которомъ точки C' и D' лежатъ въ другихъ четвертяхъ: обозначая, какъ и прежде, прямую AC' букво x, будемъ имѣть: $C'D' = 2AE' - 2R$; а какъ $AE' \times 2R = AC'^2$, то $C'D' = \frac{x^2}{R} - 2R$; ур-ніе будетъ въ этомъ случаѣ

$$2x^2 + \left(\frac{x^2}{R} - 2R\right)^2 = m^2:$$



Чер. 52.

оно тождественно съ (1). Даемъ ему видъ

$$x^4 - 2R^2x^2 + R^2(4R^2 - m^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изслѣдованіе. Для изслѣдованія и рѣшенія этого биквадратнаго ур-нія, полагаемъ

$$x^2 = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

такъ что ур-ніе будетъ

$$y^2 - 2R^2y + R^2(4R^2 - m^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Для того, чтобы корень ур-нія (2) служилъ отвѣтомъ на предложенную задачу, необходимо и достаточно, чтобы было

$$x \text{ дѣйств.}, \qquad x > 0, \qquad x < 2R. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Но для полученія корней ур-нія (2) нужно рѣшить (4) и найденные корни внести поочередно въ (3); отсюда видно, что x будетъ дѣйств., если y будетъ дѣйств. и положительно; поэтому нужно изслѣдовать съ этой точки зрѣнія корни ур-нія (4).

Они будутъ дѣйствительны, если $R^4 - R^2(4R^2 - m^2) \gtrless 0$, или

$$m^2 \gtrless 3R^2 \quad \text{. . . . .} \quad (6)$$

Въ виду этого изслѣдованіе распадается на три случая.

Первый случай. $m^2 < 3R^2$. Корни ур-нія (4) будутъ мнимые, а потому будутъ мнимы и корни ур-нія (2), и задача будетъ невозможна.

Второй случай. $m^2 = 3R^2$. Корни ур-нія (4) въ этомъ случаѣ — дѣйствительные равные; ихъ общая величина $= R^2$; слѣд. ур-ніе (2) имѣетъ два корня равныхъ $+R$ и два корня равныхъ $-R$. Изъ нихъ $x = +R$ отвѣчаетъ на задачу, ибо $+R$ — дѣйствительно, положительно и $< 2R$. Искомая фигура представляетъ въ этомъ случаѣ *правильный полу-шестіугольникъ.*

Слѣдуетъ замѣтить, что сумма трехъ квадратовъ, равная въ данномъ случаѣ $3R^2$, представляетъ *minimum*, ибо мы видѣли, что она не можетъ быть меньше $3R^2$, но дѣлается равною $3R^2$ при $x = R$. Слѣд. *сумма квадратовъ трехъ разсматриваемыхъ хордъ имѣетъ minimum* $= 3R^2$, *когда фигура, ими образуемая, есть правильный полу-шестіугольникъ.*

Третій случай. $m^2 > 3R^2$. При этомъ условіи корни ур-нія (4) — дѣйствительные и неравные; изслѣдуемъ ихъ знаки: ихъ произведеніе $= R^2(4R^2 - m^2)$, и потому имѣетъ знакъ разности $4R^2 - m^2$, т. е. будетъ $>$, $=$, или < 0, смотря потому, будетъ-ли $m^2 <$, $=$, или $> 4R^2$, что совмѣстимо съ случаемъ $m^2 > 3R^2$. Итакъ, различаемъ три случая:

$$m^2 > 3R^2 \begin{cases} m^2 < 4R^2 \\ m^2 = 4R^2 \\ m^2 > 4R^2. \end{cases}$$

I. $3R^2 < m^2 < 4R^2$. Ур-ніе (4) имѣетъ въ этомъ случаѣ корни дѣйств. и положительные, ибо ихъ произведеніе и сумма положительны; а потому четыре корня ур-нія (2) дѣйствительны, и слѣд. это ур. имѣетъ два положительныхъ корня. Но еще нужно, чтобы эти корни были $< 2R$, или чтобы ихъ квадраты были $< 4R^2$; но эти квадраты суть корни ур-нія (4), а оно имѣетъ положительные корни, составляющіе въ суммѣ $2R^2$, слѣд. каждый изъ нихъ меньше $2R^2$.

Итакъ, въ данномъ случаѣ задача имѣетъ два рѣшенія

$$x = \sqrt{R^2 \pm R\sqrt{m^2 - 3R^2}}.$$

II. $m^2 = 4R^2$. Произведеніе корней ур-нія (4) равно нулю, слѣд. одинъ корень $= 0$, а другой равенъ суммѣ ихъ, т. е. $2R^2$; слѣд. ур. (2) имѣетъ два корня равныхъ 0, и два корня равныхъ $\pm R\sqrt{2}$; другими словами, задача имѣетъ 2 рѣшенія

$$x' = 0, \quad x'' = R\sqrt{2},$$

изъ коихъ первое даетъ діаметръ 2R, а другое полупериметръ вписаннаго квадрата AHB.

III. $m^2 > 4R^2$. Ур. (4) имѣетъ корни съ противоположными знаками; изъ нихъ только положительный даетъ дѣйствительныя значенія для x; слѣд. ур. (2) имѣетъ въ данномъ случаѣ два корня мнимыхъ и два дѣйствительныхъ.

Положительный корень дастъ отвѣтъ на задачу, если будетъ $< 2R$, или если его квадратъ $< 4R^2$; чтобы это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки $4R^2$ вмѣсто x въ первую часть ур-нія (4) былъ положителенъ, т. е. чтобы $16R^4 - 2R^2 \cdot 4R^2 + R^2(4R^2 - m^2) \geq 0$, или

$$m^2 \leqq 12R^2,$$

условіе, совмѣстимое съ положеніемъ $m^2 > 4R^2$; такимъ образомъ разбираемый случай распадается на 3 новыхъ:

$$m^2 > 4R^2 \begin{cases} m^2 < 12R^2 \\ m^2 = 12R^2 \\ m^2 > 12R^2. \end{cases}$$

1°. $4R^2 < m^2 < 12R^2$. Положительный корень ур-нія (2) отвѣчаетъ на задачу, которая имѣетъ одно рѣшеніе

$$x = \sqrt{R^2 + R\sqrt{m^2 - 3R^2}}.$$

2°. $m^2 = 12R^2$. — Въ этомъ случаѣ положительный корень ур-нія (4) равенъ $4R^2$; слѣд.

$$x = 2R:$$

это—предѣльный случай задачи: контуръ, квадраты сторонъ котораго имѣютъ сумму $12R^2$ есть ABAB.

3°. $m^2 > 12R^2$. — Положительный корень ур-нія (4) будетъ $> 4R^2$, и слѣд. положительный корень (2) не соотвѣтствуетъ задачѣ, которая становится невозможною. Итакъ: *maximum* суммы трехъ квадратовъ $= 12R^2$.

Резюме изслѣдованія.

$m^2 < 3R^2$:		корни мнимые.	0 рѣшеній
$m^2 = 3R^2$:		правильный $\frac{1}{2}$ шестиугольникъ, min. (m^2). . .	1 рѣшеніе
$m^2 > 3R^2$	$m^2 < 4R^2$	. . . .	2 рѣшенія
	$m^2 = 4R^2$:	$x' = 0$, $x'' = R\sqrt{2}$.	2 рѣшенія
	$m^2 > 4R^2$, $m^2 < 12R^2$:	x' мним.; $0 < x'' < 2R$.	1 рѣшеніе
	$m^2 > 4R^2$, $m^2 = 12R^2$:	x' мним.; $x'' = 2R$.	1 рѣшеніе
	$m^2 > 4R^2$, $m^2 > 12R^2$:	x' мним.; $x'' > 2R$.	0 рѣшеній.

625. Изслѣдованіе суммы трехъ квадратовъ. — Для суммы m^2 трехъ квадратовъ мы нашли (2) выраженіе:

$$m^2 = \frac{1}{R^2}\left[x^4 - 2R^2x^2 + 4R^4\right],$$

представляющее биквадратный триномъ, который изслѣдовать мы умѣемъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$; слѣд. мы можемъ прослѣдить его измѣненія при измѣненіи x отъ 0 до 2R, какъ требуетъ геометрическій вопросъ, и этимъ путемъ найдемъ въ болѣе сжатой формѣ результаты предыдущаго изслѣдованія. Для этого представимъ m^2 въ видѣ:

$$m^2 = \frac{1}{R^2}\left[(x^2 - R^2)^2 + 3R^4\right].$$

Отсюда прямо видно, что когда x возрастаетъ отъ 0 до R, $x^2 - R^2$ уменьшается отъ R^4 до 0, а слѣд. m^2 уменьшается отъ $4R^2$ до $3R^2$; при дальнѣйшемъ возрастаніи x отъ R до 2R, $(x^2 - R^2)^2$ возрастаетъ отъ 0 до $9R^4$, и слѣд. m^2 увеличивается отъ $3R^2$ до $12R^2$; иначе говоря, m^2 проходитъ черезъ minimum $3R^2$, когда $x = R$.

Эти результаты резюмированы въ слѣдующей таблицѣ:

x	0	$<$	R	$<$	$R\sqrt{2}$	$<$	2R.
m^2	$4R^2$	$>$	$3R^2$	$<$	$4R^2$	$<$	$12R^2$.

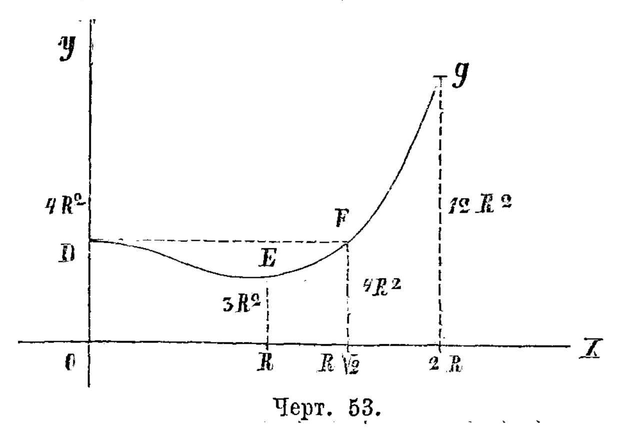
Величина m^2 измѣняется, уменьшаясь отъ $4R^2$ до $3R^2$, затѣмъ увеличивается до 12^2R; слѣд. она принимаетъ два раза всякое значеніе, содержащееся между $3R^2$ и $4R^2$: разъ при x, содержащемся между 0 и R, другой разъ при x, лежащемъ между

R и R$\sqrt{2}$; и одинъ разъ всякое значеніе, содержащееся между $4R^2$ и $12R^2$. Это значитъ, что задача невозможна, когда данное m^2 меньше $3R^2$, или больше $12R^2$, что она имѣетъ 1 рѣшеніе, когда m^2 содержится между $12R^2$ и $4R^2$, и имѣемъ 2 рѣшенія, когда m^2 заключается между $4R^2$ и $3R^2$. Это—результаты предыдущаго изслѣдованія, но представленные въ сжатой формѣ.

Изобразимъ графически измѣненія m^2, представляя величины x прямыми, откладываемыми на оси $x'x$ отъ точки 0, а величины m^2 нанося на перпендикуляры парал-ые 0Y. Такимъ образомъ получимъ кривую DEFG, изображающую измѣненія m^2.

На ней видно, что:

1) Для опредѣленія величины m^2, соотвѣтствующей данному значенію x, достаточно нанести x на ось 0X отъ точки 0, и взять ординату кривой, соотвѣтствующую полученной точкѣ.



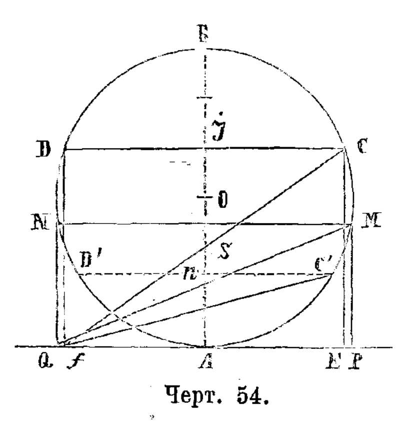
Черт. 53.

2) Чтобы найти величину x, соотвѣтствующую данной величинѣ m^2, достаточно пересѣчь кривую параллелью къ 0X, отстоящею отъ 0X на m^2, и взять абсциссы точекъ пересѣченія кривой съ параллелью.

Такимъ образомъ легко видѣть, что задача не имѣетъ рѣшеній, когда m^2 меньше $3R^2$, или больше $12R^2$, что получаются двѣ точки встрѣчи, слѣд. и два рѣшенія, когда m^2 содержится между $3R^2$ и $4R^2$, и наконецъ одна точка встрѣчи, или только одно рѣшеніе, когда m^2 содержится между $4R^2$ и $12R^2$.

Задача XVII.

626. *Дана окружность* 0 *и къ ней касательная въ точкѣ* A. *Провести хорду* MN *параллельно этой касательной такъ, чтобы прямоугольникъ* MNPQ *имѣлъ діагональ* MQ *данной длины* m.



Черт. 54.

Рѣшеніе. — Примемъ за неизвѣстное разстояніе AS $= x$ искомой хорды отъ точки A, и замѣтимъ, что это неизвѣстное можетъ имѣть только величину положительную, не большую 2R.

Изъ прямоугольнаго треугольника MQP находимъ: $\overline{MQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2$.

Но $\overline{PQ}^2 = 4\overline{MS}^2 = 4 \times SA \times SB = 4x(2R-x)$; подстановка даетъ: $x^2+4x(2R-x)=m^2$. Это уравненіе совершенно общее, ибо выраженіе для $\overline{PQ}^2$ остается одинаковымъ, каково бы ни было положеніе хорды MN. Итакъ, ур-ніе задачи будетъ

$$3x^2 - 8Rx + m^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Изслѣдованіе. — Чтобы корень этого ур-нія давалъ рѣшеніе геометрическаго вопроса, необходимо и достаточно, чтобы онъ былъ дѣйствителенъ, положителенъ и не больше 2R.

Условіе дѣйствительности корней ур-нія (1) выражается неравенствомъ

$$16R^2 - 3m^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad m^2 - \frac{16R^2}{3} \leqslant 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Корни этого неполнаго квадратнаго тринома суть: $\pm\frac{4R\sqrt{3}}{3}$, слѣд., чтобы удовлетворить неравенству (2), необходимо и достаточно дать m значеніе внутри интервалла

$$\text{между} \; -\frac{4R\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad +\frac{4R\sqrt{3}}{3};$$

но какъ въ данномъ вопросѣ m положительно, то необходимо и достаточно, чтобы было $m \leqslant \frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

Итакъ, нужно различать три случая:

$$m > \frac{4R\sqrt{3}}{3}, \qquad m = \frac{4R\sqrt{3}}{3}, \qquad m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

Первый случай. $m > \frac{4R\sqrt{3}}{3}$. Корни ур-нія (1) будутъ мнимые: задача невозможна.

Второй случай. $m = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$. Ур. (1) имѣетъ корни дѣйствительные равные; общая величина ихъ $= \frac{4}{3}R$: она положительна и $< 2R$, слѣд. задача имѣетъ 1 рѣшеніе. Заключаемъ, что длина m діагонали не м. б. $> \frac{4R\sqrt{3}}{3}$, но можетъ достичь этого предѣла, который и есть ея *maximum*, и что прямоугольникъ, имѣющій діагональ maximum, получается проведеніемъ хорды CD въ разстояніи $AJ = \frac{4}{3}R$ отъ точки A.

Третій случай. $m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$. Въ этомъ случаѣ ур. (1) имѣетъ корни дѣйствительные неравные. Но чтобы корень ур-нія (1) отвѣчалъ на геометрич. вопросъ, нужно чтобы онъ былъ положителенъ и не больше 2R.

Но дѣйствительные корни ур-нія (1) оба положительны, ибо ихъ произведеніе $\frac{m^2}{3}$ и сумма $\frac{8R}{3}$ положительны. А чтобы они оба были меньше 2R, необходимо и достаточно, чтобы: 1) триномъ $3x^2 - 8Rx + m^2$, по замѣнѣ въ немъ x количествомъ 2R, имѣлъ знакъ одинаковый съ коэффиціентомъ при x^2, т. е. былъ бы положителенъ; и 2) чтобы сумма корней ур. (1) была меньше 4R.

Второе условіе удовлетворено, ибо сумма корней $= \frac{8}{3}R$.

Итакъ, чтобы задача имѣла *два* рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы $12R^2 - 16R^2 + m^2 \geqslant 0$, или $m^2 - 4R^2 \geqslant 0$, или $(m + 2R)(m - 2R) \geqslant 0$, а какъ $m > 0$, то необходимо и достаточно, чтобы было

$$m \geqslant 2R.$$

Но мы имѣемъ условіе: $m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$; слѣд. нужно сравнить 2R съ $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$, что-

бы убѣдиться, совмѣстны-ли эти условія. Но легко видѣть, что $\frac{4R\sqrt{3}}{3} > 2R$: а потому разбираемый случай подраздѣляется на три новыхъ:

$$m > 2R, \quad m = 2R, \quad m < 2R.$$

I. $2R < m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$: корни ур-нія дѣйствительны, положительны и меньше 2R, слѣд. задача имѣетъ *два рѣшенія*:

$$x' = \frac{4R + \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}, \qquad x'' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3},$$

дающія двѣ точки на AB, равноотстоящія отъ I, ибо $\frac{x' + x''}{2} = AI$.

II. $m = 2R$: неравенство $m \gtrless 2R$ становится равенствомъ, и слѣд. 2R есть коренъ ур-нія (1); другой корень $= \frac{8}{3}R - 2R = \frac{2}{3}R$. Оба рѣшенія удовлетворяютъ задачѣ: одна искомая хорда касательна въ точкѣ B; другая проходитъ черезъ точку H, симметричную точкѣ I относительно центра.

III. $m < 2R$, неравенство $m \geqslant 2R$ не удовлетворяется, и триномъ (1) становится отрицательнымъ по замѣнѣ x количествомъ 2R. Это значитъ, что одинъ корень $< 2R$, другой $> 2R$. Меньшій корень одинъ удовлетворяетъ вопросу и задача имѣетъ 1 рѣшеніе:

$$x = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}.$$

Резюме изслѣдованія.

$m > \frac{4R\sqrt{3}}{3}$;		корни мнимые.	0 рѣшеній
$m = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$;		$x' = x'' = \frac{4R}{3}$, maximum (m).	1 рѣшеніе
$m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$	$m > 2R$:	x' и x'' дѣйств., полож., и $< 2R$.	2 рѣшенія
	$m = 2R$:	$x' = 2R$, $x'' = \frac{2}{3}R$.	2 рѣшенія
	$m < 2R$:	$x' < 2R$, $x'' > 2R$	1 рѣшеніе.

627. Прямое изслѣдованіе длины діагонали. — Ур. (1) даетъ

$$m^2 = -3x^2 + 8Rx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Вторая часть есть квадратный триномъ, измѣненія котораго мы изучать умѣемъ. Намъ нужно прослѣдить его измѣненія, когда x возрастаетъ отъ 0 до 2R, и затѣмъ взять отъ полученныхъ величинъ ариѳметич. квадратный корень. Для изслѣдованія удобнѣе m^2 написать въ видѣ:

$$m^2 = -3\left[x^2 - \frac{8}{3}Rx\right], \text{ или } m^2 = -3\left[\left(x - \frac{4}{3}R\right)^2 - \frac{16}{9}R^2\right].$$

Отсюда видно, что когда x возрастаетъ отъ нуля до $\frac{4}{3}R$, количество m^2 возрастаетъ отъ нуля до $\frac{16}{3}R^2$; затѣмъ, когда x увеличивается отъ $\frac{4}{3}R$ до 2R, m^2 уменьшается до $4R^2$. Итакъ, имѣемъ таблицу измѣненій:

x	$0\ldots<\ldots\frac{2}{3}R\ldots<\ldots\frac{4}{3}R\ldots<\ldots 2R$
m^2	$0\ldots<\ldots 4R^2\ldots<\ldots\frac{16}{3}R^2\ldots>\ldots 4R^2$
m	$0\ldots<\ldots 2R\ldots<\ldots\frac{4R\sqrt{3}}{3}\ldots>\ldots 2R$

Отсюда непосредственно видно, что когда хорда MN перемѣщается отъ A до B, длина діагонали MQ возрастаетъ до того момента, когда MN проходитъ черезъ I, для которой $AI=\frac{4}{3}R$. Затѣмъ длина діагонали уменьшается до 2R, когда хорда движется къ B.

Діагональ принимаетъ одинъ разъ всякую длину, содержащуюся между 0 и 2R, когда точка S перемѣщается отъ A къ H; напротивъ она принимаетъ два раза всякую величину, содержащуюся между 2R и $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$: одинъ разъ, когда точка S перемѣщается отъ H къ I, и другой разъ, когда точка S пробѣгаетъ отрѣзокъ IB; эти два положенія хорды симметричны относительно DC, ибо триномъ m^2 беретъ равныя величины при $x=\frac{4}{3}R\pm y$. Такимъ образомъ, находимъ всѣ результаты прежняго изслѣдованія.

Чтобы графически представить измѣненія m при измѣненіи x отъ 0 до 2R, откладываемъ x на оси Ox, а соотвѣтствующія значенія m на оси OY, Напр. взявъ

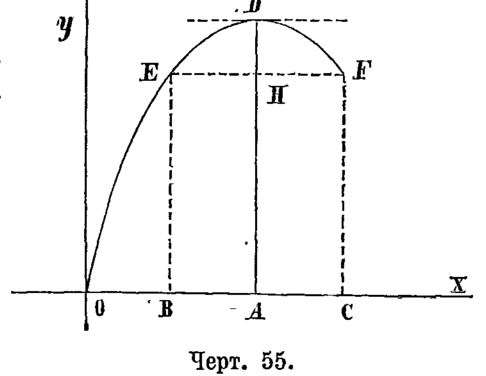
$$OA=\frac{4}{3}R \quad \text{и} \quad AB=AC=\frac{2}{3}R,$$

наносимъ на ординатѣ точки A

$$AD=\frac{4R\sqrt{3}}{3},$$

на ординатахъ точекъ B и C:

$$BE=CF=2R.$$



Черт. 55.

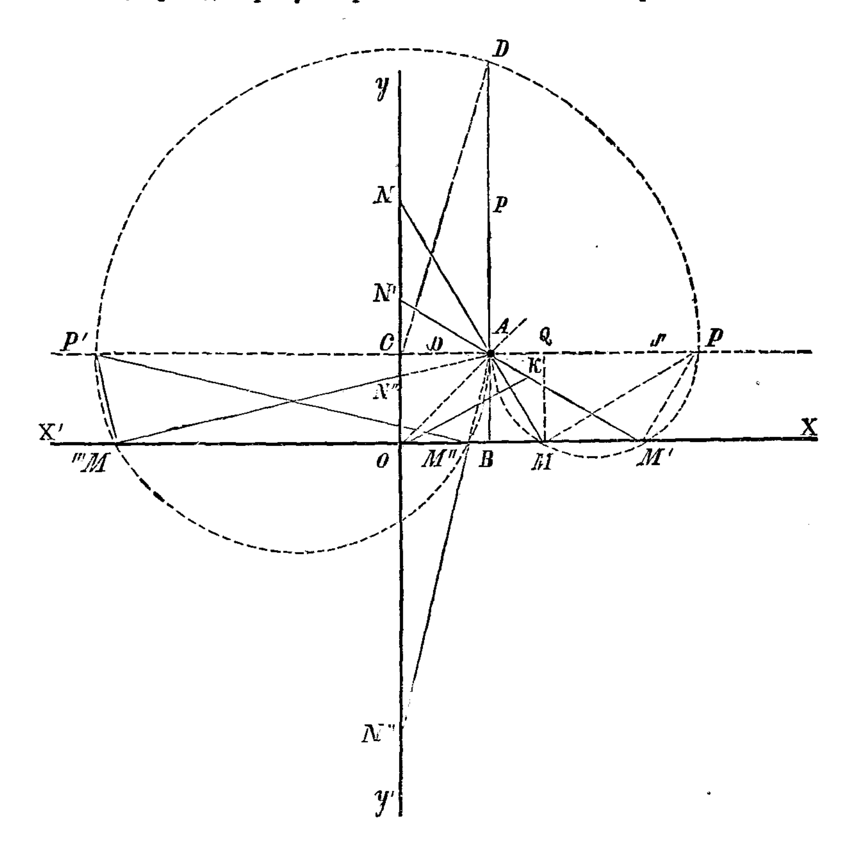
Такимъ образомъ получимъ дугу OEDF элипса, ординаты которой и представляютъ измѣненія діагонали m, соотвѣтствующія измѣненіямъ x отъ 0 до 2R.

Задача XVIII.

628. Задача Паппуса. *Дана точка A на биссектриссѣ прямого угла, составляемаго линіями XX′ и YY′; провести черезъ эту точку прямую линію такъ, чтобы отрѣзокъ ея въ одномъ изъ четырехъ угловъ имѣлъ данную длину* p.

Приводимъ эту задачу какъ поучительный образецъ, выясняющій значеніе выбора неизвѣстныхъ. Нерѣдко выборъ неизвѣстныхъ является дѣломъ существенной важности: отъ него зависитъ полученіе ур-ній большей или меньшей сложности. Иной выборъ можетъ повести къ ур-нію биквадратному, иной—къ квадратному, наконецъ — къ полному ур-нію четвертой степени. Какъ скоро взятое неизвѣстное приводитъ къ ур-нію сложному, нужно попытаться взять за неизвѣстное другую величину, чтобы убѣдиться, не приведетъ-ли новый выборъ неизвѣстнаго къ менѣе сложному ур-нію.

629. Первый способъ. Легко видѣть, что если задача имѣетъ рѣшеніе MN въ углѣ XOY, то будетъ имѣть и другое M'N', симметричное съ первымъ по отношенію къ OA. Затѣмъ, задача всегда имѣетъ рѣшеніе въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY'; въ самомъ дѣлѣ, проведя прямую черезъ точки: A и O и поворачивая ее около точки



Черт. 56.

A, въ углѣ YOX', затѣмъ въ XOY', видимъ, что ея отрѣзокъ въ каждомъ изъ этихъ угловъ будетъ измѣняться отъ 0 до ∞.

Итакъ, при всякой величинѣ линіи p задача необходимо имѣетъ 2 рѣшенія—по одному въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY'; къ этимъ двумъ рѣшеніямъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, могутъ прибавиться еще два; слѣд. задача можетъ имѣть 4 рѣшенія.

Слѣд., если за неизвѣстное примемъ такую величину, которой значенія, относящіяся къ четыремъ рѣшеніямъ, суть корни одного и того-же ур-нія, то получимъ ур. четвертой степени, рѣшеніе котораго въ общемъ видѣ намъ не извѣстно.

Напр., примемъ за неизвѣстное — разстояніе отъ точки O до одной изъ точекъ: M, M' M'', M'''; пусть $OM = x$. Обозначимъ длину равныхъ перпендикуляровъ AB и AC буквою a; треуг. MON даетъ: $x^2 + \overline{ON}^2 = p^2$; но изъ подобія треуг-въ MON и MBA имѣемъ: $ON : a = x : (x - a)$; отсюда ур-ніе:

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-a)^2} = p^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Освободивъ его отъ знаменателя и развернувъ, убѣдимся, что оно четвертой степени, полное и не возвратное. Въ немъ содержатся всѣ четыре рѣшенія.

Во-первыхъ очевидно, что для сѣкущей M'N' получимъ тоже самое ур. (1), принявъ $OM' = x$. Для сѣкущей AM''N'', принявъ $OM'' = x$, изъ треуг-въ OM''N'' и AM''B имѣемъ: $x^2 + \overline{ON''}^2 = p^2$ и $-ON'' : a = x : -(a-x)$, откуда $ON'' = ax : (a-x)$; внося эту величину въ предыдущее ур., получимъ опять ур. (1). Наконецъ, для сѣкущей AN'''M''', положивъ $OM''' = -x$, имѣемъ: $x^2 + \overline{ON'''}^2 = p^2$ и $ON''' : a = -x : (-x+a)$ или $ON''' : a = x : (x-a)$, слѣд. снова получаемъ ур. (1).

Итакъ, при сдѣланномъ выборѣ неизвѣстнаго мы не достигнемъ рѣшенія задачи.

630. Второй способъ. Взявъ за неизвѣстное BM, найдемъ, ур-ніе

$$(x+a)^2 + \frac{a^2(x+a)^2}{x^2} = p^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

которое выводится изъ (1) замѣною x количествомъ $x+a$; это ур. имѣетъ четыре корня: BM, BM', — BM'' — BM''', ибо ур. (1)—общее.

Хотя здѣсь мы опять получили полное биквадратное ур., тѣмъ не менѣе мы легко можемъ рѣшить его слѣдующимъ искусственнымъ пріемомъ. Ур. (2) можно написать въ видѣ

$$x^2 + 2ax + a^2 + a^2 + \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} = p^2, \text{ или } \left(x^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2, \text{ или}$$

$$\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2;$$

отсюда видно, что оно приводится къ рѣшенію двухъ ур-ній

$$x + \frac{a^2}{x} = y \quad \text{и} \quad y^2 + 2ay - p^2 = 0,$$

или

$$\begin{cases} x^2 - yx + a^2 = 0 \\ y^2 + 2ay - p^2 = 0 \end{cases} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Итакъ, этотъ искусственный пріемъ даетъ рѣшеніе задачи.

Посмотримъ, каково геометрическое значеніе вспомогательнаго неизвѣстнаго y. Проведя перпендикуляръ MQ на линію AZ, параллельную OX, и возставивъ къ MN перпендикуляръ MP, замѣчаемъ, что PQ есть третья пропорціональная къ MQ и $AQ = x$; слѣд.

$$AP = AQ + QP = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

Итакъ, вспомогательное неизвѣстное, соотвѣтствующее рѣшенію MAN, есть AP; точно также, для вспомогат. неизвѣстнаго y, соотвѣтствующаго рѣшенію N'''M''', получили-бы (— AP'), возставивъ перпендикуляръ M'''P' къ AM'''.

Ур-ніе въ y системы (3) есть квадратное, слѣд. необходимо, чтобы величины y, относящіяся къ четыремъ возможнымъ рѣшеніямъ задачи, были попарно равны; и въ самомъ дѣлѣ, проведя M'P, получимъ равные треугольники AMP и AM'P, ибо: AM' = AN по причинѣ симметричности относительно OA; затѣмъ треугольники ACN и MPQ равны, какъ имѣющіе стороны перпендикулярныя и по равной сходственной сторонѣ (AC = MQ), слѣд. MP = AM'; уголъ APM = PAM' ибо ихъ дополненія равны; итакъ, треугольники равны, имѣя по равному углу между порознь равными сторонами.

Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляры, возставленные въ M и M' къ прямымъ MN, M'N' проходятъ черезъ одну и туже точку P линіи AZ, и что тоже самое относится къ перпендикулярамъ, возставленнымъ въ M'' и M''' къ M''N'' и M'''N'''. Этимъ подтверждается вышеприведенное вычисленіе.

Для рѣшенія задачи достаточно знать точки P и P′, ибо окружности, описанныя на діаметрахъ AP и AP′, пересѣкаясь съ прямою XX′, дадутъ искомыя точки M,M′, M″, M‴.

Эти точки дало-бы намъ рѣшеніе системы (3).

Итакъ, AP и AP′ суть абсолютныя величины корней ур-нія

$$y^2 + 2ay - p^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изслѣдованіе. Корни этого ур-нія, какъ видно a'priori, дѣйствительные, неравные, по знаку противоположные.

I. Чтобы положительный корень y', который долженъ быть нанесенъ въ направленіи AZ, давалъ рѣшеніе задачи, необходимо, чтобы окружность діаметра AP встрѣчала прямую XX′. Но ея радіусъ $= \frac{y'}{2}$, а разстояніе центра отъ XX′ равно a; слѣд. необходимо, чтобы было $y' \gtrless 2a$; а чтобы это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (4), при подстановкѣ $2a$ вмѣсто y, принималъ отрицательное значеніе т. е. чтобы было

$$4a^2 + 4a^2 - p^2 \lesseqgtr 0, \quad \text{или} \quad p^2 - 8a^2 \gtrless 0.$$

Корни тринома $p^2 - 8a^2$ суть $\pm 2a\sqrt{2}$, а какъ p — существенно положительно, то неравенство удовлетворяется при

$$p \gtreqless 2a\sqrt{2}.$$

Первый случай: $p < 2a\sqrt{2}$.

Въ углѣ XOY нѣтъ рѣшенія.

Второй случай: $p = 2a\sqrt{2}$. Положительный корень ур. (4) равенъ въ этомъ случаѣ $2a$; сл. окружность діаметра AP касается OX, точки M и M′ сливаются: задача имѣетъ одно рѣшеніе въ углѣ XOY, и это рѣшеніе — перпендикуляръ къ OA. Въ этомъ, слѣд., положеніи отрѣзокъ MN въ углѣ XOY на прямой, проходящей черезъ A, имѣетъ *minimum* величины. Этотъ результатъ легко объяснить геометрически. Пусть MAN = min. и пусть M′N′ какая либо сѣкущая; очевидно, что AN′ < AN и AM′ > AM; а какъ AM = AN, то AM′ > AN′, слѣдов. средина линіи M′N′ ниже A, напр. въ K. Соединивъ O съ K, имѣемъ $OK = \frac{M'N'}{2}$; но $OA = \frac{MN}{2}$, и очевидно OA < OK, сл. 2OA или MN < 2OK или M′N′.

Третій случай: $p > 2a\sqrt{2}$. Окружность пересѣчетъ линію OX въ двухъ точкахъ, и задача имѣетъ въ углѣ XOY два рѣшенія.

II. — Во-вторыхъ, чтобы отрицательный корень y'', наносимый въ направленіи AP′, давалъ рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы окружность діаметра $(-y'')$ встрѣчала XX′, т. е. чтобы было: $-\frac{y''}{2} \gtrless a$, или $y'' \lesseqgtr -2a$; отсюда слѣдуетъ, что необходимо и достаточно, чтобы $(-2a)$ содержалось между корнями ур. (4), или чтобы, замѣнивъ y количествомъ $(-2a)$ въ триномѣ (4), получить отрицательный результатъ: $4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0$, что всегда удовлетворяется. Слѣд. задача имѣетъ одно рѣшеніе въ углѣ X′OY, и одно въ углѣ XOY′, что согласно съ выводами предварительнаго изученія задачи.

Резюме.

$p < 2a\sqrt{2}$ . . . . 2 рѣшенія (XOY′, X′OY).
$p = 2a\sqrt{2}$ . . . . 3 рѣшенія.
$p > 2a\sqrt{2}$ . . . . 4 рѣшенія.

Построеніе. — Сдѣлаемъ построеніе для случая четырехъ рѣшеній.

Ур. (4) даетъ:

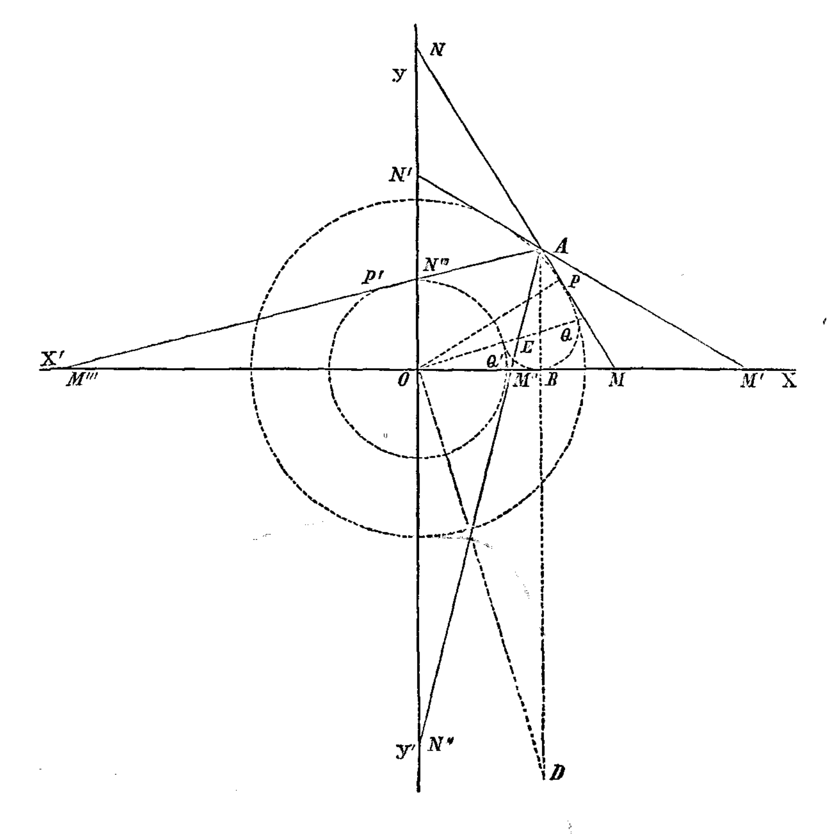
$$y' = \sqrt{a^2 + p^2} - a,$$
$$-y'' = \sqrt{a^2 + p^2} + a.$$

На параллели къ OY (черт. 56) наносимъ $AD = p$, откуда $CD = \sqrt{a^2 + p^2}$. Описавъ изъ C какъ изъ центра радіусомъ CD полуокружность, находимъ на PP′ точки P и P′, которыя и даютъ

$$AP = y', \quad AP' = -y''.$$

Описавъ на AP и AP′ полуокружности, получаемъ искомыя точки M, M′, M″ и M‴, которыми опредѣляются искомыя прямыя: MAN, M′AN′, AN″M″ и AM‴N‴. — Повѣрка — циркулемъ.

631. Третій способъ. — Такъ какъ рѣшенія задачи попарно симметричны относительно OA, то заключаемъ, что точка O находится въ равномъ разстояніи отъ



Черт. 57.

двухъ симетричныхъ рѣшеній. Слѣд. если за неизвѣстное принять разстояніе r точки О отъ этихъ двухъ рѣшеній, то ур. въ r будетъ не выше второй степени.

Итакъ, пусть будетъ $OP = r$ (черт. 57) радіусъ окружности центра О, касательной къ рѣшеніямъ въ углѣ XOY; обозначивъ буквами x и y вспомогательныя неизвѣстныя OM и ON, получимъ три ур-нія:

$$x^2 + y^2 = p^2; \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{x-a}; \quad pr = xy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Остается исключить изъ этихъ ур-ній x и y, чтобы получить ур. съ главнымъ неизвѣстнымъ r. Для этого второе ур. напишемъ въ видѣ: $xy = a(x + y)$; возвысивъ обѣ его части въ квадратъ: $(xy)^2 = a^2(x^2 + y^2 + 2xy)$ и замѣнивъ xy и $x^2 + y^2$ ихъ величинами изъ двухъ другихъ уравненій, получимъ:

$$p^2r^2 = a^2(p^2 + 2pr), \quad \text{или} \quad pr^2 - 2a^2r - pa^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Чтобы убѣдиться въ общности этого ур-нія, обозначимъ буквою r радіусъ OP′ окружности центра О, касательной къ рѣшеніямъ въ углахъ XOY′ и X′OY. Обозначивъ буквами x и y количества OM′, ON′, найдемъ 3 ур-нія:

$$x^2 + y^2 = p^2, \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{x+a}, \quad pr = xy.$$

Второе напишемъ въ видѣ $xy = a(x - y)$, и преобразованіями, подобными вышеприведеннымъ, придемъ къ ур-нію

$$pr^2 + 2a^2r - pa^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Это ур. отличается отъ (6) перемѣною r на $(-r)$; слѣд. абсолютная величина отрицательнаго корня ур-нія (6), представляетъ радіусъ, дающій рѣшенія въ углахъ XOY′ и X′OY.

Изслѣдованіе.—Итакъ, разсмотримъ, при какомъ условіи корни ур-нія (6) дадутъ искомыя рѣшенія.

Необходимо и достаточно, чтобы эти корни были дѣйствительны, а ихъ абсолютная величина не превышала $OA = a\sqrt{2}$; ибо необходимо, чтобы изъ точки А можно было провести касательную къ окружности, имѣющей радіусомъ абсолютную величину того или другаго корня. Но ур. (6) имѣетъ корни дѣйствительные, неравные и противоположные по знаку; сл., что касается положительнаго корня, то если онъ не больше $a\sqrt{2}$, то и дастъ искомое рѣшеніе; значитъ, если замѣнить r количествомъ $a\sqrt{2}$ въ триномѣ (6), результатъ замѣны не долженъ быть отрицательнымъ, т. е. должно быть

$$2pa^2 - 2a^3\sqrt{2} - pa^2 \geqq 0, \quad \text{или} \quad p \geqq 2a\sqrt{2}.$$

Отсюда: 1) если $p < 2a\sqrt{2}$, задача не имѣетъ рѣшеній въ углѣ XOY. 2) Если $p = 2a\sqrt{2}$, точка А будетъ находиться на окружности центра О и радіуса, равнаго положит. корню; слѣд. будетъ только одна касательная; это рѣшеніе, перпендикуляръ къ OA, есть положеніе прямой MN, при которомъ отрѣзокъ въ углѣ XOY есть *minimum*. 3) Наконецъ, если $p > 2a\sqrt{2}$, точка А будетъ находиться внѣ окружности; существуютъ двѣ различныя касательныя, выходящія изъ этой точки, и слѣд. два рѣшенія въ углѣ XOY.

Чтобы отрицательному корню r'' соотвѣтствовали рѣшенія задачи, необходимо и достаточно, чтобы абсолютная величина $(-r'')$ не превышала $a\sqrt{2}$, т. е.

$$r'' \geqq -a\sqrt{2},$$

иными словами, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (6) не былъ отрицательнымъ при замѣнѣ r количествомъ $-a\sqrt{2}$, что даетъ

$$2pa^2+2a^3\sqrt{2}-pa^2 \gtrless 0, \quad \text{или} \quad pa^2+2a^3\sqrt{2} \gtrless 0.$$

Но p и a положительны, слѣд. это неравенство всегда вѣрно, т. е. всегда есть по одному рѣшенію въ каждомъ изъ угловъ XOY′ и X′OY.

Построеніе. — Уравненіе даетъ

$$r=\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4+p^2a^2}}{p}=\frac{a^2}{p} \pm \sqrt{\frac{a^4}{p^2}+a^2};$$

слѣд. нужно построить радіусы:

$$r'=\sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2+a^2}+\frac{a^2}{p}; \qquad -r''=\sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2+a^2}-\frac{a^2}{p}.$$

Наносимъ на продолженіи AB (черт.) длину $BD=p$, проводимъ OD, и въ точкѣ O возставляемъ перпендикуляръ OE къ OD; очевидно, что

$$EB=\frac{a^2}{p},$$

ибо $OB=a$. Слѣд. $OE=\sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2+a^2}$; а потому, нанося $EQ=EQ'=EB$, имѣемъ: $r'=OQ$ и $-r''=OQ'$. Остается провести изъ точки A касательныя къ окружностямъ центра O, проходящимъ черезъ точки Q и Q′.

631. Четвертый способъ. — Можно принять за вспомогательное неизвѣстное сумму $OM+ON$; къ этому выбору приводитъ замѣчаніе, что для двухъ положеній сѣкущей MN и M′N′ величина этого неизвѣстнаго одинакова, ибо треуг-ки OMN, OM′N′ равны. Слѣд. для четырехъ положеній сѣкущей получится только два корня; и мы должны придти къ ур-нію второй степени.

Итакъ, пусть

$$OM+ON=x \;\ldots\ldots\; (1), \quad \text{затѣмъ:} \quad OM^2+ON^2=p^2 \;\ldots\ldots\; (2)$$

Кромѣ того: $\frac{OM}{ON}=\frac{a}{ON-a}$, откуда $\frac{OM+ON}{OM}=\frac{ON}{a}$, а потому

$$OM \times ON=(OM+ON)\,.\,a, \quad \text{или} \quad OM\,.\,ON=ax \;\ldots\ldots\; (3)$$

Удвоивъ обѣ части (3) и придавъ ко (2), найдемъ въ первой части x^2, а ур-ніе будетъ: $x^2=p^2+2ax$, или

$$x^2-2ax-p^2=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

Такое же ур-ніе получили бы, взявъ за неизвѣстное $OM'+ON'$.

Легко видѣть, что это ур-ніе пригодно и для двухъ другихъ положеній сѣкущей, только x тогда будетъ выражать разности $ON'''-OM'''$ и $OM''-ON''$.

Какъ скоро x будетъ найдено, останется найти разность отрѣзковъ $ON-OM$; для этого удвоиваемъ (3) и результатъ вычитаемъ изъ (2); получимъ

$$ON-OM=\sqrt{p^2-2ax}; \quad \text{откуда} \quad p^2>2ax.$$

Найдя x, вносимъ его величину въ разность $ON-OM$, которая такимъ образомъ и будетъ извѣстна; а какъ извѣстна и сумма отрѣзковъ, то будетъ извѣстенъ и каждый изъ нихъ.

Изслѣдованіе. Нужно, чтобы разность эта была дѣйствительна. При отрицательномъ корнѣ ур-нія (4) это и будетъ безусловно; и въ самомъ дѣлѣ, отрицательный корень соотвѣтствуетъ случаю сѣкущей, проведенной или въ углѣ YOX′ или въ XOY′.

Итакъ, изслѣдованію подлежитъ только положительный корень; онъ долженъ быть $< \frac{p^2}{2a}$, слѣд. $\frac{p^2}{2a}$ должно заключаться внѣ корней (4), а для этого результатъ подстановки этого количества въ триномъ (4) долженъ быть положителенъ:

$$\frac{p^4}{4a^2} - 2a \cdot \frac{p^2}{2a} - p^2 > 0, \text{ или } p^4 - 8a^2p^2 > 0, \text{ откуда } p > 2a\sqrt{2}:$$

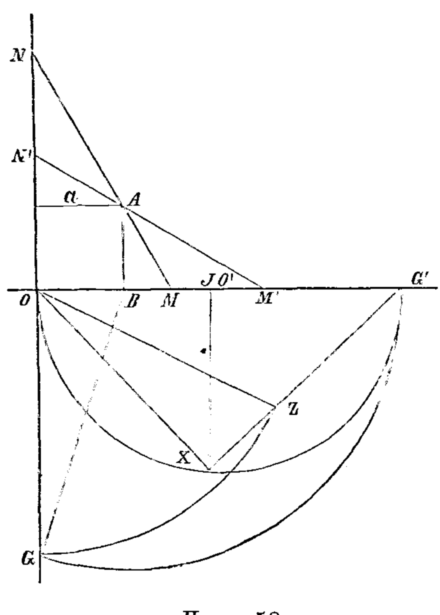
условіе, раньше найденное. Отсюда min $p. = 2a\sqrt{2}$.

Построеніе. Рѣшивъ ур-ніе (4), найдемъ

$$x' = a + \sqrt{a^2 + p^2}, \quad x'' = \sqrt{a^2 + p^2} - a.$$

Пусть $OG = p$, то $BG = \sqrt{a^2 + p^2}$; нанеся BG на Ox, получимъ:

$$OG' = a + \sqrt{a^2 + p^2} = x'. \quad \text{Слѣд.} \quad OM - ON = \sqrt{p^2 - 2ax'} = \sqrt{p^2 - 2a \cdot OG'}.$$



Черт. 58.

Взявъ BI=OB, на OG′ описываемъ полуокружность и проводимъ перпендикуляръ IX, тогда $OX = \sqrt{2ax'}$. Слѣд. нанеся OG на OZ:

$$ZX = \sqrt{OZ^2 - OX^2}, \quad ZX = \sqrt{p^2 - 2a \cdot OG'} = OM - ON.$$

Но $OM + ON = x' = OG'$; слѣд. если отъ средины O′ линіи OG′ отложить въ обѣ стороны равныя длины $O'M = O'M' = \frac{ZX}{2}$, найдемъ обѣ точки M и M′, опредѣляющія искомыя прямыя MAN и M′AN′.

Для отриц. корня построенія аналогичны этимъ.

632. Пятый способъ. Можно принять за неизвѣстное разность линій $OM - ON = x$. Для другаго положенія сѣкущей, второй корень будетъ $OM' - ON'$, или $ON - OM$; онъ равенъ первому, но противоположенъ по знаку. Также и два остальные корня равны и противоположны по знаку; слѣд. корни попарно равны и противоположны по знаку, а потому этимъ способомъ должны придти къ биквадратному ур-нію.

Имѣемъ: $OM - ON = x$ (1), $OM^2 + ON^2 = p^2$ (2), и $OM \times ON = a(OM + ON)$ (3); отсюда: $2OM \times ON = 2a(OM + ON)$ и $OM^2 + ON^2 - 2OM \times ON = p^2 - 2a(OM + ON)$, слѣд. $x^2 = p^2 - 2a(OM + ON)$, откуда $OM + ON = \frac{p^2 - x^2}{2a}$. Зная же, что $OM - ON = x$, имѣемъ

$$OM = \frac{p^2 - x^2}{4a} + \frac{x}{2}, \qquad ON = \frac{p^2 - x^2}{4a} - \frac{x}{2}.$$

Внеся эти величины въ ур. (2), получимъ

$$(p^2 + 2ax - x^2)^2 + (p^2 - 2ax - x^2)^2 = 16a^2p^2,$$

или, раскрывъ скобки и приведя въ порядокъ:

$$x^4 + 2(2a^2 - p^2)x^2 + p^2(p^2 - 8a^2) = 0.$$

Чтобы корни x^2 этого ур-нія были дѣйствительны, необходимо, чтобы было: $(2a^2-p^2)^2-p^2(p^2-8a^2)>0$, или $4a^4-4a^2p^2+p^4-p^4+8a^2p^2>0$, или $4a^4+4a^2p^2>0$, что всегда удовлетворено.

Чтобы оба они были положительны, необходимо, чтобы произведеніе и сумма ихъ были положительны. Произведеніе будетъ положительно при $p^2>8a^2$, или при

$$p>2a\sqrt{2}.$$

Но при этомъ условіи будетъ $p>2a$, слѣд. $2a^2-p^2$ будетъ <0, а потому сумма корней будетъ >0, и оба корня — положительны. Итакъ, единственное условіе возможности задачи будетъ: $p \geqslant 2a\sqrt{2}$, т. е. чтобы данная линія была не меньше удвоенной линіи АО.

Рѣшивъ ур., найдемъ:

$$x=\pm\sqrt{p^2-2a^2\pm 2p\sqrt{a^2+p^2}};$$

выраженіе это легко построить; а имѣя x, нетрудно уже найти OM и ON.

633. Шестой способъ. Если за вспомогательное неизвѣстное принять произведеніе отрѣзковъ OM × ON, то какъ для двухъ положеній сѣкущей произведеніе это имѣетъ одну и туже величину, для четырехъ ея положеній получимъ два значенія для произведенія; поэтому, ур. съ неизвѣстнымъ x, равнымъ произведенію отрѣзковъ, должно быть квадратнымъ.

Положивъ $OM \times ON = x$, имѣемъ еще два ур-нія:

$$OM^2+ON^2=p^2 \quad \text{и} \quad OM\times ON=a(OM+ON), \quad \text{или} \quad x=a(OM+ON).$$

Возвысивъ послѣднее ур. въ квадратъ, имѣемъ

$$x^2=a^2(p^2+2x), \text{ откуда } x^2-2a^2x-a^2p^2=0.$$

Какъ скоро x найдено, MO и NO получимъ изъ биквадратнаго ур-нія

$$X^4-p^2X^2+x^2=0.$$

Корни этого ур-нія будутъ дѣйствительны при условіи $p^4-4x^2>0$, или $(p^2+2x)(p^2-2x)>0$; отсюда видно, что при $x>0$, необходимо, чтобы было $x<\frac{p^2}{2}$. Замѣняя x количествомъ $\frac{p^2}{2}$ въ ур-ніи въ x, должны имѣть: $\frac{p^4}{4}-a^2p^2-a^2p^2>0$, или $p^2>8a^2$, откуда $p>2a\sqrt{2}$ — условіе извѣстное. $x<0$ должно давать $x>-\frac{p^2}{2}$, т. е. $-\frac{p^2}{2}$ должно быть внѣ корней ур-нія въ x, и потому должно быть $\frac{p^4}{4}+a^2m^2-a^2m^2>0$, что всегда имѣетъ мѣсто. Итакъ, единственное условіе есть

$$p>2a\sqrt{2}.$$

Какъ скоро оно удовлетворено, оба значенія x^2 будутъ положительны, а потому всѣ четыре значенія X дѣйствительны.

Впрочемъ, какъ скоро найденъ x, то вмѣсто рѣшенія биквадратнаго ур-нія, дающаго отрѣзки OM и ON, стоитъ только замѣтить, что въ тр-кѣ OMN извѣстна гипотенуза p и площадь, равная $\frac{OM\times ON}{2}$ или $\frac{x}{2}$.

634. Седьмой способъ. Если за неизвѣстное принять отношеніе $\frac{OM}{ON}$ отрѣзковъ, то очевидно должно получиться возвратное ур. четвертой степени; ибо для положенія

M'N' сѣкущей второй корень есть $\frac{OM'}{ON'}$ или $\frac{ON}{OM}$, т. е. онъ обратенъ первому корню; тоже самое имѣетъ мѣсто и для двухъ другихъ корней. Для составленія ур-нія стоитъ только исключить OM и ON изъ трехъ уравненій

$\frac{OM}{ON}=x$ . . . (1) $OM^2+ON^2=p^2$ . . . (2) и $\frac{OM}{ON}=\frac{OM-a}{a}$, или $ax=OM-a$,

откуда $$OM=a(x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Изъ перваго ур-нія имѣемъ $\frac{OM^2}{ON^2}=\frac{x^2}{1}$; отсюда $\frac{OM^2+ON^2}{OM^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$, или

$\frac{p^2}{OM^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$, или $\frac{p^2}{a^2(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$, или $p^2x^2-a^2(x^2+1)(x+1)^2=0$, или

$$a^2x^4+2a^2x^3+(2a^2-p^2)x^2+2a^2x+a^2=0.$$

Положивъ $x+\frac{1}{x}=y$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, и раздѣливъ все ур. на x^2, находимъ

$$a^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2a^2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a^2-p^2=0, \text{ или } a^2y^2+2a^2y-p^2=0$$

$$\text{и } x^2-xy+1=0.$$

Изъ ур-нія въ y найдемъ два значенія для y: y' и $-y''$, которыя поочередно вносимъ въ послѣднее ур-ніе. Но чтобы для x получились величины дѣйствительныя, нужно, чтобы абсолютная величина y была больше 2; и сл. замѣна y числами 2 и -2 должна давать отрицательные результаты; т. е.

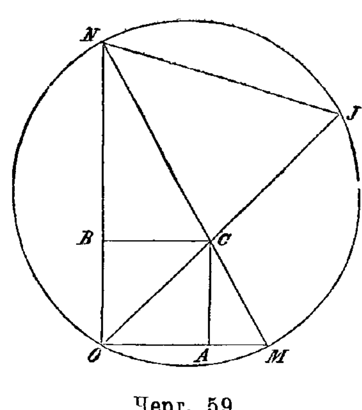
$$4a^2+4a^2-p^2<0, \text{ или } p>2a\sqrt{2}$$

$$\text{и } 4a^2-4a^2-p^2<0, \text{ или } -p^2<0,$$

что приводится къ одному условію: $p>2a\sqrt{2}$, уже извѣстному.

Когда это условіе не выполнено, когда p содержится между $2a\sqrt{2}$ и 0, годится только отрицательное значеніе y, которому отвѣчаютъ два отрицательныя значенія x: сѣкущая проходитъ въ углахъ xOy' и $x'Oy'$.

635. Опуская тригонометрическія рѣшенія вопроса, дадимъ въ заключеніе рѣшеніе задачи чисто геометрическое.



Черт. 59.

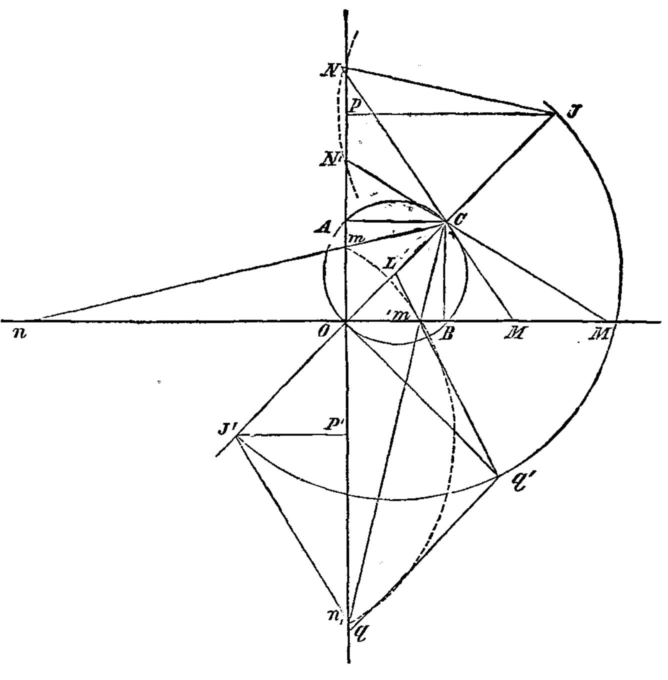
1. Пусть задача рѣшена, и MN—требуемая сѣкущая. Опишемъ около треуг-ка MON кругъ, въ которомъ NM будетъ діаметромъ. Продолживъ OC до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ I, соединимъ I съ N; тр-ка NIC, ONI подобны, ибо имѣютъ общій уголъ NIO и сверхъ того $INC=IOM=NOI$ (ибо $BOC=COA$); сл. сходственныя стороны даютъ пропорцію $OI:IN=IN:IC$, откуда $OI\times IC=IN^2$. Здѣсь IN^2 извѣстно, ибо точка I находится въ срединѣ дуги NM, именно IN есть сторона вписаннаго квадрата въ кругѣ, которагора діусъ$=\frac{MN}{2}=\frac{p}{2}$, сл. $NI=\frac{p\sqrt{2}}{2}=\frac{p}{\sqrt{2}}$; сверхъ того $IO-IC=OC=a\sqrt{2}$; слѣд. задача приводится къ построенію прямоугольника по даннымъ: площади $\frac{p^2}{2}$ и разности измѣреній $a\sqrt{2}$.

Для рѣшенія задачи описываемъ кругъ около квадрата OACB, беремъ $Oq = p$, проводимъ въ точкѣ O касательную къ кругу и изъ точки q опускаемъ на нее перпендикуляръ qq'; тогда $Oq' = \frac{p}{\sqrt{2}}$, ибо $q'q^2 = Oq'^2$. Центръ L круга соединяемъ съ q' и линію Lq' наносимъ на LI; тогда $OI \times OI' = Oq'^2 = \frac{p^2}{2}$; но $OI' = IC$, слѣд.

$$OI \times IC = \frac{p^2}{2}.$$

Затѣмъ изъ точки I какъ изъ центра радіусомъ Oq' описываемъ дугу круга, которая пересѣчетъ ось y въ точкахъ N и N'. Искомыя сѣкущія будутъ: NCM и N'CM'. Въ самомъ дѣлѣ, проведя NI, имѣемъ

$$Oq'^2 = NI^2 = IO \times IC;$$



Черт. 60.

слѣд. треуг-ки NIC, NIO подобны, имѣя по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами; слѣд. $CNI = NOI = IOM = 45^0$; но въ треуг. NIM уголъ $NMI =$ также 45^0; а какъ $ONM + OMN = d$, откуда $NI = IM$, слѣд. четыреугольникъ NIOM—вписуемый; но $NOM = d$, сл. $NIM = d$, и какъ $INM = 45^0$, то $NM^2 = 2IN^2$. Но $IN^2 = Oq'^2 = \frac{p^2}{2}$, сл. $NM^2 = p^2$ и $MN = p$.

Изслѣдованіе. — Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы кругъ, описанный изъ точки J какъ изъ центра, пересѣкалъ ось y; сл. необходимо, чтобы

$$IN > IP, \quad \text{или} \quad \frac{p}{\sqrt{2}} > \frac{IO}{\sqrt{2}},$$

ибо IPO есть прямоугольный равнобедренный тр-къ, такъ-какъ $POI = 45^0$; отсюда: $p > IO$.

Но $IO = OL + IL = \frac{a\sqrt{2}}{2} + Lq' = \frac{a}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{p^2}{2}}$, откуда $p > \frac{a\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{p^2}{2}}$, или $p\sqrt{2} - a > \sqrt{a^2 + p^2}$, или $2p^2 > 2ap\sqrt{2} + p^2$,

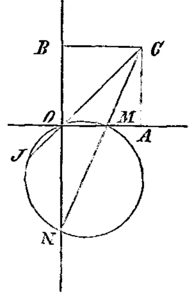
или

$$p > 2a\sqrt{2},$$

условіе извѣстное.

При $p = 2a\sqrt{2}$, кругъ, описанный изъ центра I, касателенъ къ оси y; тогда $IP = \frac{p}{\sqrt{2}}$, сл. $IO = p = 2a\sqrt{2}$, и какъ $OC = a\sqrt{2}$, то $IC = OC$. Слѣд. если провести PC, PC будетъ перпендикулярна къ OI, и сѣкущая будетъ *minima*.

2. Возьмемъ другое положеніе сѣкущей, напр. MN въ углѣ xoy'; описавъ окружность около треуг. OMN и продоливъ CO до пересѣченія въ точкѣ I съ окружностью, замѣчаемъ, что уголъ ION=45°, слѣд. дуга IN=90°, а потому хорда IN есть сторона вписаннаго квадрата; и потому



Черт. 61.

$$\mathrm{IN}=\frac{\mathrm{MN}}{\sqrt{2}}=\frac{p}{\sqrt{2}}$$

Треугольники CIN, ION подобны, ибо уголъ I общій, и сверхъ того $\mathrm{ION}=45^0=\mathrm{INC}$; откуда $\mathrm{CI}:\mathrm{IN}=\mathrm{IN}:\mathrm{OI}$ и $\mathrm{CI}\times\mathrm{IO}=\mathrm{IN}^2=\frac{p^2}{2}$; кромѣ того: $\mathrm{IC}-\mathrm{IO}=\mathrm{OC}=a\sqrt{2}$; слѣд. задача приводится къ построенію прямоугольника по площади и разности измѣреній. Отсюда: тоже самое построеніе, какое указано выше, съ тою разницею, что нанесеніе должно быть сдѣлано на діагональ OC съ другой стороны точки C. Итакъ, сдѣлавъ это построеніе, наносимъ $\mathrm{L}q'$ на линію LO въ LI′, затѣмъ изъ точки I′ какъ изъ центра радіусомъ $\frac{p}{\sqrt{2}}=\mathrm{IN}=\mathrm{L}q'$ опишемъ дугу, которая пересѣчетъ ось y въ m и n'. Проведя Cnm и $Cn'm'$, получимъ двѣ сѣкущія, отвѣчающія вопросу.

Для доказательства соединяемъ точки I′ и n'; по построенію: $\mathrm{I'N'}^2=\mathrm{I'O}\times\mathrm{I'C}$ или $\frac{p^2}{2}=\mathrm{I'O}\times\mathrm{I'C}$ или $\frac{\mathrm{I'O}}{p\sqrt{2}}=\frac{\frac{p}{\sqrt{2}}}{\mathrm{I'C}}$; слѣд. треуг-ники $\mathrm{I'O}n'$ и $\mathrm{I'C}n'$, какъ имѣющіе по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами, подобны; откуда $\mathrm{I'}n'\mathrm{C}=\mathrm{I'O}n'=45^0$. Но четыреугольникъ $\mathrm{I'O}m'n'$ вписуемый, ибо углы $\mathrm{I'}n'\mathrm{C}$ $\mathrm{I'O}m'$ дополнительны до 180°. Но уголъ $n'\mathrm{O}m'=d$, сл. и уголъ $n'\mathrm{I'}m'=d$; а какъ $\mathrm{I'}n'm'=45^0$, сл. треугольникъ—прямоугольный равнобедренный, а потому

$$n'm'=\mathrm{I'}n'\sqrt{2}=p.$$

Изслѣдованіе. — Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы $\mathrm{I'}n'$ или $\frac{p}{\sqrt{2}}$ было больше перпендикуляра IP′. Но $\mathrm{I'}n'=\mathrm{I'P'}\sqrt{2}=\mathrm{I'L}-\mathrm{OL}=\mathrm{L}q'-\frac{a\sqrt{2}}{2}=-\frac{a\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{a^2+p^2}{2}}$; сл. должно быть $p>-\frac{a\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{a^2+p^2}{2}}$, или $p\sqrt{2}>-a+\sqrt{a^2+p^2}$, $p\sqrt{2}+a>\sqrt{a^2+p^2}$, или $2p^2+2ap\sqrt{2}+a^2>a^2+p^2$, $p^2+2ap\sqrt{2}>0$, условіе, всегда выполненное; и потому въ разсматриваемомъ случаѣ задача всегда возможна.

Задача XIX.

636. *Въ окружности радіуса* R *берутъ секторъ, котораго уголъ* $=45^0$; *требуется въ этомъ секторѣ помѣстить прямоугольникъ* MNPQ (двѣ вершины котораго находились бы на одномъ радіусѣ, а изъ двухъ остальныхъ одна на другомъ радіусѣ, а другая на дугѣ сектора) *такъ, чтобы діагональ* MP *имѣла данную длину* m.

Примемъ за неизвѣстное длину $\mathrm{OP}=x$; треугольникъ MOP даетъ

$$m^2=\mathrm{R}^2+x^2-2x\,.\,\mathrm{OQ}.$$

Но изъ треугольника OQM, замѣчая, что $MQ = OP$, имѣемъ: $OQ = \sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x\sqrt{R^2 - x^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

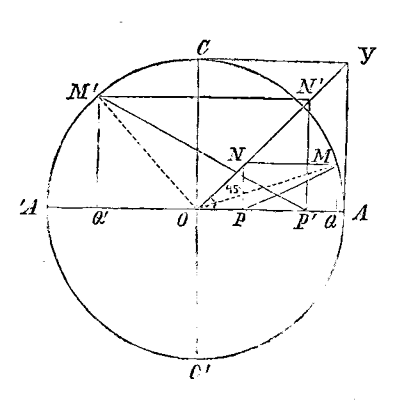
Это ур. останется въ томъ же видѣ, пока точка M будетъ находиться на дугѣ AC, ибо уголъ POM будетъ острый.

Если точка M будетъ находиться на дугѣ CA′, причемъ прямоугольникъ будетъ, напр., MN′P′Q′, найдемъ, опять полагая $OP' = x$, ур-ніе

$$m^2 = R^2 + x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2}. \quad . \; . \; . \quad (2)$$

отличное отъ (1).

Затѣмъ, безполезно брать точки на полуокружности A′C′A, потому-что, очевидно, найдемъ рѣшенія симметричныя, относительно O, рѣшеніямъ уже полученнымъ.



Черт. 62.

Итакъ, задача рѣшается двумя ирраціональными ур-ми

$$\pm 2x\sqrt{R^2 - x^2} = x^2 + R^2 - m^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

гдѣ $x > 0$, или цѣлымъ ур-мъ:

$$4x^2(R^2 - x^2) = (x^2 + R^2 - m^2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3'),$$

или

$$5x^4 - 2(m^2 + R^2)x^2 + (m^2 - R^2)^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

изъ числа корней котораго надо брать только положительные и наносить ихъ въ направленіи OA.

Нѣкоторой точкѣ P, для которой OP есть корень ур. (4), соотвѣтствуютъ двѣ точки окружности, лежащія на одной и той же параллели къ AA′, если только $PN = x$ не больше R; изъ этихъ двухъ точекъ вопросу отвѣчаетъ та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 > 0, \quad \text{или} \quad x^2 > m^2 - R^2,$$

если она находится на дугѣ AC; или та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 < 0, \quad \text{или} \quad x^2 < m^2 - R^2,$$

если она находится на дугѣ A′C.

Изслѣдованіе. — Чтобы корни ур-нія (4) отвѣчали на задачу, необходимо и достаточно: 1) чтобы они были дѣйствительны; 2) положительны; 3) меньше R.

Кромѣ того, á priori видно, что какъ скоро корни будутъ дѣйствительны, они будутъ попарно равны и противоположны по знаку; сл. будутъ два положительныхъ корня, и очевидно, что они будутъ меньше R, ибо, удовлетворяя ур-нію (3′), дѣлаютъ разность $4x^2(R^2 - x^2)$ положительною. Итакъ, остается единственно условіе дѣйствительности.

Такъ какъ ур. (4) биквадратное, то для дѣйствительности его корней необходимо, чтобы значенія x^2 были дѣйствительны и положительны; но очевидно, что какъ скоро они дѣйствительны, то и положительны; сл. необходимо и достаточно, чтобы было

$$(m^2 + R^2)^2 - 5(m^2 - R^2)^2 \geq 0,$$

или

$$[m^2 + R^2 - (m^2 - R^2)\sqrt{5}][m^2 + R^2 + (m^2 - R^2)\sqrt{5}] \geq 0,$$

или

$$[(\sqrt{5} + 1)m^2 - (\sqrt{5} - 1)R^2][(\sqrt{5} - 1)m^2 - (\sqrt{5} + 1)R^2] \leq 0.$$

Раздѣляя первый множитель на $\sqrt{5}+1$, а второй на $\sqrt{5}-1$ и замѣчая, что

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

даемъ неравенству видъ:

$$\left\{m^2-\left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2\right\}\left\{m^2-\left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^2\right\} \lesseqgtr 0,$$

или, по разложеніи на множители первой степени:

$$\left[m+\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]\left[m-\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]\left[m+\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)\right]\left[m-\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)\right] \lesseqgtr 0.$$

Но первый и третій множители положительны, сл. д. б.

$$\left[m-\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]\left[m-\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)\right] \lesseqgtr 0,$$

откуда видно, что m должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \lesseqgtr m \lesseqgtr \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

При этихъ условіяхъ всѣ 4 корня ур. (4) будутъ дѣйствительны; сл. задача будетъ имѣть два рѣшенія въ полуокружности ACA′, и два симметричныя имъ рѣшенія въ другой полуокружности.

Остается показать положеніе прямоугольниковъ, отвѣчающихъ задачѣ.

Чтобы *оба положительныя значенія* x давали прямоугольники съ вершиною M на дугѣ AC, необходимо и достаточно, чтобы для каждаго изъ этихъ значеній было $x^2 > m^2 - R^2$; а для этого необходимо и достаточно:

1) Чтобы триномъ, составляющій первую часть (4) былъ положителенъ при замѣнѣ въ немъ x^2 разностью $(m^2 - R^2)$;

2) Чтобы полусумма корней не была меньше $(m^2 - R^2)$.

Первое изъ этихъ условій даетъ:

$$5(m^2-R^2)^2-2(m^2+R^2)(m^2-R^2)+(m^2-R^2) \geq 0,$$

или

$$(m^2-R^2)(m^2-2R^2) \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Второе условіе даетъ

$$\frac{m^2+R^2}{5} \geq m^2-R^2, \quad \text{или} \quad m^2 \lesseqgtr \frac{3R^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Отсюда, такъ какъ $\frac{3R^2}{2}$ содержится между R^2 и $2R^2$, слѣдуетъ, что: 1) если $m^2 < R^2$ или $m < R$, оба рѣшенія лежать на дугѣ AC; 2) если $R < m < R\sqrt{2}$, одно рѣшеніе находится на AC, другое на A′C; 3) если $m > R\sqrt{2}$, оба рѣшенія на дугѣ A′C.

Итакъ, максимумъ m, равный $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$ (т. е. сторона правильнаго вписаннаго звѣзднаго десятіугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина M лежитъ на дугѣ A′C; между тѣмъ какъ минимумъ m, равный $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ (сторона выпуклаго десятіугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина M находится на дугѣ AC.

Резюме изслѣдованія.

$m < \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, корни мнимые . . . . 0 рѣшеній.

$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, $x' = x'' = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, minimum($m$). . . . 1 рѣш. на дугѣ AC.

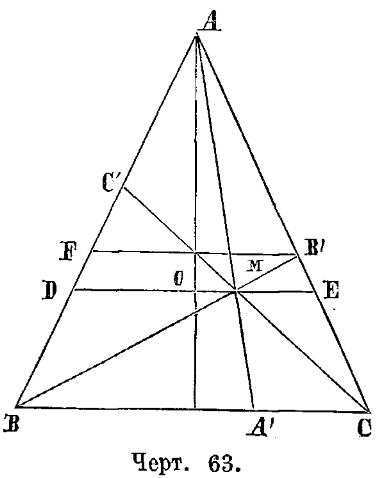
$$m > \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \begin{cases} m < \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \begin{cases} m < R \text{ . . . . 2 рѣш. на дугѣ AC.} \\ m = R : x' = 0,\ x'' = R\sqrt{\frac{2}{5}} \text{. . 2 рѣш. на дугѣ AC.} \\ m > R \begin{cases} m < R\sqrt{2} \text{. . . . . 1 рѣш. на AC, 1 рѣш. на A'C.} \\ m = R\sqrt{2} \text{. . точка C и 1 рѣш. на A'C.} \\ m > R\sqrt{2} \text{. . . . . 2 рѣш. на дугѣ A'C.} \end{cases} \end{cases} \\ m = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) : x' = x'' = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}},\ \text{max.}(m)\text{. 1 рѣш. на дугѣ A'C.} \\ m > \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \text{ : корни мнимые . . . . . . 0 рѣшеній.} \end{cases}$$

Задача XX.

638. *Данъ правильный $\triangle$ ABC и параллель DE къ его основанію. Если нѣкоторую точку M, взятую на этой параллели, соединить съ вершинами, то продолженія полученныхъ прямыхъ образуютъ на сторонахъ $\triangle$-ка шесть отрѣзковъ. Опредѣлить точку M такъ, чтобы произведеніе трехъ изъ этихъ отрѣзковъ, взятыхъ не послѣдовательно, имѣло данную величину.*

Рѣшеніе. Пусть (черт. 63) сторона даннаго $\triangle$-ка равна a, параллель DE $= b$. Примемъ за неизвѣстное — разстояніе OM $= x$ искомой точки отъ средины DE. По условію должны имѣть

$$BA' \times CB' \times AC' = K^3.$$



Черт. 63.

Выразимъ эти отрѣзки въ функціи данныхъ a и b и искомаго x. Изъ подобія тр-въ ABA' и ADM имѣемъ: BA' : DM = BA : DA,

откуда $BA' = DM . \frac{BA}{DA} = \left(x + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{a}{b}$ . . (1)

Для вычисленія B'C проводимъ B'F параллельно BC и, замѣтивъ, что BF = CB', изъ подобія тр-въ BDM и BB'F имѣемъ: BF : BD = B'F : DM,

или $$CB' : (a-b) = (a - B'C) : \left(\frac{b}{2} + x\right) = a : \left(a + x - \frac{b}{2}\right),$$

откуда $$B'C = \frac{a(a-b)}{a + x - \frac{b}{2}} \text{. . . . . (2)}$$

Затѣмъ, $AC' = a - BC'$. Подобные тр-ки DC'M и BCC' даютъ:

$$BC' : (BC' - BD) = BC : DM, \text{ или } BC' : (BC' - a + b) = a : \left(x + \frac{b}{2}\right), \text{ или}$$

$$BC' : (b - a) = a : \left(x + \frac{b}{2} - a\right); \text{ слѣд.}$$

$$AC' = a - \frac{a(b-a)}{x + \frac{b}{2} - a} = \frac{a\left(x - \frac{b}{2}\right)}{x + \frac{b}{2} - a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

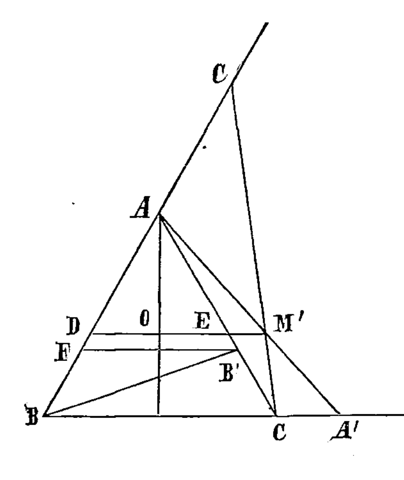
Итакъ, имѣемъ уравненіе

$$\frac{a}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right) \times \frac{a(a-b)}{a + x - \frac{b}{2}} \times \frac{a\left(x - \frac{b}{2}\right)}{x + \frac{b}{2} - a} = K^3 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Пусть искомая точка находится внѣ $\triangle$-ка въ M' (черт. 64), и пусть $OM' = y$. Тр-ки ABA' и ADM' даютъ: $BA' : DM' = BA : DA$, откуда $BA' = \left(y + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{a}{b}$ — выраженіе, совершенно сходное съ (1). Для вычисленія CB' проводимъ B'F параллельно BC; треуг-ки BB'F и BM'D даютъ: $BF : BD = FB' : DM'$, или $B'C : (a - b) = (a - B'C) : \left(y + \frac{b}{2}\right)$; слѣд. и для линіи B'C получится прежнее выраженіе. Наконецъ $AC' = BC' - a$. Подобные тр-ки C'BC и C'DM' даютъ $BC' : CD' = BC : DM'$; $BC' : (BC' - BD) = BC : DM'$; или

$$BC' : (BC' - a + b) = a : \left(y + \frac{b}{2}\right);$$

$$BC' : (b - a) = a : \left(y + \frac{b}{2} - a\right); \text{ слѣд.}$$



Черт. 64.

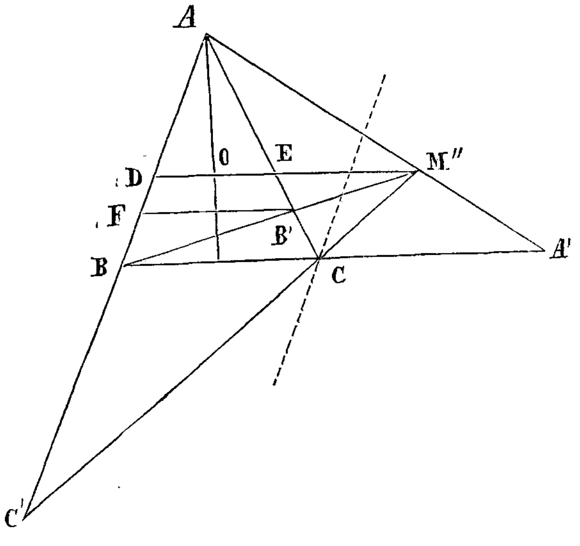
$$AC' = \frac{a(b-a)}{y + \frac{b}{2} - a} - a = \frac{a\left(\frac{b}{2} - y\right)}{y + \frac{b}{2} - a}.$$

Итакъ новое значеніе AC' отличается отъ прежняго знакомъ; слѣд. получимъ новое ур-ніе, которое можно представить въ видѣ $BA' . CB' . AC' = -K^3$, такъ что оно отличается отъ (4) перемѣною K^3 на $-K^3$.

Пусть точка M находится вправо отъ параллели прямой AB, проведенной черезъ точку C, напр. въ M'', и пусть $OM'' = z$, (черт. 65).

Прямо видимъ, что для BA' новаго не получится, разсматривая треугольники ABA' и $AM''D$.

Для CB', проведя $B'F$ параллельно BC, имѣемъ изъ тр-въ $B'BF$ и BDM'' : $BF : BD = FB' : DM''$, или $CB' : (a-b) = (a - CB') : \left(z + \frac{b}{2}\right)$, слѣд. никакой перемѣны нѣтъ.



Черт. 65.

Затѣмъ имѣемъ $AC' = a + C'B$; тр-ки $C'CB$ и $C'M''D$ даютъ: $C'B : C'D = BC : DM''$, или $C'B : (C'B + a - b) = a : \left(z + \frac{b}{2}\right)$, или $BC' : (a-b) = a : \left(z + \frac{b}{2} - a\right)$; слѣд.

$$AC' = a + \frac{a(a-b)}{z + \frac{b}{2} - a} = \frac{a\left(z - \frac{b}{2}\right)}{z + \frac{b}{2} - a}:$$ та же величина, какъ въ первомъ случаѣ.

Пусть теперь точка M находится влѣво отъ O, между O и D; пусть $OM_1 = x_1$. Тр-ки ABA' и ADM_1 даютъ (черт. 66):

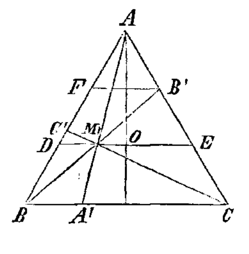
$$BA' : DM_1 = BA : DA, \text{ откуда } BA' = \left(\frac{b}{2} - x_1\right) \cdot \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Проведя черезъ точку B' прямую $B'F$ параллельно BC, имѣемъ:

$$BF : BD = FB' : DM', \; B'C : (a-b) = (a - B'C) : \left(\frac{b}{2} - x_1\right) = a : \left(a - \frac{b}{2} - x_1\right),$$

откуда
$$B'C = \frac{a(a-b)}{a - \frac{b}{2} - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Наконецъ, нетрудно вычислить и AC'. Легко видѣть, что мы найдемъ ур-ніе (4), въ которомъ x перемѣнено въ $-x$. Такимъ образомъ, мы умѣемъ истолковывать отрицательныя рѣшенія ур-нія (4).



Черт. 66.

Передвинемъ точку M еще лѣвѣе, въ M_2, и пусть $OM_2 = x_2$. Найдемъ (черт. 67):

$$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_2\right) \cdot \frac{a}{b}.$$

Для вычисленія CB' проводимъ черезъ точку B параллель къ линіи BC до встрѣчи съ продолженіемъ AB въ точкѣ F. $BF = B'C$. Тр-ки $BB'F$ и BDM_2 даютъ:

$$BF : BD = B'F : M_2D. \quad \text{Но } B'F = B'A = B'C - a; \text{ слѣд.}$$

$$B'C : (a-b) = (B'C - a) : \left(-\frac{b}{2} + x_2\right) = a : \left(a - \frac{b}{2} - x_2\right),$$

откуда
$$B'C = \frac{a(a-b)}{a - \frac{b}{2} - x_2}.$$

Затѣмъ $AC' = a - BC'$. Треуг-ки M_2DC' и BCC' даютъ:
$BC' : C'D = BC : M_2D$, или $BC' : (BD - BC') = BC : M_2D$,

или $\quad BC' : (a - b - BC') = a : \left(-\frac{b}{2} + x_2\right)$,

или $\quad BC' : (a-b) = a : \left(-\frac{b}{2} + x_2 + a\right)$, слѣд.

$$AC' = a - \frac{a(a-b)}{-\frac{b}{2} + x_2 + a} = \frac{a\left(x_2 + \frac{b}{2}\right)}{a + x_2 - \frac{b}{2}},$$

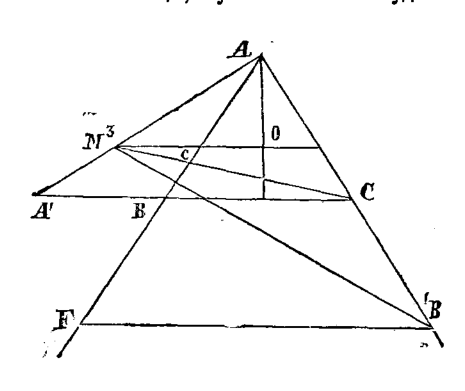
Черт. 67.

что можно представить въ видѣ $\dfrac{a\left(-x_2 - \frac{b}{2}\right)}{\frac{b}{2} - x_2 - a}$.

Слѣд. если перемѣнить x на $-x$, то AC' и $B'C$ получатъ тотъ же видъ, какъ въ первомъ случаѣ, но BA' получитъ противоположный знакъ.

Достаточно перемѣнить K^3 на $-K^3$, и мы можемъ принять отрицательныя рѣшенія ур-нія, такимъ образомъ составленнаго.

Наконецъ, пусть точка M будетъ еще лѣвѣе, въ M_3; пусть $OM_3 = x_3$ (черт. 68).



Черт. 68.

$$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_3\right) \cdot \frac{a}{b}.$$

Тр-ки $BB'F$ и M_3BD даютъ

$$BF : BD = B'F : M_3D,$$

или
$$\frac{CB'}{a-b} = \frac{a + CB'}{-\frac{b}{2} + x_3} = \frac{a}{\frac{b}{2} - a + x_3}.$$

Отсюда $CB' = \dfrac{a(a-b)}{\frac{b}{2} - a + x_3}$.

Наконецъ, треугольники $C'M_3D$ и BCC даютъ $\quad BC' : C'D = BC : M_3D$, или

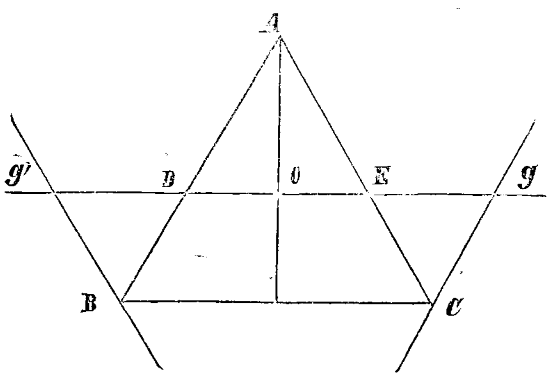
$BC' : (BD - BC') = BC : M_3D$, или $BC' : (a - b - BC') = a : \left(x_3 - \frac{b}{2}\right)$,

или $\quad BC' : (a-b) = a : \left(x_3 - \frac{b}{2} + a\right)$; слѣд. $AC' = a - \dfrac{a(a-b)}{x_3 - \frac{b}{2} + a} =$

$$\frac{a\left(x_3 + \frac{b}{2}\right)}{x_3 - \frac{b}{2} + a}.$$

Если перемѣнить x на $-x$, найдемъ ур-ніе (4), ибо двѣ линіи BA' и CB' перемѣнили знакъ, слѣд. произведеніе останется безъ перемѣны.

Итакъ, (черт. 69), проведя CG параллельно AB, и BG′, параллельно AC, заключаемъ, что когда M находится между O и E, или вправо отъ G, ея положеніе опредѣляется положительными рѣшеніями ур. (4); если M находится между O и D, или влѣво отъ G′—отрицат. рѣшеніями ур. (4); если M лежитъ между E и G, положит. рѣшеніями ур-нія, въ которомъ K^3 измѣнено въ $-K^3$, и отрицат. рѣшеніями этого ур-нія, если M находится между D и G_1.



Черт. 69.

Положивъ $K^3 = ma^3$, уничтожимъ множителя a^3, и приведя уравненіе въ цѣлый видъ, получимъ

$$4(b-a+mb)x^2-(b-a)(b^2-4mab)-mb^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

откуда
$$x=\pm\sqrt{\frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)}}\,.$$

639. Изслѣдованіе. — Чтобы одно изъ этихъ значеній x представляло отвѣтъ на вопросъ, нужно прежде всего, чтобы оно было дѣйствительно, а слѣд. чтобы подрадикальное количество было положительно; а какъ это послѣднее есть дробь, надо, чтобы оба члена ея имѣли одинаковый знакъ. Разсматривая эти члены какъ полиномы первой степени въ m, должно дать m значенія, лежащія внѣ корней этихъ полиномовъ. Корень числителя $m'=\frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$, корень знаменателя $m''=\frac{a-b}{b}$. Въ нашей задачѣ мы предположили $a>b$, слѣд. $2a-b>b$; а потому $m'<m''$. Итакъ, чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы было

$$m<\frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}, \quad \text{или} \quad m>\frac{a-b}{b}\cdot$$

Недостаточно, чтобы x было дѣйствительно; необходимо, чтобы (будетъ-ли $x>$ или <0) абсолютная величина была меньше $\frac{b}{2}$, или больше $a-\frac{b}{2}$. Итакъ, должно быть

$$x<\frac{b}{2}, \quad \text{или} \quad x>a-\frac{b}{2}\cdot$$

Подставивъ первое изъ этихъ значеній въ первую часть ур. (7), имѣемъ

$$b^2(b-a+mb)-(b-a)(b^2-4mab)mb^3, \quad \text{или} \quad +(b-a)\,.\,4mab.$$

Такъ какъ $b-a<0$, знакъ этого произведенія будетъ зависѣть только отъ знака m; въ данной задачѣ m м. б. только >0, слѣд. разсматриваемое произведеніе <0. Итакъ результатъ подстановки $\frac{b}{2}$ всегда отрицателенъ; но коэффиціентъ при x^2 имѣетъ перемѣнный знакъ, отсюда необходимость различать нѣсколько случаевъ, смотря по знаку выраженія $b-a+mb$.

1. Если $m<\frac{a-b}{b}$, $b-a+mb$ отрицательно; результатъ подстановки будетъ одинаковаго знака съ коэффиціентомъ при x^2, слѣд. $\frac{b}{2}$ внѣ корней, и какъ одинъ

изъ корней отрицателенъ, $\frac{b}{2}$ всегда больше обоихъ корней. Положительный корень удовлетворяетъ задачѣ; отрицательный—также, ибо онъ равенъ положительному, но по знаку противоположенъ. Такимъ образомъ, если $m < \frac{a-b}{b}$, задача имѣетъ два рѣшенія—положительное и отрицательное, если только $m < \frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$, какъ требуется для дѣйствительности корней.

2. Если $m > \frac{a-b}{b}$, результатъ подстановки отрицателенъ и слѣд. имѣетъ знакъ противоположный коэффиціенту при x^2, который положителенъ. Слѣд. $\frac{b}{2}$ заключается между корнями. Корень большій $\frac{b}{2}$ долженъ быть больше и разности $a - \frac{b}{2}$; посмотримъ, во что обращается первая часть ур-нія, если въ ней положить $x = a - \frac{b}{2}$.

Имѣемъ: $4\left(a - \frac{b}{2}\right)^2(b - a + mb) - (b-a)(b^2 - 4mab) - mb^3$; по упрощеніи получимъ: $8a^2b - 4ab^2 - 4a^3$, или $-4a(a-b)^2$. Такимъ образомъ, результатъ подстановки всегда отрицателенъ; а коэффиціентъ при x^2 положителенъ; слѣдовательно $a - \frac{b}{2}$ заключается между корнями. Поэтому, большій корень удовлетворяетъ задачѣ; меньшій—также, ибо онъ отъ перваго отличается только знакомъ.

Итакъ, задача имѣетъ всегда два рѣшенія, если только $m > 0$ и не содержится между $\frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$ и $\frac{a-b}{b}$.

Когда m отрицательно, мы имѣемъ уже иную задачу; ур-ніе дастъ два дѣйствит. корня, ибо m не заключается между m' и m''. Корни эти могутъ быть положительны или отрицательны; но они еще должны заключаться между $\frac{b}{2}$ и $a - \frac{b}{2}$, или $-\frac{b}{2}$ и $-\frac{b}{2} + a$.

Результатъ подстановки $\frac{b}{2}$ положителенъ, и какъ m всегда меньше $\frac{a-b}{2}$, коэф. при x^2 отрицателенъ. Слѣд. $\frac{b}{2}$ заключается между корнями. Если годенъ положительный корень, то годенъ будетъ и отрицательный.

Разсмотримъ, поэтому, положительный корень, который больше $\frac{b}{2}$; онъ д. б. $< a - \frac{b}{2}$.

Результатъ подстановки $a - \frac{b}{2}$ всегда отрицателенъ, слѣдоват. одного знака съ коэффиціентомъ при x^2; слѣд. $a - \frac{b}{2}$ —внѣ корней; и какъ одинъ изъ корней отрицателенъ, то $a - \frac{b}{2}$ больше обоихъ корней: оба корня даютъ отвѣтъ на задачу.

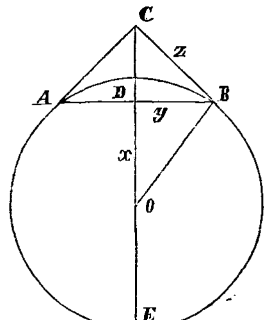
Слѣд., если $m > m'$: два рѣшенія внѣ треугольника; если $m < m''$, два рѣшенія: въ треуг-кѣ, при $m > 0$; внѣ треугольника, если $m < 0$; нѣтъ рѣшеній, если m заключается между m' и m''.

Задача XXI.

640. *Въ какомъ разстояніи отъ центра даннаго шара провести сѣкущую плоскость, чтобы боковая поверхность конуса* ABC, *описаннаго около шара по сѣченію, сложенная съ m разъ взятою поверхностью внѣшняго сегмента* AED, *равнялась данной поверхности* (m — число положительное).

Рѣшеніе. — Пусть радіусъ даннаго шара будетъ R; данная поверхность $2\pi a\mathrm{R}$; x, y, z — три неизвѣстныя линіи DO, DB, CB. По уничтоженіи общаго множителя 2π, имѣемъ, во-первыхъ, ур.

$$yz + 2m\mathrm{R}(x + \mathrm{R}) - 2a\mathrm{R} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



Черт. 70.

Проведя радіусъ OB, изъ прямоугольнаго треугольника ODB и изъ подобныхъ треугольниковъ ODB и CDB имѣемъ:

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 \quad \text{и} \quad xz = \mathrm{R}y,$$

откуда: $$z = \frac{\mathrm{R}y}{x}, \quad yz = \frac{\mathrm{R}y^2}{x} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R}^2 - x^2)}{x}.$$

Замѣнивъ въ ур-іи (1) yz послѣднимъ выраженіемъ, найдемъ ур-ніе

$$(2m - 1)x^2 - 2(a - m\mathrm{R})x + \mathrm{R}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

изъ котораго

$$x = \frac{a - m\mathrm{R} \pm \sqrt{(a - m\mathrm{R})^2 - (2m - 1)\mathrm{R}^2}}{2m - 1}.$$

Изслѣдованіе. — Чтобы предложенная задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы x было дѣйствительно, положительно и не больше R. Прежде всего очевидно, что корни ур-нія (2) будутъ дѣйствительны, если $2m - 1 \leq 0$. Итакъ, должно различать 3 случая: $m < \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $m > \frac{1}{2}$.

1 случай. — $m < \frac{1}{2}$.

Корни ур-нія (2) дѣйствительны, одинъ положителенъ, другой отрицателенъ. Откидывая отрицательный корень, замѣчаемъ, что задача можетъ имѣть только одно рѣшеніе, и чтобы оно существовало, нужно еще, чтобы x было меньше R. Это будетъ имѣть мѣсто, когда результатъ подстановки буквы R вмѣсто x въ 1-ую часть ур. (2) будетъ имѣть тотъ же знакъ, какъ первый членъ, т. е. отрицательный; ибо отрицательная величина x необходимо меньше R. Результатъ подстановки есть $2\mathrm{R}(2m\mathrm{R} - a)$; слѣд. должны имѣть $a \geqq 2m\mathrm{R}$ или $2\pi\mathrm{R}a \geqq 4m\pi\mathrm{R}^2$.

Такимъ образомъ, когда данная поверхность будетъ меньше m разъ взятой поверхности шара, задача будетъ невозможна, когда же данная поверхность равна или больше m разъ взятой поверхности шара, задача имѣетъ всегда рѣшеніе, и только одно. Итакъ, если S есть данная поверхность, можно написать слѣдующую таблицу.

$$m < \frac{1}{2} \begin{cases} \mathrm{S} < 4m\pi\mathrm{R}^2 & . \ . \ . \ . \quad 0 \text{ рѣшеній.} \\ \mathrm{S} = 4m\pi\mathrm{R}^2 & . \ . \ . \ . \quad 1 \text{ рѣшеніе.} \\ \mathrm{S} > 4m\pi\mathrm{R}^2 & . \ . \ . \ . \quad 1 \quad \text{„} \end{cases}$$

2 случай. — $m = \frac{1}{2}$.

Ур-ніе (2) приводится къ первой степени и даетъ:

$$x = \frac{R^2}{2a - R};$$

выразивъ, что величина x должна быть равна или меньше R, найдемъ: $a \gtrless R$, или $2\pi Ra \gtrless 2\pi R^2$: это тоже самое условіе, что и въ предыдущемъ случаѣ, если примемъ во вниманіе, что $m = \frac{1}{2}$; слѣд., заключенія остаются тѣ-же.

3 случай. — $m > \frac{1}{2}$.

Въ виду того, что произведеніе корней ур-нія (2) больше, равно или меньше R^2, смотря по тому, будетъ-ли m меньше, равно или большее 1, мы должны настоящій случай подраздѣлить на три другихъ.

1. — $\frac{1}{2} < m < 1$.

Во-первыхъ, чтобы x было дѣйствительно, должно быть

$$a < (m - \sqrt{2m-1})R \ldots (3), \quad \text{или} \quad a > (m + \sqrt{2m-1})R \ldots (4).$$

Когда то или другое изъ этихъ условій выполнено, корни дѣйствительны и имѣютъ одинаковый знакъ. Но еслибы мы взяли первое неравенство, a было бы меньше mR и оба значенія x были бы отрицательны: слѣд. нужно взять второе неравенство. При этомъ a будетъ больше mR, и оба значенія x положительны. Кромѣ того, замѣчая, что $m < 1$, находимъ, что произведеніе значеній x больше R^2, и что слѣд, корни ур-нія (2) могутъ быть заразъ меньшими R: слѣд. задача не можетъ имѣть болѣе одного рѣшенія. Притомъ, чтобы это рѣшеніе существовало, необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки R на мѣсто x въ первую часть ур-нія (2), т. е. $2R(2mR - a)$ былъ отрицателенъ или нуль. Такимъ образомъ, должно быть

$$a \gtrless 2mR \quad \text{или} \quad 2\pi Ra \gtrless 4m\pi R^2;$$

этого условія достаточно, ибо оно влечетъ за собою и неравенство (4). Заключенія тѣже, что и въ двухъ первыхъ случаяхъ.

2. — $m = 1$. Заключеніе тоже самое.

3. — $m > 1$. Какъ скоро условіе (4) удовлетворено, оба значенія x дѣйствительны и положительны. Но или оба они будутъ меньше R, или одно будетъ меньше, а другое больше R, смотря потому, будетъ-ли a меньше или больше $2m$R. Такимъ образомъ, задача будетъ имѣть 2 рѣшенія, когда будетъ $a > (m + \sqrt{2m-1})R$ и $\leq 2mR$; и одно рѣшеніе, когда будетъ $a > 2mR$. Затѣмъ, задача будетъ имѣть одно рѣшеніе при $a = (m + \sqrt{2m-1})R$, и будетъ невозможна, когда $a < (m + \sqrt{2m-1})R$.

Если обозначить для краткости количество $m + \sqrt{2m-1}$ буквою p, то изслѣдованіе послѣдняго случая можно резюмировать такъ:

$$m > 1 \begin{cases} S < 2\pi pR^2 \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ рѣшеній.} \\ S = 2\pi pR^2 \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ рѣшеніе.} \\ 2\pi pR^2 < S \leq 4m\pi R^2 \ldots\ldots & 2 \text{ рѣшенія.} \\ S > 4m\pi R^2 \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ рѣшеніе.} \end{cases}$$

Результаты изслѣдованія показываютъ, что въ сущности имѣются только два различные случая: $m \leq 1$, $m > 1$.

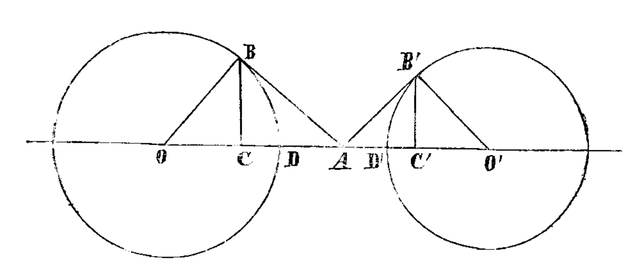
Задача XXII.

641. *Даны два шара, лежащія одинъ внѣ другаго:* 0 и 0'; *на линіи центровъ, между обоими шарами, найти такую точку* A, *чтобы два конуса, имѣющіе общую вершину въ этой точкѣ и касающіеся къ даннымъ шарамъ, заключали внутри себя два сегмента, сумма поверхностей которыхъ имѣла бы данную величину.*

Рѣшеніе. — Пусть будетъ r, r' и d — радіусы шаровъ и разстояніе центровъ; x и x' — разстоянія AO и AO'. Зная, что поверхность сферич. сегмента = произведенію окружности большаго круга на высоту сегмента, имѣемъ: пов. сегмента BCD = $2\pi r \,.\, CD$; но $CD = r - OC$, по свойству-же катета имѣемъ: $r^2 = OC \times x$,

откуда $OC = \frac{r^2}{x}$,

и $2\pi r \,.\, CD = 2\pi\left(r^2 - \frac{r^3}{x}\right)$.



Черт. 71.

Сумма поверхностей обоихъ сегментовъ выразится формулой $2\pi\left[r^2 + r'^2 - \left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x'}\right)\right]$. За данное можно принять $2\pi\left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x'}\right)$; изобразивъ его формулою $2\pi m^2$, и замѣнивъ x' равною величиною $d - x$, получимъ уравненіе

$$\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{d-x} = m^2, \quad \text{или} \quad m^2x^2 - (r^3 - r'^3 + dm^2)x + dr^3 = 0. \quad . \quad . \quad (1)$$

откуда

$$x = \frac{r^3 - r'^3 + dm^2 \mp \sqrt{(r^3 - r'^3 + dm^2)^2 - 4dm^2r^3}}{2m^2}.$$

Изслѣдованіе. — Количество x будетъ дѣйствительно, если

$$m^2 \leq \frac{(r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d} \quad . \quad . \quad . \quad (2), \quad \text{или} \quad m^2 > \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

а по ур-нію (1) заключаемъ, что оба корня будутъ и положительны.

Но чтобы величина x представляла рѣшеніе даннаго вопроса, нужно еще, чтобы она была $> r$, но $< d - r'$. Результаты подстановки количествъ r и $d - r'$ вмѣсто x въ первую часть ур. (1) суть:

$$r[dr^2 + r'^3 - r^3 - m^2(d - r)] \quad \text{и} \quad r'[dr'^2 + r^3 - r'^3 - m^2(d - r')];$$

поэтому главными значеніями m^2 будутъ количества

$$\frac{dr^2 + r'^3 - r^3}{d - r} \quad \text{и} \quad \frac{dr'^2 + r^3 - r'^3}{d - r'}.$$

Сверхъ того нужно сравнить съ r^2 и $(d - r')^2$ произведеніе корней $\frac{dr^3}{m^2}$, а это даетъ еще два главныя значенія m^2, именно dr и $\frac{dr^3}{(d - r')^2}$.

Положимъ

$$\frac{(r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d} = a, \quad \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} = b, \quad \frac{dr'^2 + r^3 - r'^3}{d - r'} = f,$$

$$\frac{dr^2 + r'^3 - r^3}{d - r} = g, \quad \frac{dr^3}{(d - r')^2} = c, \quad dr = h.$$

Во-первыхъ замѣчаемъ, что неравенство (2) должно отбросить, и слѣд. взять неравенство (3). Въ самомъ дѣлѣ, разности $f - a$ и $c - a$ положительны, ибо

$$f-a=\frac{(dr'-r'^2+\sqrt{rr'})^2}{d(d-r')},\quad \sqrt{c}-\sqrt{a}=\frac{r'\left(d\sqrt{r'}+r\sqrt{r}-r'\sqrt{r'}\right)}{\sqrt{d}\,(d-r')}.$$

Значитъ, еслибы количество m^2 было меньше a, то тѣмъ болѣе оно было бы меньше c и f, и слѣд. произведеніе обоихъ значеній x было бы больше $(d-r')^2$, въ то время какъ результатъ подстановки разности $d-r'$ на мѣсто x въ первую часть ур-нія (2) былъ бы положителенъ. Обѣ величины x были бы больше $d-r'$ и слѣд. должны бы быть отброшены.

Распредѣлимъ теперь въ возрастающемъ порядкѣ главныя величны b, f, c, g, h. Для этого вычислимъ сначала разности: $h-g$, $g-f$, $f-b$: находимъ

$$h-g=\frac{r(d-r)^2-r'^3}{d(d-r')},\quad f-b=\frac{(dr'-r'^2-r\sqrt{rr'})^2}{d(d-r')},$$

$$\frac{g-f}{r-r'}=\frac{(r+r')d^2-(2r^2+2r'^2+3rr')\,d+(r+r')(r^2+r'^2+rr')}{(d-r)(d-r')};$$

первыя двѣ разности очевидно положительны; положительна и третья. Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю ея числителя и рѣшая получаемое ур. относительно d, находимъ корни: $r+r'$ и $r+r'-\dfrac{rr'}{r+r'}$. Но какъ шары лежатъ одинъ внѣ другаго, то d больше большаго изъ корней $r+r'$, и слѣд. числитель дроби, а потому и $g-f$ положительны. Итакъ, доказано, что $b<f<g<h$.

Вычисляя затѣмъ разности $f-c$, $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, получаемъ:

$$f-c=\frac{r'[r'(d-r')^2-r^3]}{(d-r')^2},\quad \sqrt{b}-\sqrt{c}=\frac{r'\left(d\sqrt{r'}-r\sqrt{r}-r'\sqrt{r'}\right)}{(d-r')\sqrt{d}},$$

откуда видно, что обѣ разности будутъ положительны, или же обѣ отрицательны, смотря потому, будетъ-ли d больше или меньше $r'+r\sqrt{\dfrac{r}{r'}}$ Затѣмъ, три количества b, c и f составятъ одно, если d будетъ $=r'+r\sqrt{\dfrac{r}{r'}}$ Отсюда заключаемъ, что когда $d>r'+r\sqrt{\dfrac{r}{r'}}$, количество c будетъ $<b$, въ противномъ случаѣ будетъ $c>f$. Далѣе изслѣдованіе покажетъ, что когда $d<r'+r\sqrt{\dfrac{r}{r'}}$, то достаточно знать, что $c>f$, не фиксируя его мѣста относительно количествъ g и h. Изъ сказаннаго видно, что слѣдуетъ различать 3 случая, см. по тому, будетъ-ли d больше, равно, или меньше суммы $r'+r\sqrt{\dfrac{r}{r'}}$.

1 случай: $d>r'+r\sqrt{\dfrac{r}{r'}}$.

Главныя значенія m^2 идутъ возрастая въ порядкѣ: c, b, f, g, h. Будемъ увеличивать m^2 отъ его наименьшей величины до наибольшей, наблюдая, что случится при переходѣ перемѣннаго чрезъ одно изъ главныхъ его значеній.

1^0 $m^2<b$. Прежде всего видно, что нельзя давать m^2 значеній меньшихъ c, или содержащихся между c и b, ибо m^2 не м. б. $<b$ по причинѣ необходимаго неравенства (3).

2^0. $m^2 = b$. Получаемъ для x значеніе

$$x = \frac{dr\sqrt{r}}{r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'}};$$

и какъ въ настоящемъ случаѣ эта величина больше r и меньше $d-r'$, задача имѣетъ рѣшеніе и только одно.

3^0. $b < m^2 \leq f$. Такъ какъ m^2 больше b, оба значенія x дѣйствительны и положительны; но какъ m^2 меньше f и больше c, оба эти значенія меньше $d-r'$. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка вмѣсто x въ ур. (1) количества $d-r'$ даетъ результатъ положительный, а произведеніе корней ур нія меньше $(d-r')^2$. Такъ какъ m^2 также меньше g и h, то объясненіе, подобное предыдущему, покажетъ, что оба значенія x больше r. Итакъ, доказано, что когда m^2 содержится между b и f, задача имѣетъ два рѣшенія.

Когда $m^2 = f$, одинъ изъ корней равенъ $d-r'$, другой меньше $d-r'$, ибо $m^2 > c$ и слѣд. произведеніе корней меньше $(d-r')^2$: опять — два рѣшьнія.

4^0. $f < m^2 \leq g$. Такъ какъ m^2 больше f, результатъ подстановки $d-r'$ вмѣсто x въ 1-ую часть ур. (1) отрицателенъ: сл. одинъ корень больше $d-r'$, другой меньше. Но какъ m^2 меньше g и h, оба корня больше r; сл. рѣшеніе только одно. Когда $m^2 = g$, одинъ корень $= r$, другой $> r$; но вмѣстѣ съ этимъ меньшій корень $< d-r'$, между тѣмъ какъ другой больше; сл. опять задача имѣетъ только одно рѣшеніе.

5^0. $m^2 > g$. Въ этомъ случаѣ одно значеніе x больше r, другое меньше. Но какъ m^2 больше f, одно изъ значеній x меньше $d-r'$, а другое больше; итакъ, меньшій и большій корни, соотвѣтственно меньше r и $d-r'$, и больше r и $d-r'$. Задача невозможна.

Резюме изслѣдованія.

$$d > r' + r.\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

	$m^2 < b$;	$m^2 = b$;	$b < m^2 \leq f$;	$f < m^2 \leq g$;	$m^2 > g$.
Чис. рѣш.	0	1	2	1	0

2 случай: $d = r' + r.\sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Въ этомъ случаѣ c, b, f равны; и всегда $f < g < h$.

Имѣемъ слѣдующіе результаты:

1^0. $m^2 < f$. Такъ какъ $f = b$, задача невозможна.

2^0. $m^2 = f$. Когда $m^2 = f$, двойное значеніе $d-r'$ всегда возможно.

3^0. $f < m^2 \leq g$. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, задача имѣетъ рѣшеніе, и только одно.

4^0. $m^2 > g$. Задача невозможна.

Замѣчая, что при $f = b$ интервалла отъ b до f не существуетъ, видимъ, что результатъ изслѣдованія тотъ же, что и въ первомъ случаѣ.

3 случай: $d < r' + r.\sqrt{\frac{r}{r'}}$

Главныя значенія m^2, за исключеніемъ c, теперь возрастаютъ въ порядкѣ: b, f, g, h. Что касается c, достаточно знать, что теперь $c > f$. Будемъ измѣнять m^2, заставляя его проходить чрезъ главныя значенія b, f, g, h.

1^0. $m^2 < f$. Задача невозможна: въ самомъ дѣлѣ, m^2 меньше f и c, поэтому оба значенія x больше $d - r'$.

2^0. $m^2 = f$. Въ такомъ случаѣ одинъ изъ корней равенъ $d - r'$, другой больше: задача имѣетъ одно рѣшеніе.

3^0. $f < m^2 \leq g$. Одно изъ значеній x будетъ больше, другое меньше $d - r'$; и какъ въ то же время m^2 меньше g и h, оба значенія x больше r: слѣд. задача имѣетъ только одно рѣшеніе. Тоже самое будетъ, когда m^2 равно g, ибо одинъ изъ корней равенъ r, а другой больше $d - r'$.

4^0. $m^2 > g$. По той же причинѣ какъ и въ первомъ случаѣ задача невозможна.

Резюме изслѣдованія.

$$d < r' + r . \sqrt{\frac{r}{r'}}$$

	$m^2 < f$;	$m^2 = f$;	$f < m^2 \leq g$;	$m^2 > g$.
Чис. рѣш.	0	1	1	0

Такъ какъ сумма поверхностей сегментовъ измѣняется въ обратномъ смыслѣ измѣненіямъ m^2, то эта сумма имѣетъ maximum, соотвѣтствующій $m^2 = b$ въ первомъ случаѣ, и $m^2 = f$ въ третьемъ.

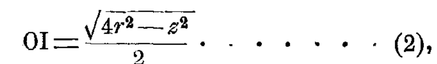
Задача XXIII.

642. *Въ данный шаръ радіуса r вписать усѣченный конусъ ABCD, имѣющій данныя: высоту h и объемъ $\frac{1}{3}\pi a^2 h$.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ x, y, z радіусы FB, AE основаній и апоѳема AB. Выражая, что объемъ тѣла $= \frac{1}{3}\pi a^2 h$, имѣемъ ур-ніе

$$x^2 + xy + y^2 = a^2 \quad \ldots \quad (1)$$

Проведя радіусъ OA, прямыя OI, AH, соотвѣтственно перпендикулярныя къ AB и FB, и параллель IL къ BF, изъ треугольниковъ AOI и AHB имѣемъ:



$$OI = \frac{\sqrt{4r^2 - z^2}}{2} \quad \ldots \quad (2),$$

$$(x - y)^2 = z^2 - h^2, \quad \ldots \quad (3)$$

а изъ подобія тр-въ OIL и ABH получаемъ

$$(x + y)^2 = \frac{h^2(4r^2 - z^2)}{z^2} \quad \ldots \quad (4)$$

Черт. 71.

Помноживъ ур. (1) на 4 и вычтя (3), имѣемъ

$$3(x + y)^2 = 4a^2 - z^2 + h^2.$$

Приравнивая величины $(x + y)^2$ изъ этого ур. и изъ (4), получ

$$z^4 - 4(a^2 + h^2)z^2 + 12h^2r^2 = 0. \quad \ldots \quad (5).$$

Отсюда
$$z = \sqrt{2(a^2 + h^2 \mp \sqrt{(a^2 + h^2)^2 - 3h^2r^2})}. \quad \ldots \quad (6).$$

Изслѣдованіе.

643. Анализъ. — Все дѣло, очевидно, въ вычисленіи z. Но недостаточно, чтобы величина z была дѣйствительною и положительною; нужно еще, чтобы она была не меньше h и не больше $2r$. Можно разсматривать усѣченные конусы обоего рода, къ которымъ, какъ легко убѣдиться, одинаково прилагаются ур-нія (1), (3) и (4), и слѣд. ур. (5). Значеніе z даетъ усѣченный конусъ 1-го или 2-го рода, смотря потому, меньше-ли оно или больше $\sqrt{2rh}$. Въ самомъ дѣлѣ, въ трапеціи ABCD произведеніе AB × AC стороны на діагональ равно $2rh$, а какъ изъ двухъ линій AB и AC меньшая есть первая или вторая, смотря потому, 1-го ли или 2-го рода отрѣзокъ конуса, то сторона z меньше $\sqrt{2rh}$ въ первомъ случаѣ и больше во второмъ. Если $z = \sqrt{2rh}$, отрѣзокъ дѣлается полнымъ конусомъ.

Зная это, находимъ во-первыхъ для дѣйствительности z условіе

$$a^2 \geqslant h(r\sqrt{3} - h). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

(Можно замѣтить, что когда h равно или больше $r\sqrt{3}$, условіе само собою удовлетворяется).

Какъ скоро неравенство (7) существуетъ, то, въ силу ур. (5), оба значенія z^2 дѣйствительны и положительны.

Затѣмъ, чтобы сравнить значенія z^2 съ h^2, $4r^2$ и $2rh$, подставляемъ поочередно эти три количества въ первую часть ур-нія (5), разсматривая ее какъ триномъ квадратный относительно z^2. Находимъ слѣдующіе результаты подстановокъ:

$$h^2(12r^2 - 4a^2 - 3h^2) \text{ для } h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$
$$4r^2(4r^2 - 4a^2 - h^2) \quad " \quad 4r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$
$$8rh(2rh - r^2 - a^2) \quad " \quad 2rh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Приравнивая нулю каждый изъ этихъ трехъ полиномовъ и рѣшая относительно a^2 получаемыя ур-нія, найдемъ слѣдующія главныя значенія для a^2:

$$\frac{3}{4}(4r^2 - h^2) = e, \qquad \frac{4r^2 - h^2}{4} = d, \qquad h(2r - h) = c.$$

Вторую часть неравенства (7) слѣдуетъ также разсматривать какъ главное значеніе a^2; полагаемъ

$$h(r\sqrt{3} - h) = b.$$

Такъ какъ произведеніе корней, по ур. (5), независитъ отъ a^2, то новыхъ главныхъ значеній не получимъ, сравнивая это произведеніе съ количествами h^4, $16r^4$ и $4r^2h^2$.

Теперь слѣдуетъ узнать, въ какомъ порядкѣ идутъ возрастая количества b, c, d, e. Во-первыхъ, очевидно, что $b < c$, и что $d < e$. Вычислимъ затѣмъ разности $d - b$, $e - c$, $d - c$.

Имѣемъ:

$$d - b = \frac{(h\sqrt{3} - 2r)^2}{4}; \qquad e - c = \frac{(2r - h)(6r - h)}{4}; \qquad d - c = \frac{(2r - 3h)(2r - h)}{4}.$$

Двѣ первыя разности всегда положительны; третья же — положительна, равна нулю, или отрицательна, см. пот. будетъ-ли h $<$, $=$, или $> \frac{2r}{3}$. Итакъ, видно,

что смотря по тому, будетъ-ли h меньше или больше $\frac{2r}{3}$, главныя значенія a^2 распредѣляется такъ: b, c, d, e; b, d, c, e.

Когда $h=\frac{2r}{3}$, c и d будутъ равны.

Замѣтимъ еще, что произведеніе обоихъ значеній z^2, т. е. $12h^2r^2$ всегда больше h^4 и $4h^2r^2$, слѣд. никогда не можетъ случиться, чтобы два значенія z были оба меньше h или $\sqrt{2rh}$. Но какъ произведеніе значеній z^2 меньше или больше $16r^4$, смотря по тому, меньше ли или больше h количества $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, это послѣднее количество слѣдуетъ также разсматривать, какъ главную величину количества h.

644. Синтезъ.—Изъ предыдущаго анализа видно, что изслѣдованіе распадается на такія три главные случая:

$$h \leq \frac{2r}{3}; \qquad \frac{2r}{3} < h \leq \frac{2r\sqrt{3}}{3}; \qquad h > \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Первый случай. $h \leq \frac{2r}{3}$.

Измѣненія a^2	Число рѣшеній.	
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 \leq c$	0	2
$c < a^2 \leq d$	1	1
$d < a^2 \leq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Рѣшеніями 1-го рода названъ усѣченный конусъ 1-го рода, рѣшеніями 2-го рода отрѣзокъ конуса 2-го рода. Главныя величины взяты въ порядкѣ: b, c, d, e; a^2 измѣняемъ съ b до e, проходя черезъ промежуточныя значенія c и d.

1⁰. $a^2 < b$. Обѣ величины z мнимы: задача невозможна.

2⁰. $a^2 = b$. Для z получаемъ формулу: $z=\sqrt{2rh\sqrt{3}}$. Эта величина больше h и $\sqrt{2rh}$, но меньше $2r$, ибо $h<\frac{2r}{3}$, а потому меньше и $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Слѣдов. имѣемъ усѣч. конусъ 2-го рода.

3⁰. $b < a^2 \leq c$. Количество a^2 меньше c, d, e; слѣд. полиномы (8), (9) и (10) положительны; и какъ h меньше $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, обѣ величины z меньше $2r$ и больше h и $\sqrt{2rh}$. Задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

Когда $a^2=c$, одна изъ величинъ z равна $\sqrt{2rh}$, и ей соотвѣтствуетъ цѣлый конусъ; вторая величина остается меньше $2r$, но больше h и $\sqrt{2rh}$: она даетъ отрѣзокъ 2-го рода. Такъ какъ полный конусъ можно разсматривать безразлично какъ отрѣзокъ 1-го или 2-го рода, то можно сказать, что и въ этомъ случаѣ задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

4⁰. $c < a^2 \leq d$. Такъ какъ a^2 становится больше c, полиномъ (10) отрицателенъ, и одна изъ величинъ z меньше $\sqrt{2rh}$, между тѣмъ какъ другая больше. Но оба эти значенія остаются, какъ и прежде, больше h, но меньше $2r$: имѣемъ одно рѣшеніе 1-го, и одно рѣшеніе 2-го рода.

Когда $a^2 = d$, одна изъ величинъ z становится равною $2r$, другая меньше $2r$; но онп всегда больше h, и одна больше $\sqrt{2rh}$, другая—меньше. Слѣд. опять имѣемъ отрѣзокъ 1-го рода, и отрѣзокъ 2-го рода, только этотъ послѣдній имѣемъ апоѳему$=2r$.

5⁰. $d < a^2 \leq e$. Такъ какъ $a^2 > d$, полиномъ (9) отрицателенъ, и одна изъ величинъ z меньше $2r$, другая—больше. Значеніе z, большее $2r$, отбрасываемъ, и какъ меньшее значеніе z меньше $\sqrt{2rh}$, а другое больше, имѣемъ только одно рѣшеніе: отрѣзокъ 1-го рода.

Когда $a^2 = e$, получаемъ цилиндръ высоты h.

6⁰. $a^2 < e$. Задача невозможна. Въ самомъ дѣлѣ, пока a^2 превосходитъ e, одно изъ значеній z меньше, а другое больше нежели h и $2r$. Поэтому, первое должно быть отброшено какъ меньшее h, а другое—какъ большее $2r$.

Когда $h = \frac{2}{3} r$ заключенія остаются тѣже, какъ и при $h < \frac{2}{3} r$. Только оба предѣла c и d дѣлаются равными, и потому интервалла между c и d въ таблицѣ изслѣдованія не будетъ.

Затѣмъ, безъ новыхъ объясненій, слѣдуютъ таблицы для двухъ послѣднихъ случаевъ: содержащіяся въ нихъ детали изслѣдованія найдемъ, слѣдуя пути, указанному въ первомъ случаѣ.

Второй случай: $\frac{2r}{3} < h \leq \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Измѣненія a^2.	Число рѣшеній.	
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 \leq d$	0	2
$d < a^2 \leq c$	0	1
$c < a^2 \leq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0.

Третій случай: $h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Измѣненія a^2.	Число рѣшеній.	
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < d$	0	0
$a^2 = d$	0	1
$d < a^2 \leq c$	0	1
$c < a^2 \leq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Сдѣлаемъ только слѣдующія замѣчанія:

Когда $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, d равно b, и во второй таблицѣ нужно только опустить интервалль отъ d до b.

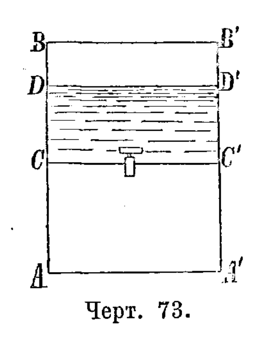
Что касается третьей таблицы, то нисшій предѣлъ a^2 равенъ d вмѣсто b. Но это значитъ, что какъ h больше $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ когда a^2 меньше d, то оба значенія z становятся больше $2r$.

Примѣчаніе. Такъ какъ maximum a^2 во всѣхъ случаяхъ равенъ e, то заключаемъ, что всѣ отрѣзки конуса данной высоты, вписанные въ шаръ, всегда меньше цилиндра той же высоты. Но minimum a^2 различенъ, смотря по тому, меньше ли h или больше нежели $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$: онъ равенъ b въ первомъ случаѣ, и d — во второмъ. Когда $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, d равно b, и оба minima сливаются въ одинъ.

645. Задачи.

Нижеслѣдующія задачи должны быть изслѣдованы вполнѣ, а maxima и minima, когда они встрѣчаются, должны быть указаны какъ простая деталь изслѣдованія.

1. Цилиндрическій сосудъ высоты l, плотно закрытый въ верхней части, содержитъ нѣкоторое количество жидкости, высота которой $= h$; воздухъ надъ жидкостью находится подъ давленіемъ атмосферы. Въ днѣ сосуда дѣлаютъ отверстіе на столько узкое, чтобы внѣшній воздухъ не проникалъ въ сосудъ; часть жидкости вытекаетъ. Спрашивается, какова будетъ высота жидкости въ сосудѣ, когда истеченіе прекратится?

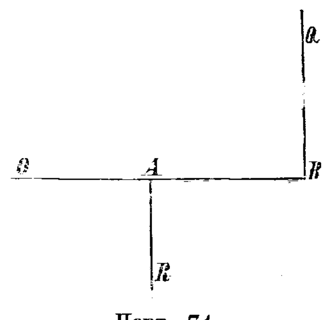


Черт. 73.

2. Цилиндрическій сосудъ ABA'B' раздѣленъ на двѣ части перегородкой CC', снабженной краномъ. Нижняя часть ACA'C', которой высота равна l, содержитъ воздухъ подъ атмосфернымъ давленіемъ H; въ верхней части находится колонна ртути CDC'D' высоты h и воздухъ подъ давленіемъ H. Открываютъ кранъ, причемъ ртуть начинаетъ вытекать въ нижнюю часть сосуда. Опредѣлить высоту колонны ртути, вытекшей изъ верхней части въ нижнюю, по окончаніи истеченія.

3. Камень, брошенный снизу вверхъ, ударяется въ преграду B, находящуюся на вертикалѣ; опредѣлить высоту AB, зная, что прошло t секундъ отъ момента, въ который наблюдатель, находящійся въ A, услыхалъ ударъ, до момента, въ который камень возвратился въ точку A.

4. На неопредѣленной прямой даны двѣ точки A и B, разстояніе между которыми равно 10 метрамъ. Два тѣла пробѣгаютъ эту прямую въ направленіи AB, и приходятъ одновременно, одно въ точку A со скоростью 3 метровъ въ секунду, другое въ точку B со скоростью v метр. въ секунду. Первое тѣло движется равномѣрно-ускореннымъ движеніемъ, причемъ скорость его возрастаетъ на 1 метръ въ секунду; движеніе втораго тѣла равномѣрно. Спрашивается: 1) Черезъ сколько секундъ послѣ одновременнаго прохода 1-го тѣла черезъ A, а 2-го черезъ B первое тѣло встрѣтится со вторымъ; 2) какому условію должна удовлетворять скорость v втораго тѣла, чтобы встрѣча имѣла мѣсто въ разстояніи отъ точки B, меньшемъ 10 метровъ; 3) въ какомъ разстояніи отъ точки B произойдетъ встрѣча, если $v = 4$ метрамъ?



Черт. 74.

5. Данъ прямолинейный горизонтальный рычагъ, котораго точка опоры O находится по одну сторону отъ точекъ приложенія силъ. Данная сила R приложена въ точкѣ A перпендикулярно къ AO; найти на продолженіи этой линіи такую точку B, что если приложить въ ней данную силу Q, параллельно и противоположно R, то чтобы рычагъ находился въ равновѣсіи. Предполагается, что точка B есть конецъ рычага, что рычагъ однороденъ, а вѣсъ единицы длины равенъ π.

6. Найти стороны прямоугольника, зная: 1) ихъ сумму a и сторону b равновеликаго квадрата; 2) ихъ разность d и сторону b равновеликаго квадрата; 3) діагональ d и периметръ $2p$; 4) діагональ d и сторону равновеликаго квадрата b.

7. Въ данный квадратъ вписать квадратъ данной площади m^2.

8. Въ $\triangle$ съ основаніемъ b и высотою h вписать прямоугольникъ данной площади k^2.

9. Данъ кругъ радіуса R и внѣ его точка A въ разстояніи d отъ центра. Провести черезъ точку A сѣкущую ABC такъ, чтобы ея внутренній отрѣзокъ BC равнялся: 1) радіусу; 2) данной линіи l.

10. Внутри даннаго прямоугольника ABCD, котораго измѣренія суть: $AB = a$, $AD = b$, провести къ сторонамъ BC, CD, параллели B'C', C'D' въ равномъ отъ сторонъ разстояніи, такъ чтобы прямоугольникъ A'B'C'D' составлялъ половину ABCD.

11. Въ правильномъ $\triangle$ ABC сторона $= a$; на основаніи BC въ разстояніи $= b$ отъ B дана точка F. Провести прямую DE параллельно BC такъ, чтобы отрѣзокъ ея DE въ углѣ A былъ видѣнъ изъ точки F подъ прямымъ угломъ.

12. Данъ прямоугольникъ OAPB (измѣренія: $OA = a$, $OB = b$); найти на OA и OB или на ихъ продолженіяхъ такія двѣ точки M и N, чтобы соединивъ ихъ съ вершиною P, противоположною A, получить правильный $\triangle$PMN.

13. На биссектриссѣ OP прямаго угла дана точка P въ разстояніи $OP = d$ отъ вершины. Найти на сторонахъ AO и BO такія точки M и N, чтобы, проведя PM, PN, получить прав. $\triangle$ PMN.

14. На сторонахъ CA, CB треугольника ABC взяты отрѣзки $CG = CF = d$ и проведена прямая FG. Требуется равнобедренный $\triangle$ CFG преобразовать въ другой $\triangle$ CED, ему равновеликій, прямою ED такъ, чтобы $AD = BD$.

15. Въ прямоугольникѣ ABCD провести прямую DM, встрѣчающую AB въ точкѣ M, такъ, чтобы: 1) $DM^2 + MB^2 = K^2$; 2) $DM^2 = AM.BM$.

16. На окружности полукруга діаметра AB дана точка P. Требуется провести черезъ эту точку прямую Px (пересѣкающую діаметръ въ точкѣ x) такъ, что если къ діаметру возставимъ перпендикуляръ xy (точка y на окр.), то чтобы $Px^2 - xy^2 = d^2$.

17. На діаметрѣ AB шара найти такой отрѣзокъ AI, что если черезъ точку I проведемъ плоскость CD, перпендикулярную къ діаметру, то: 1) чтобы поверхность сегмента CAD равнялась боковой пов. конуса CBD; 2) чтобы сумма поверхностей сегмента высоты AI и боковой поверхности конуса COD равнялась бы данному кругу πa^2; 3) чтобы отношеніе объема сегмента CAD къ объему сферич. сектора CODA равнялось данному числу m; 4) если черезъ центръ шара провесть плоскость EF перпендикулярно къ AB, то чтб. объемъ слоя, содержащагося между кругами CD и EF, относился къ объему усѣченнаго конуса, имѣющаго основаніями тѣже круги, какъ $m : 1$.

18. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC (A — прямой уг.) провести прямую DE параллельно AC такъ, чтобы поверхность, описанная ломаной CDE при обращеніи фигуры около AB, равнялась данному кругу πm^2.

19. Построить $\triangle$, зная сторону, прилежащій уголъ и отношеніе площади этого $\triangle$ къ площиди тр-ка, составляемаго двумя биссектриссами даннаго угла съ противоположною стороною.

20. Въ концѣ B діаметра AB проведена касательная; найти на ней такую точку C, что если соединимъ ее съ другимъ концомъ діаметра, то внѣшній отрѣзокъ CD имѣлъ бы данную длину a.

21. На гипотенузѣ даннаго прямоугольнаго △ найти такую точку, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ катетовъ равнялась m^2.

22. На сторонѣ AB прямоугольника ABCD найти такую точку E, изъ которой стороны AD и CD были бы видны подъ равными углами.

23. Въ данномъ △ ABC помѣстись прямую DE параллельно BC такъ, чтобы: 1) площадь △ BDE равнялась данному квадрату K^2; 2) $DE^2 = DB \times BC$.

24. Въ прямоугольникѣ ABCD измѣренія равны b и h. Провести черезъ вершину D прямую MDN, пересѣкающую линія AB и AC въ точкахъ N и M, такъ, чтобы: 1) △ MCD + △ DBN $= k.bh$, гдѣ k — данное число; 2) $DM^2 + DN^2 = k.bh$; 3) $DM \times DN = m^2$.

24. Данную прямую a дѣлятъ пополамъ и продолжаютъ. Найти длину продолженія подъ условіемъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій измѣреніями $\frac{a}{2}$ и сказанное продолженіе, былъ равновеликъ квадрату, построенному на продолженіи.

25. На гипотенузѣ BC прямоугольнаго △ найти такую точку M, что если соединимъ ее съ A и опустимъ перпендикуляръ MD на AB, то чтобы △ AMD $= m^2$.

26. На двухъ смежныхъ сторонахъ квадрата, какъ на діаметрахъ, извнѣ построены 2 полукруга, къ которымъ проведены касательныя параллельно сторонамъ квадрата. Построить кругъ, касательный къ сказаннымъ кругамъ и касательнымъ.

27. Черезъ точку P, взятую внутри круга, провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

28. Построить прямоугольный △ по даннымъ: 1) суммѣ s катетовъ и площади k^2; 2) разности катетовъ и высотѣ; 3) биссектриссѣ прямаго угла и высотѣ; 4) сторонамъ двухъ вписанныхъ квадратовъ; 5) суммѣ (или разности) катетовъ и разности отрѣзковъ, образуемыхъ высотою на гипотенузѣ; 6) биссектриссѣ прямаго угла и отношенію катетовъ; 7) радіусу вписаннаго круга и площади; 8) гипотенузѣ и радіусу вписаннаго круга; 9) гипотенузѣ и площади; 10) гипотенузѣ и разности катетовъ; 11) гипотенузѣ и суммѣ катетовъ съ высотою; 12) периметру и суммѣ объемовъ, происходящихъ отъ обращенія тр-ка около каждаго катета; 13) высотѣ и произведенію трехъ сторонъ; 14) высотѣ и радіусу внѣ-вписаннаго круга, касательнаго къ одному изъ катетовъ; 15) одному изъ катетовъ и радіусу вписаннаго круга; 16) высотѣ (или гипотенузѣ) и объему, происходящему отъ обращенія тр-ка около гипотенузы; 17) периметру и суммѣ (πm^2) поверхностей, описанныхъ катетами при обращеніи тр-ка около гипотенузы; 18) периметру и отношенію объема, производимаго обращеніемъ около гипотенузы, къ суммѣ объемовъ, производимыхъ обращеніемъ около катетовъ; 19) периметру и высотѣ; 20) гипотенузѣ и высотѣ; 21) радіусу вписаннаго круга и сторонѣ вписаннаго квадрата, помѣщеннаго въ прямомъ углѣ; 22) гипотенузѣ и периметру; 23) периметру и биссектриссѣ прямаго угла; 23) площади и суммѣ гипотенузы и высоты; 24) радіусу вписаннаго круга и суммѣ поверхностей, описанныхъ катетами при обращеніи фигуры около гипотенузы.

29. Построить △, зная высоту и радіусы — вписаннаго и описаннаго круговъ.

30. Опредѣлить стороны △, зная его периметръ $2p$, произведеніе двухъ сторонъ $bc = m^2$, зная, кромѣ того, что медіаны, соотвѣтствующія сторонамъ b и c, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

31. Вычислить стороны равнобедреннаго △, зная медіану и высоту, выходящія изъ вершины основанія.

32. Построить $\triangle$, зная одинъ изъ его угловъ, биссектриссу его и разность сторонъ, заключающихъ данный уголъ.

33. Въ $\triangle$ извѣстны: основаніе b, высота h и разность d двухъ другихъ сторонъ. Вычислить эти стороны.

34. Опредѣлить стороны $\triangle$, зная сумму $2s$ двухъ сторонъ, высоту h, соотвѣтствующую третьей сторонѣ, и разность $2d$ отрѣзковъ, образуемыхъ ею на этой сторонѣ.

35. Рѣшить $\triangle$, зная одну изъ сторонъ, периметръ и радіусъ описаннаго круга.

36. Рѣшить $\triangle$, зная периметръ, высоту и отношеніе отрѣзковъ, образуемыхъ высотою на основаніи.

37. Вписать въ данный кругъ равнобедренный $\triangle$, зная: 1) сумму (или разность) основанія и высоты; 2) что сумма квадратовъ трехъ сторонъ его равняется данному квадрату m^2.

38. Построить $\triangle$, зная: его площадь, сумму двухъ сторонъ и сторону вписаннаго квадрата, опирающагося на третью сторону треугольника, или же длину внутренней биссектриссы, заключающейся между сказанными сторонами.

39. Данъ уголъ и внутри его точка P. Провести черезъ эту точку прямую такъ, чтобы: 1) прямоугольникъ, составленный изъ отрѣзковъ, образуемыхъ искомого прямого на сторонахъ даннаго угла, былъ равновеликъ данному квадрату k^2; 2) сумма тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной прямой l.

40. Найти стороны равнобочной трапеціи, зная ея высоту, периметръ и площадь.

41. Въ трапеціи, которой одинъ бокъ AB перпендикуляренъ къ основаніямъ, даны: $AB = a$, площадь s и периметръ p; вычислить остальныя стороны.

42. Зная сумму $4a$ діагоналей ромба и радіусъ r вписаннаго круга, вычислить обѣ діагонали и сторону.

43. Описать около даннаго круга равнобочную трапецію данной площади a^2.

44. Черезъ концы діаметра даннаго круга проведены двѣ касательныя. Провести третью касательную такъ, чтобы она съ первыми двумя образовала трапецію: 1) даннаго периметра; 2) данной площади.

45. Въ данномъ $\triangle$ ABC провести прямую DE параллельную BC, такъ, чтобы трапеція DEBC имѣла данную площадь k^2.

46. Вписать въ данный кругъ трапецію, зная ея: 1) площадь и непараллельныя стороны; 2) высоту и площадь.

47. Вычислить стороны описуемой равнобочной трапеціи, зная ея периметръ $4p$ и радіусъ R описаннаго около нея круга.

48. Данъ равносторонній $\triangle$ ABC. Провести чрезъ средину O стороны BC сѣкущую до встрѣчи съ стороною AB въ M, и съ продолженіемъ стороны AC въ N, такъ чтобы разность площадей треуг-въ OCN и OMB равнялась треуг-ку ABC.

49. Въ данный $\triangle$ вписать прямую такъ, чтобы она разбила его на 2 части одинаковыхъ переметра и площади.

50. Въ четыреугольникѣ ABCD углы B и D прямые; извѣстны: діагональ $AC = a$, периметръ $2p$ и площадь s. Опредѣлить стороны: $AB = x$, $BC = y$, $CD = x'$, $DA = y'$.

51. Провести въ $\triangle$ сѣкущую касательно къ вписанному кругу, такъ чтобы она отсѣкала $\triangle$ данной площади.

52. Вычислить радіусъ нормандскаго окна (состоящаго изъ прямоугольника, завершаемаго полукругомъ) по даннымъ: полной высотѣ и площади.

53. Около даннаго прямоугольника описать равнобедренный $\triangle$ данной площади.

54. Данъ прямоугольникъ ABCD. На продолженіи стороны BC взята точка M и соединена съ A; прямая AM встрѣчаетъ сторону CD съ точкѣ N. Найти точку M такъ, чтобы сумма $ADN + MNC = k^2$.

55. Даны стороны a, b и c треуг-ка, причемъ $a > b > c$. На сколько нужно уменьшить каждую сторону, чтобы стороны $a - x$, $b - x$ и $c - x$ образовали прямоугольный тр-къ?

56. Вписать въ кругъ прямоугольникъ, равновеликій данному квадрату.

57. Въ кругѣ радіуса R дана точка P въ разстояніи $OP = a$ отъ центра. Въ какихъ разстояніяхъ (x и y) отъ центра должны быть проведены черезъ точку P перпендикулярныя между собою хорды AC и BD, чтобы четыреугольникъ ABCD имѣлъ данную площадь m^2?

58. Данъ равнобедренный $\triangle$ ABC, котораго основаніе $BC = 2b$, а каждая изъ равныхъ сторонъ равна c. Найти на BC двѣ точки D и E, а на сторонахъ AB и AC по точкѣ G и F, такъ чтобы пятіугольникъ DEFAG былъ равносторонній.

59. Данъ полукругъ AOB и къ нему касательная AC въ концѣ A діаметра AB. Найти на полуокружности такую точку M, чтобы, опустивъ изъ нея перпендикуляръ MC на касательную и соединивъ M съ B, имѣть: $MB + 2MC = l$, гдѣ l данная прямая.

60. Дана окружность радіуса R и прямая въ разстояніи d отъ центра. Построить квадратъ, котораго одна сторона была бы хордою даннаго круга, а противоположная ей лежала бы на данной прямой.

61. Данъ полукругъ діаметра AB и къ нему касательная въ точкѣ B. Провести прямую AD, встрѣчающую окружность въ точкѣ C, а касательную въ D, подъ условіемъ, чтобы $2 \cdot \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = 4k^2$.

62. Данъ кругъ и въ немъ два перпендикулярные діаметра. Найти на квадрантѣ CB такую точку M, что если опустимъ перпендикуляры MP и MQ на діаметры и будемъ вращать прямоугольникъ около CD, то чтобы произведенная имъ полная поверхность равнялась $2\pi m^2$.

63. Къ данной окружности въ точкѣ A проведена касательная xy и изъ конечныхъ точекъ діаметра CD опущены на нее перпендикуляры CE и DF. Какое положеніе нужно дать діаметру CD, чтобы при обращеніи трапеціи CDFE около линіи xy получить усѣченный конусъ, котораго полная поверхность: 1) имѣла бы данное отношеніе къ кругу OA; 2) равнялась бы данному кругу πm^2.

64. Данъ кругъ діаметра AB; проведены: хорда AC и ей симметричная хорда AD; затѣмъ точки C и D соединены прямою. Дать хордѣ AC такое положеніе, чтобы $AC^2 + AD^2 + CD^2 = 4m^2$.

65. Въ кругѣ діаметра AB проведена хорда CD, перпендикулярная къ діаметру. Помѣстить эту хорду такъ, чтобы $AC^2 + CD^2 = m^2$.

66. Данъ конусъ; на какое количество x надо уменьшить его высоту H и увеличить радіусъ основанія R, чтобы конусъ, имѣющій высоту $H - x$ и радіусъ основанія $R + x$, былъ равновеликъ данному.

67. Около даннаго шара описать конусъ, имѣющій данную полную поверхность.

68. На линіи центровъ двухъ шаровъ найти такую точку, изъ которой на обоихъ шарахъ были бы видны равновеликія зоны.

69. Вписать въ данный шаръ такой конусъ, объемъ котораго находился бы въ данномъ отношеніи къ объему сегмента, лежащаго по другую сторону основанія конуса.

70. Найти измѣренія прямоугольнаго параллелопипеда, зная сумму его 12 реберъ, сумму боковыхъ граней и сумму основаній.

71. Даны: поверхность и діагональ прямоугольнаго параллелопипеда. Найти его измѣренія, зная, что они составляютъ непрерывную пропорцію: 1) ариѳметическую; 2) геометрическую.

72. Высота h усѣченнаго конуса есть средняя пропорціональная между діаметрами основаній. Полагая, что h дана, вычислить радіусы основаній, подъ условіемъ, чтобы полная поверхность усѣченнаго конуса равнялась πa^2.

73. Въ трапеціи, одинъ бокъ (AB) которой перпендикуляренъ къ основаніямъ AD и BC, извѣстны: длина l наклоннаго бока, площадь a^2 трапеціи и объемъ $\frac{3}{4}\pi b^3$, производимый фигурою при обращеніи около CD. Найти бокъ AB. — Указать также, что особенное даютъ частные случаи: $l = a$, $l = 3a$.

74. Чрезъ вершину A треугольника ABC проведена прямая, на которую опущены перпендикуляры BB' и CC' изъ вершинъ B и C. Дать этой прямой такое положеніе, чтобы $BB'^2 + CC'^2 = m^2$.

75. Зная объемъ $\frac{\pi a^3}{3}$ и полную поверхность πb^2 конуса SAB, опредѣлить радіусъ основанія и высоту.—При какомъ отношеніи между a и b треугольникъ SAB, получаемый въ сѣченіи конуса по оси, будетъ правильный.

76. Данъ конусъ, котораго радіусъ $= R$, апоѳема $= a$. Вычислить радіусы основаній усѣченнаго конуса, той же высоты какъ и данный, зная, что сумма площадей основаній усѣченнаго конуса равна полной поверхности даннаго, и что разность между объемами усѣченнаго и даннаго конусовъ равна объему цилиндра той же высоты, имѣющаго основаніе, равное среднему сѣченію искомаго тѣла.

77. Данъ конусъ, котораго обѣ полости продолжены неограниченно. Конусъ пересѣченъ плоскостью, перпендикулярною къ оси. Провести другую плоскость, параллельную первой, такъ, чтобы боковая поверхность полученнаго тѣла находилась въ данномъ отношеніи съ суммою основаній.

78. Дана прямая $AB = 2a$. Опредѣлить радіусъ x круга, проходящаго черезъ точки A и B, такъ, чтобы четыреугольникъ ABCD, котораго вершинами служатъ точки A и B и концы C и D діаметра CD, перпендикукярнаго къ AB, имѣлъ: 1) данный периметръ $4p$.; 2) данную разность $(DB + DA) - (CB + CA)$.

79. Два прямоугольника имѣютъ измѣренія: x, y и x', y'. Даны: сумма основаній, сумма площадей и площади прямоугольниковъ (xy') и (yx'). Найти измѣренія искомыхъ прямоугольниковъ.

80. Найти радіусы основаній усѣченнаго конуса, зная его высоту, боковую поверхность и разность радіусовъ основаній.

81. Два конуса равной высоты имѣютъ общее основаніе, и вершины ихъ расположены по обѣ его стороны. Провести въ обоихъ по круговому сѣченію, такъ чтобы полученный усѣченный конусъ имѣлъ данную апоѳему и данную полную поверхность.

82. Дана полуокружность и точка M на діаметрѣ AB; $AM = a$. Проводятъ изъ M перпендикуляръ MP къ діаметру. Провести изъ точки A сѣкущую такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключающійся между MP и окружностью, имѣлъ данную длину l.

83. Въ данной полуокружности провести черезъ конецъ A діаметра AB хорду AC и изъ точки C хорду CD, параллельную діаметру, такъ, чтобы: 1) $AC + CD = m$; 2) $AC^2 + CD^2 = m^2$.

84. Дана четверть круга. Провести къ дугѣ ея касательную такъ, чтобы $OM + ON = l$. (O—центръ, M и N—точки встрѣчи касательной съ конечными радіусами квадранта).

85. Вписать въ данный шаръ такой усѣченный конусъ, который имѣлъ бы данныя: апоѳему и полную поверхность.

86. Въ данномъ полукругѣ діаметра AB проводятъ хорду AC и перпендикуляръ CD на діаметръ. Опредѣлить точку C такъ, чтобы $AC + CD = l$.

87. Къ окружности проведена касательная TA и діаметръ TS черезъ точку касанія. Опредѣлить на окружности точку P такъ, чтобы сумма ея разстояній отъ діаметра и отъ касательной равнялась данной линіи l.

88. Даны двѣ параллельныя прямыя X и У и точка A между ними; помѣстить треуг. AMN, прямоугольный при M, имѣющій данную площадь k^2, такъ, чтобы M находилась на X, а N на У.

89. Дала окружность діаметра AB и касательныя AX, BУ; провести касательную (встрѣчающую AX въ M. а BУ въ N) такъ, чтобы, обернувъ трапецію AMNB около AB, образовать объемъ, равновеликій шару даннаго радіуса a.

90. Дана окружность діаметра AB и точка D на діаметрѣ въ разстояніи a отъ центра. Провести черезъ эту точку сѣкущую DMN такъ, чтобы хорда MN была видна изъ средины OA подъ прямымъ угломъ.

91. На прямой XУ даны три точки A, B, C; найти на этой прямой точку M такъ, чтобы сумма квадратовъ разстояній MA, MB, MC имѣла данную величину k^2.

92. На гипотенузѣ BC прямоуг. $\triangle$ ABC, между точками B и C, найти такую точку, сумма квадратовъ разстояній которой отъ трехъ вершинъ имѣла бы данную величину k^2.

93. Около даннаго правильнаго треугольника ABC описанъ кругъ. Провести хорду MN параллельно BC такъ, чтобы сумма ея отрѣзковъ между окружностью и сторонами AB и AC имѣла данную длину m.

94. Дана окружность и къ ней касательная; на этой прямой построенъ внѣ круга правильный $\triangle$, котораго высота равна діаметру круга. Провести параллель къ сказанной касательной такъ, чтобы сумма ея отрѣзковъ въ кругѣ и въ треугольникѣ имѣла данную величину m.

95. Дана окружность и на діаметрѣ AB взята точка C въ разстояніи a отъ центра. Провести прямую CMN (точки M и N — на окружности) такъ, чтобы $CM^2 - CN^2 = k^2$.

96. Дана окружность діаметра AB и хорда AC подъ угломъ въ 30^0 къ діаметру. Найти на окружности точку M такъ, чтобы, опустивъ изъ нея перпендикуляръ MN на AB, а изъ N перп. NP на AC, имѣть: $MN^2 + NP^2 = k^2$.

97. Данъ $\triangle$ ABC; провести параллель къ сторонѣ BC такъ, чтобы отсѣченный $\triangle$ и трапеція образовали, при обращеніи фигуры около BC, равные объемы.

98. Въ окружности радіуса R вписана хорда AB, стягивающая $\frac{1}{3}$ окружности; найти на окружности такую точку M, чтобы $MA + MB =$ данной линіи m.

99. Двѣ окружности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Провести черезъ точку пересѣченія A сѣкущую MAN такъ, чтобы: 1) сумма квадратовъ обѣихъ хордъ имѣла данную величину $4k^2$; 2) произведеніе AM × AN имѣло данную величину k^2.

100. Данную трапецію раздѣлить прямою, параллельною основаніямъ, на двѣ части, которыя относились бы между собою какъ $m : n$.

101. Въ данномъ полукругѣ провести хорду CD, параллельную діаметру, такъ чтобы периметръ трапеціи ACDB былъ равенъ m.

102. Черезъ точку B, взятую на діаметрѣ AC круга ADC, провести перпендикуляръ BD къ діаметру такъ, чтобы $AB + BD = l$.

103. Вычислить стороны равнобочной трапеціи, зная: 1) высоту ея, площадь и объемъ, образуемый ею при обращеніи около одной изъ непараллельныхъ сторонъ; 2) зная периметръ $4p$, площадь a^2 и боковую поверхность конуса, образуемаго вращеніемъ трапеціи около прямой, соединяющей средины ея основаній, равную πb^2.

104, На продолженіи AC стороны правильнаго △ ABC берутъ точку P, соединяютъ ее съ точкую M, взятою на сторонѣ AB и проводятъ параллель MN къ AC. Опредѣлить M такъ, чтобы $PM = MN$.

105. Въ данный шаръ вписать такой цилиндръ, котораго объемъ равнялся бы суммѣ сегментовъ, лежащихъ на его основаніяхъ.

106. Даны длины $2l$ и $2l'$ двухъ параллельныхъ хордъ круга и разстояніе ихъ q; опредѣлить радіусъ круга.

107. Данъ кругъ O и двѣ внѣшнія точки A и B, причемъ $OA = a$, $OB = b$, $AB = d$. Найти на окружности такую точку M, чтобы сумма квадратовъ разстояній MA и MB равнялась m^2.

108. Въ шарѣ радіуса R проведенъ малый кругъ радіуса r. Опредѣлить радіусъ другаго, ему параллельнаго, круга такъ, чтобы объемъ заключающагося между ними слоя находился въ данномъ отношеніи k съ конусомъ, вершина котораго находится въ центрѣ перваго круга, а основаніе совпадаетъ со вторымъ.

109. Черезъ точку пересѣченія двухъ круговъ провести сѣкущую такъ, чтобы часть ея внутри обоихъ круговъ имѣла данную длину a.

110. Данъ прямоугольный при A треугольникъ ABC. Провести черезъ точку A прямую xy внѣ △-ка такъ, чтобы, опустивъ перпендикуляры BB′ и CC′ на xy, имѣть сумму треугольниковъ ABB′ и ACC′ равною данной площади k^2. Частный случай: $k^2 =$ пл. ABC.

111. Данъ полукругъ радіуса R. Провести хорду CD, параллельную діаметру AB такъ, что если обернуть фигуру около радіуса OE, перпендикулярнаго къ AB, то чтобы объемъ, описанный площадью, содержащеюся между линіями OB, OP (P—пересѣченіе CD съ OE) PD и дугою BD, относился къ объему, описанному трапеціей OPDB, какъ $m : 1$.

112. Изъ средины основанія прямоугольника, какъ изъ центра, описана дуга AB круга, которой другое основаніе AB служитъ хордою; полученную т. о. фигуру обращаютъ около перваго основанія. Зная, что высота прямоугольника$=h$, что полная поверхность полученнаго тѣла $= 2\pi a^2$, вычислить основаніе прямоугольника.

113. Зная полную поверхность (πa^2) конуса, касательнаго къ данному шару такъ, что центръ основанія конуса совпадаетъ съ центромъ шара, вычислить радіусъ основанія и высоту конуса.

114. Данъ шаръ радіуса R. Опредѣлить на діаметрѣ AB такую точку C, что если провести черезъ нее плоскость FCE перпендикулярно къ діаметру, то: 1) чтобы поверхность сегмента высоты AC, сложенная съ боковою поверхностью конуса OFE, равнялась бы площади πa^2 даннаго круга; 2) чтобы отношеніе объема того же сегмента къ сектору OFAE равнялось данному числу m; 3) чтобы отношеніе конуса FBE къ тому же сегменту равнялось m.

115. Вычислить радіусы основаній усѣченнаго конуса, описаннаго около шара радіуса R, зная, что отношеніе полной поверхности этого конуса къ поверхности шара равно m.

116. Вычислить радіусы основаній усѣченнаго конуса, зная его полную поверхность, длину образующей и то еще, что эта прямая съ нижнимъ основаніемъ составляетъ уголъ въ 60^0.

117. Пересѣчь шаръ двумя параллельными плоскостями, разстояніе между которыми дано, такъ, чтобы сумма боковыхъ поверхностей двухъ конусовъ, касательныхъ къ шару по этимъ сѣченіямъ, имѣла данную величину.

118. Въ полукругѣ радіуса R дать радіусу OC такое положеніе, чтобы сумма поверхностей, описанныхъ прямою OC и дугою CB при обращеніи около діаметра равнялась πm^2.

119. Цилиндръ и конусъ имѣютъ одинаковую высоту, равную данной линіи h. Каковы должны быть радіусы основаній, для того чтобы оба тѣла имѣли равныя полныя поверхности и равные объемы.

120. На прямой $AB = a$ найти такую точку C, что если на AC описать полуокружность, черезъ точку B провести къ ней касательную (точка касанія—D) до пересѣченія въ точкѣ E съ касательною, проведенною въ A и обернуть фигуру около AB, то чтобы поверхность, описанная дугою AB, находилась къ поверхности, описанной прямою BE, въ данномъ отношеніи m.

121. Въ данный $\triangle$ вписать такой прямоугольникъ, чтобы при обращеніи около общей стороны получился цилиндръ, полная поверхность котораго равнялась бы поверхности шара радіуса R.

122. На сторонѣ BC равносторонняго $\triangle$ ABC найти точку D такъ, чтобы, проведя DF и DE соотвѣтственно параллельно AC и AD, объемъ, образуемый параллелограммомъ AFBE при обращеніи около BC, составлялъ $\frac{m}{n}$ долей объема, образуемаго самимъ треугольникомъ.

123. Данъ кругъ діаметра AD и къ нему касательная AC. Провести хорду DE перпендикулярно къ касательной AC, татъ чтобы $\triangle$ AED, при обращеніи около AC, образовалъ данный объемъ.

124. Раздѣлить діаметръ даннаго полукруга на такія двѣ части, что если на каждой изъ нихъ описать по полукругу, то чтобы площадь, содержащаяся между 3 полуокружностями, равнялась данному кругу πm^2.

125. Данъ кругъ и точка, находящаяся въ разстояніи a отъ центра. Провести черезъ эту точку сѣкущую такъ, чтобы: 1) ея хорда имѣла данную длину b; 2) сумма квадратовъ отрѣзковъ сѣкущей имѣла данную величину k^2.

126. Дана хорда $AB = 2a$ въ кругѣ радіуса R; найти на окружности такую точку M, чтобы: 1) $MA^2 + MB^2 = k^2$; 2) $AM + BM = 2h$; 3) $AM \times BM = k^2$.

127. Около даннаго шара описать: 1) усѣченный конусъ, объемъ котораго былъ бы $= \frac{4}{3}\pi R^3 . m$, гдѣ R — радіусъ шара, m — данное число; 2) конусъ, полная поверхность котораго равнялась бы данному кругу πm^2.

128. Вычислить радіусы усованій усѣченнаго конуса, зная его объемъ, высоту и сумму радіусовъ основаній.

129. Найти высоту сферическаго сегмента, зная радіусъ R шара и величину πa^2 полной поверхности сегмента.

130. Данъ шаръ O, около котораго описана цилиндрическая поверхность, касающаяся шара по большому кругу. Опредѣлить на оси цилиндра, въ равномъ разстояніи отъ центра, такія двѣ точки A и B, что если принять ихъ за вершины двухъ конусовъ, касательныхъ къ шару и продолженныхъ до встрѣчи съ цилиндромъ, то чтобы полная поверхность составленнаго тѣла имѣла данную величину.

131. Данъ кругъ радіуса R и къ нему 3 касательныя, изъ коихъ двѣ перпендикулярны къ третьей; провести четвертую касательную такъ, чтобы при обращеніи фигуры около третьей касательной, усѣченный конусъ, описанный трапеціей, имѣлъ данное отношеніе m къ шару, котораго радіусъ равнялся бы также R.

132. Данъ шаръ съ вписаннымъ конусомъ; провести плоскость параллельно основанію конуса такъ, чтобы разность сѣченій, образуемыхъ ею въ обоихъ тѣлахъ, равнялась данной площади.

133. Въ полукругъ діаметра AB вписываютъ прямоугольникъ DEFG и на сторонѣ его DE, параллельной AB, строятъ равнобедренный $\triangle$ DEH съ вершиною H на окружности. Опредѣлить прямоугольникъ такъ, чтобы при обращеніи фигуры около AB, объемы, описанные прямоугольникомъ и треугольникомъ, были равны.

134. Даны: радіусъ основанія r и высота h конуса. Въ какомъ разстояніи x отъ вершины нужно провести плоскость параллельную основанію, чтобы объемъ усѣченнаго конуса былъ вдвое больше шара діаметра x.

135. Данъ полукругъ діаметра AB и въ точкѣ A касательная AC, равная радіусу круга; проводятъ прямую CD, которая пересѣкала бы въ точкѣ D діаметръ AB или его продолженіе, затѣмъ обращаютъ фигуру около AB, причемъ полукругъ и $\triangle$ ACD производятъ шаръ и конусъ. Въ какомъ разстояніи отъ основанія конуса нужно провести ему параллельную плоскость, для того чтобы сумма сѣченій въ обоихъ тѣлахъ была равновелика данному кругу.

136. Построены два усѣченные конуса 1-го и 2-го рода, съ общими основаніями; даны радіусы основаній и общая высота. Въ какомъ разстояніи отъ большаго основанія должно провести ему параллельную плоскость, чтобы разность площадей сѣченій, образуемыхъ этою плоскостью въ обоихъ тѣлахъ, равнялась данному кругу.

137. Данъ полукругъ AFB, касательныя въ точкахъ A и B діаметра AB и точка E на этомъ діаметрѣ. Провести третью касательную, которая пересѣкала бы первыя двѣ въ точкахъ C и D такъ, чтобы объемъ, произведенный треугольникомъ CED при обращеніи фигуры около AB, былъ равновеликъ данному объему.

138. Два конуса съ равными высотами и расположенными по одной прямой, помѣщены такъ, что вершина каждаго находится въ центрѣ основанія другаго. Пересѣчь фигуру плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, чтобы разность сѣченій равнялась данному кругу.

139. Черезъ двѣ противоположныя вершины квадрата проведены 2 параллельныя, а изъ двухъ другихъ вершинъ опущены перпендикуляры на эти прямыя. Четыре по-

лученныя прямыя образуютъ квадратъ. Опредѣлить направленіе первыхъ двухъ параллелей подъ условіемъ, чтобы отношеніе площади втораго квадрата къ площади перваго равнялось данному числу m. (За неизвѣстное принять длину отрѣзка, образуемаго одною изъ четырехъ прямыхъ на одной изъ сторонъ квадрата). Разсмотрѣть частный случай: $m = \frac{1}{5}$.

140. Данъ прямоугольный при A треугольникъ ABC. Провести внутри угла A прямую DE, которая раздѣлялась бы пополамъ высотою AH, а по длинѣ равнялась бы суммѣ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ ея концовъ на гипотенузу. За неизвѣстныя принять эти перпендикуляры.

141. Даны двѣ точки: L на сторонѣ BC треугольника ABC, другая D—на ея продолженіи. Провести черезъ точку D сѣкущую, которая, встрѣчая AC и AB въ точкахъ E и F, давала бы $\triangle$ EFL данной площади.

142. Вычислить стороны вписанной въ данный кругъ трапеціи, зная ея высоту и сумму квадратовъ четырехъ ея сторонъ.

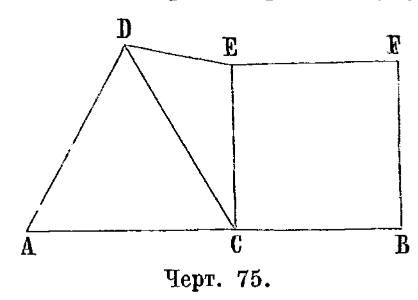
143. Тѣло составлено изъ цилиндра и двухъ конусовъ, построенныхъ на основаніяхъ цилиндра; кривыя поверхности этихъ трехъ тѣлъ касательны къ одному и тому же шару даннаго радіуса, а разстояніе между вершинами конусовъ равно данной прямой. Каковы должны быть разстоянія этихъ вершинъ отъ центра шара, чтобы объемъ всего тѣла былъ равенъ данному объему.

144. Два данные шара пересѣчены плоскостью, параллельною линіи центровъ, и на обоихъ сѣченіяхъ, какъ на основаніяхъ, построены два цилиндра, общая высота которыхъ = разстоянію линіи центровъ отъ плоскости. Каково д. б. это разстояніе, чтобы разность полныхъ поверхностей цилиндровъ равнялась данному кругу.

145. Черезъ двѣ данныя точки провести окружность, касательную къ данной.

146. Даны три круга, имѣющіе попарно внѣшнее касаніе. Построить кругъ, къ нимъ касательный.

147. Опредѣлить описуемый четыреугольникъ, зная радіусъ r вписаннаго круга и длины четырехъ сторонъ a, b, c, d.



Черт. 75.

148. Дана неограниченная прямая XY и на ней двѣ точки A и B. Опредѣлить на той же прямой точку C такъ, что если на AC построимъ правильный $\triangle$ ADC, и на CB квадратъ CEFB и проведемъ прямую DE, то чтобъ пятіугольникъ ADEFB имѣлъ данную площадь m^2.

149. Даны двѣ концентрическія окружности. Прямоугольникъ, подобный данному, имѣетъ двѣ вершины на одной окружности и двѣ на другой. Вычислить измѣренія прямоугольника.

150. На касательной линіи къ шару O берутъ двѣ точки S и S′, такъ чтобы $OS - OS' = R$, гдѣ R — радіусъ даннаго шара. Точки эти служатъ вершинами двухъ описанныхъ около шара конусовъ. Опредѣлить положеніе точекъ S и S′ подъ условіемъ, чтобы объемъ, содержащійся между обоими конусами и шаромъ, имѣлъ данную величину $\left(\frac{1}{3}\pi R^3.l.\right)$

151. Дана усѣченная прямая треугольная призма. Провести чрезъ одно изъ боковыхъ реберъ плоскость, которая раздѣляла бы призму на двѣ части въ отношеніи $p:q$.

152. На продолженіи діаметра круга радіуса R берутъ по обѣ стороны окружности двѣ точки A и B, разстояніе которыхъ равно данной линіи d, и проводятъ касательныя AA′ и BB′. Каковы должны быть разстоянія AO и BO, чтобы дуга A′B′, при обращеніи фигуры около AB, образовала поясъ данной поверхности πm^2.

153. На линіи центровъ двухъ круговъ найти такую точку, чтобы сумма (или разность) касательныхъ, проведенныхъ изъ нея къ даннымъ кругамъ равнялась данной линіи l.

154. Данъ шаръ OA; найти другой шаръ O′A, касающійся извнутри къ первому такъ, что если провести къ нему касат. плоск. BC параллельно касательной плоскости въ A, и по кругу сѣченія ея съ даннымъ шаромъ описать около послѣдняго конусъ, то чтобъ объемъ, содержащійся между боковою поверхностью конуса и боковою поверхностью зоны BAC, равнялся m разъ взятому объему искомаго шара O′A.

155. Найти радіусы основаній усѣченнаго конуса, зная его высоту h, боковую поверхность πa^2 и объемъ $\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3$. Указать число рѣшеній, соотвѣтствующее различнымъ значеніямъ отношенія $a : h$.

156. Найти радіусы двухъ извнѣ касающихся круговъ, зная площадь ab трапеціи, образуемой общею внѣшнею касательною, радіусами, проведенными въ точки касанія и линіей центровъ, и поверхность πa^2, описываемую контуромъ этой трапеціи при обращеніи около линіи центровъ.

157. Пусть будетъ O центръ круга радіуса R и AT — касательная въ точкѣ A. Взять на этой прямой двѣ точки B и B′ по одну сторону отъ A, такъ чтобы: 1) произведеніе AB × AB′ равнялось $2R^2$; 2) отношеніе площади △ BOB′ къ площади △ ACC′ (C и C′ суть точки касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ B и B′) равнялось бы m. Вычислить OB и OB′.

158. На касательной TT′ къ кругу радіуса r берутъ двѣ точки A и B такъ, чтобы разстояніе AB равнялось $2r$; затѣмъ въ плоскости круга, по ту сторону относительно TT′, гдѣ лежитъ кругъ, берутъ точку C, въ разстояніи h отъ TT′. Проводятъ параллельно касательной TT′ прямую, которая пересѣкаетъ кругъ въ точкахъ M и N, а прямыя CA и CB въ точкахъ P и Q.

1°. Изслѣдовать измѣненіе суммы $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$, когда разстояніе сѣкущей MN отъ касательной возрастаетъ отъ O до $2r$, и опредѣлить, сколько разъ эта сумма проходитъ чрезъ данную величину $4k^2$.

2°. Опредѣлить разстояніе сѣкущей отъ касательной такъ, чтобы сумма $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$ равнялась $4k^2$; изслѣдовать задачу и указать согласіе результатовъ этого изслѣдованія съ результатами прежняго изслѣдованія.

159. Дана плоскость P, шаръ радіуса r касательный къ ней, и конусъ, котораго основаніе есть кругъ радіуса $2r$, лежащій въ пл. P, а вершина находится въ разстояніи h отъ плоскости, по одну сторону съ шаромъ. Разсѣкаютъ обѣ поверхности плоскостью, параллельною P. Изслѣдовать измѣненіе суммы площадей полученныхъ сѣченій, когда разстояніе сѣкущей плоскости отъ пл. P измѣняется отъ O до $2r$.

160. Опредѣлить радіусы двухъ шаровъ, которые, пересѣкаясь, образуютъ двояко—выпуклую чечевицу, зная толщину a чечевицы, ея объемъ $\frac{1}{6}\pi b^3$ и радіусъ R общаго круга пересѣкающихся шаровъ.

Рѣшить тотъ же вопросъ въ предположеніи выпукло—вогнутой чечевицы.

ГЛАВА XLI.

Maxima и minima въ задачахъ.

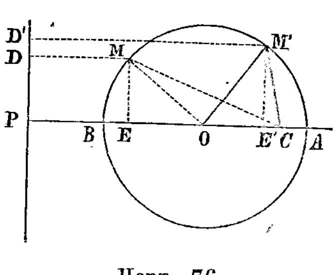
Maxima и minima простѣйшихъ цѣлыхъ функцій. — Maxima и minima квадратной дроби. — Измѣненія этой функціи. — Maxima и minima функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ. — Задачи.

I. *Maxima и minima* простѣйшихъ цѣлыхъ функцій.

646. Прямой способъ.—При опредѣленіи максимальнаго или минимальнаго значенія функціи этимъ способомъ, составляемъ выраженіе функціи и изслѣдуемъ ея измѣненіе, измѣняя независимое перемѣнное въ предѣлахъ, указываемыхъ условіями вопроса. Такимъ образомъ мы естественнымъ путемъ находимъ maximum или minimum функціи вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ значеніемъ независимаго перемѣннаго. Въ этомъ и заключается *натуральный*, *прямой способъ* опредѣленія max. или min. функціи.

Этимъ путемъ мы нашли maximum и minimum квадратнаго тринома въ § 597. Здѣсь мы приводимъ примѣры въ поясненіе этого метода.

647. Примѣръ I. — *Дана окружность діаметра* AB, *на которомъ взяты точки*: C *въ разстояніи отъ* A, *равномъ трети радіуса*, *и* P *въ разстояніи* $OP=\frac{5}{3}$ *радіуса отъ центра. Найти на окружности такую точку* M, *чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ точки* C *и отъ перпендикуляра*, *проведеннаго къ* AB *въ точкѣ* P, *была maxima или minima.*



Черт. 76.

За неизвѣстное примемъ разстояніе центра круга отъ проэкціи E точки M на діаметръ AB, принимая это неизвѣстное положительнымъ, когда точка E лежитъ влѣво отъ O, и отрицательнымъ, когда эта точка вправо отъ O. Такимъ образомъ для точки M изъ тупоугольнаго △ MOC найдемъ:

$$MC^2=MO^2+OC^2+2OC\times OE=R^2+\frac{4}{9}R^2+\frac{4}{3}R.x;$$

$$MD^2=\left(\frac{5}{3}R-x\right)^2=\frac{25}{9}R^2-\frac{10}{3}Rx+x^2;$$

слѣд. $MC^2+MD^2=R^2+\frac{29}{9}R^2-2Rx+x^2=(x-R)^2+\frac{29}{9}R^2$. Легко видѣть, что это выраженіе сохраняетъ видъ при всякомъ положеніи точки M на окружности, благодаря условію относительно знака количества x. Итакъ, изслѣдованію подлежитъ выраженіе

$$y=(x-R)^2+\frac{29}{9}R^2,$$

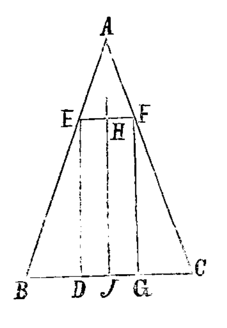
представляющее квадратный триномъ, въ которомъ x нужно измѣнять отъ $-R$ да $+R$. Изъ этого выраженія видно, что по мѣрѣ уменьшенія абсолютной величины бинома $x-R$, и y будетъ идти уменьшаясь, слѣд. достигаетъ minimum'а при $x=R$; так. обр. имѣемъ таблицу:

x	$-R \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdots +R$
y	$\frac{65}{9}R^2 \cdots > \cdots \frac{38}{9}R^2 \cdots > \cdots \frac{29}{9}R^2.$

Слѣд. y имѣетъ *minimum* $\frac{29}{9}R^2$ при $x = +R$. Такимъ образомъ, при движеніи точки отъ B къ A по верхней полуокружности, функція y, начиная съ своего минимальнаго значенія $\frac{29}{9}R^2$, увеличивается до *maximum'a* $\frac{65}{9}R^2$, котораго она достигаетъ, когда точка приходитъ въ A; затѣмъ, при движенія точки по нижней полуокружности, функція уменьшается до $\frac{29}{9}R^2$.

648. Примѣръ II. — *Въ прямой круглый конусъ вписанъ цилиндръ; найти, при какихъ размѣрахъ полная поверхность его будетъ maxima или minima?*

Пусть будетъ r—радіусъ основанія конуса, h — его высота. Назовемъ радіусъ основанія ID цилиндра буквою x, высоту его IH буквою y. Изъ подобія $\triangle$-ковъ AEH и ABI находимъ связь между x и y, выражаемую пропорціей:



Черт. 77.

$$EH : BI = AH : AI, \quad \text{или} \quad x : r = (h - y) : h,$$

откуда
$$y = \frac{h(r - x)}{r}.$$

Полная поверхность S цилиндра выражается формулою: $2\pi.DI^2 + 2\pi.DI.IH$, или $2\pi(x^2 + xy)$, или, замѣняя y его величиною:

$$S = \frac{2\pi}{r}\Big[(r - h)x^2 + hrx\Big] \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Въ данномъ вопросѣ радіусъ x основанія цилиндра можетъ измѣняться только отъ 0 до r. Припоминая § 597, замѣчаемъ, что смыслъ измѣненій квадратнаго тринома зависитъ отъ знака коэффиціента при x^2; слѣд. надо различать 3 случая: $r > h$, $r = h$, $r < h$.

I. $r > h$ (конусъ сплюснутый).—Въ этомъ случаѣ, представивъ триномъ $(r - h)x^2 + hrx$ въ видѣ $(r - h)\left[\left(x + \frac{hr}{2(r-h)}\right)^2 - \frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}\right]$, имѣемъ слѣдующую таблицу измѣненій:

x	$-\infty \cdot\cdot < \cdot\cdot < \cdot\cdot -\frac{hr}{2(r-h)} \cdot\cdot < \cdot\cdot < \cdot\cdot +\infty$
$\left(x+\frac{hr}{2(r-h)}\right)^2 - \frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}$	$+\infty \cdot\cdot > \cdot\cdot > \cdot\cdot -\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2} \cdot\cdot < \cdot\cdot < \cdot\cdot +\infty$
S	$+\infty \cdot\cdot > \cdot\cdot > \cdot\cdot -\frac{\pi h^2 r}{2(r-h)} \cdot\cdot < \cdot\cdot < \cdot\cdot +\infty$

Заключаемъ, что когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{-hr}{2(r-h)}$, функція S уменьшается, а затѣмъ увеличивается, когда x возрастаетъ отъ $\frac{-hr}{2(r-h)}$, до

$+\infty$. Но какъ количество $\frac{-hr}{2(r-h)}$ отрицательно, то изъ таблицы видимъ, что измѣненіямъ x въ области отъ 0 до r отвѣчаетъ возрастаніе функціи S. Слѣд. когда $r > h$, полная поверхность цилиндра увеличивается по мѣрѣ увеличенія радіуса основанія цилиндра. При $x=0$, и $S=0$; при $x=r$, $S=2\pi r^2$; такъ-что S увеличивается отъ 0 до $2\pi r^2$; и въ самомъ дѣлѣ, при $x=0$, цилиндръ обращается въ прямую AI; при $x=r$, боковая поверхность обращается въ 0, полная же поверхность приводится къ суммѣ двухъ круговъ радіуса $BI=r$.

II. $r=h$. Триномъ приводится къ hrx, и $S=2\pi rx$, откуда непосредственно видно, что при возрастаніи x отъ 0 до r, S увеличивается отъ 0 до $2\pi r^2$.

Въ обоихъ случаяхъ функція имѣетъ: абсолютный minimum, равный 0, и абсолютный maximum $=2\pi r^2$.

III. $r < h$ (конусъ вытянутый). — Въ этомъ случаѣ множитель $r-h$ отрицателенъ, и таблица измѣненій функціи S такова:

x	$-\infty$	$<$	$<$	$-\frac{hr}{2(r-h)}$	$<$	$<$	$+\infty$
$\left(x+\frac{hr}{2(h-r)}\right)^2-\frac{h^2r^2}{4(h-r)^2}$	$+\infty$	$>$	$>$	$-\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}$	$<$	$<$	$+\infty$
S	$-\infty$	$<$	$<$	$\frac{\pi h^2r}{2(h-r)}$	$>$	$>$	$-\infty$

Такимъ образомъ функція S сначала увеличивается до $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$, а потомъ уменьшается; слѣд. имѣетъ maximum при $x=\frac{hr}{2(h-r)}$. Хотя это количество положительно, но оно можетъ быть или $>r$, или $<r$; между тѣмъ какъ въ данномъ вопросѣ x измѣняется только отъ 0 до r. Посмотримъ, при какой зависимости между r и h, это значеніе x будетъ $\geqslant r$. Положивъ

$$\frac{hr}{2(h-r)} \geq r, \text{ или } \frac{h}{2(h-r)} \geq 1,$$

и умноживъ обѣ части на $h-r$ (большее 0), найдемъ: $h \geqslant 2h-2r$, или $2r \geq h$, или $r \geq \frac{h}{2}$. Слѣд. когда r равно, или превышаетъ половину высоты конуса, то x, измѣняясь отъ 0 до r, всегда остается меньше и $\frac{hr}{2(h-r)}$, или, въ крайнемъ случаѣ, равно этому количеству; слѣд. S идетъ, постоянно увеличиваясь, имѣя так. обр. опять абсолютный maximum.

Пусть теперь $\frac{hr}{2(h-r)} < r$, откуда $r < \frac{h}{2}$. Въ этомъ случаѣ, увеличиваясь отъ 0 до r, перемѣнное x проходитъ чрезъ значеніе $\frac{hr}{2(h-r)}$; а слѣд. S, начиная отъ 0, увеличивается, достигаетъ maximum'а $=\frac{\pi h^2 r}{2(h-h)}$, когда x достигаетъ значенія $\frac{hr}{2(h-r)}$; а затѣмъ уменьшается до $2\pi r^2$, при $x=r$.

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ функція имѣетъ относительный maximum $= \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$.

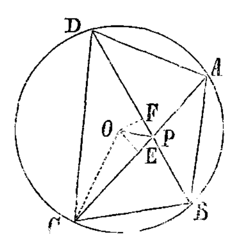
Результаты этого изслѣдованія можно резюмировать въ видѣ слѣдующей таблицы.

$r \geqslant \frac{h}{2}$	x	$0 \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot \cdot \; r$
	S	$0 \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \; 2\pi r^2.$
$r < \frac{h}{2}$	x	$0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < \cdot \; \frac{hr}{2(h-r)} \; < \cdot \cdot \cdot \; r$
	S	$0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < \cdot \; \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)} \cdot > \cdot \cdot \; 2\pi r^2.$

Т. е. когда $r \geqslant \frac{h}{2}$, полная поверхность S цилиндра принимаетъ одинъ разъ каждое значеніе, содержащееся между 0 и $2\pi r^2$, не дѣлаясь больше $2\pi r^2$. Но при $r < \frac{h}{2}$, S принимаетъ одинъ разъ всякое значеніе между 0 и $2\pi r^2$; дважды всякую величину, содержащуюся между $2\pi r^2$ и $\frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$, и не дѣлается больше $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$.

649. Примѣръ III. — *Черезъ данную точку* P *внутри окружности* O *провести двѣ взаимно-перпендикулярныя хорды* AC *и* BD *такъ, чтобы площадь четыреугольника* ABCD *была maxima или minima.*

Пусть $OP = a$ и пусть $OF = x$—перемѣнное разстояніе хорды BD отъ центра.



Черт. 78.

Площадь $\triangle DAB = \frac{1}{2} DB \times AP$, $\triangle BCD = \frac{1}{2} DB \times CP$; складывая, найдемъ, что площадь y четыреугольника ABCD равна $\frac{1}{2} DB \times AC$, или, если перпендикуляръ изъ центра на хорду AC встрѣчаетъ ее въ точкѣ E, можемъ написать: $y = 2DF \times CE$; но $DF = \sqrt{R^2 - x^2}$, $CE = \sqrt{R^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - (a^2 - x^2)}$; слѣд.

$$y = 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - a^2 + x^2)}.$$

Но y—величина положительная, а потому ея maximum или minimum будутъ имѣть мѣсто при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и maximum или minimum квадрата функціи y:

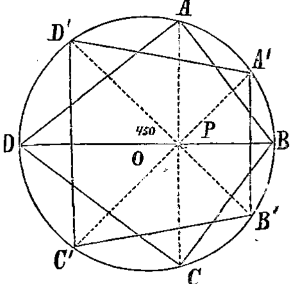
$$y^2 = -4x^4 + 4a^2x^2 + 4R^2(R^2 - a^2).$$

Вопросъ приведенъ къ изслѣдованію измѣненій биквадратнаго тринома, которому въ этихъ цѣляхъ даемъ видъ:

$$y^2 = -4\left[\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - \left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right].$$

Отсюда видно, что когда x увеличивается отъ нуля до $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, количество y^2 идетъ возрастая; когда же x продолжаетъ увеличиваться отъ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ до a, y^2

уменьшается; слѣд. количество y^2, а слѣд. и y имѣетъ *maximum*, когда обѣ хорды одинаково наклонены къ діаметру OA; самый maximum y-ка равенъ $2R^2 - a^2$.



Черт. 79.

Затѣмъ, такъ какъ площадь уменьшается когда x возрастаетъ отъ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ до a, т. е. до того момента, когда хорда BD становится перпендикулярна къ діаметру OP; то ясно, что если эта хорда будетъ продолжать вращаться около точки P, площадь послѣдовательно пройдетъ черезъ всѣ предшествовавшія состоянія, слѣд .достигнетъ minimum'а, когда одна изъ хордъ совпадетъ съ діаметромъ OP; самый minimum $= 2R\sqrt{R^2 - a^2}$.

Резюме: когда прямой уголъ совершаетъ полный оборотъ около точки P, площадь четыреугольника проходитъ дважды чрезъ maximum, равный A'B'C'D' и дважды чрезъ minimum, равный ABCD.

650. Непрямой способъ.—Сущность этого метода можно резюмировать такъ: пусть будетъ y нѣкоторая функція перемѣннаго x, maximum или minimum которой мы желаемъ найти. Съ этою цѣлью предложимъ себѣ найти, какъ нужно взять x, чтобы функція имѣла данную величину m, которую на время оставляемъ произвольною; рѣшая эту вспомогательную задачу, мы получимъ ур-ніе въ x; и если это ур. будетъ такое, которое мы можемъ рѣшить (напр. квадратное, биквадратное), то опредѣляя условія возможности вопроса, мы и найдемъ предѣлы неопредѣленнаго количества m: эти предѣлы вообще и будутъ—maximum или minimum m, т. е. функціи.

Такимъ образомъ здѣсь maxima и minima опредѣляются не прямо, а *косвенно*, какъ результаты изслѣдованія условій возможности вопроса. Примѣры этого рода мы имѣли въ главѣ XL. Вотъ еще примѣры примѣненія косвеннаго метода.

651. Вопросъ. — *Найти maximum и minimum квадратнаго тринома* $ax^2 + bx + c$.

Положивъ $ax^2 + bx + c = m$, гдѣ m произвольное количество, рѣшаемъ это ур. относительно x; найдемъ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a} \qquad (1).$$

Мы ищемъ дѣйствительныя значенія перемѣннаго x, при которыхъ триномъ получаетъ данное значеніе m; но чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательно; сл. триномъ можетъ получать только такія дѣйствительныя значенія m, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$b^2 - 4ac + 4am \gtrless 0, \quad \text{или} \quad 4am \gtrless 4ac - b^2.$$

Для опредѣленія отсюда предѣла для m, придется обѣ части неравенства дѣлить на $4a$, причемъ отъ знака a будетъ зависѣть или сохраненіе знака неравенства, или перемѣна его на обратный. Отсюда два случая:

I· $a > 0$. Въ этомъ случаѣ дѣля на $4a$, мы не измѣнимъ смысла неравенства, и получимъ:

$$m \geqq \frac{4ac - b^2}{4a},$$

т. е. m не можетъ быть меньше $\frac{4ac - b^2}{4a}$, слѣд. *minimum количества m равенъ* $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Подставляя это значеніе m въ формулу (1), находимъ соотвѣтствующее значеніе независимаго перемѣннаго: $x = -\frac{b}{2a}$.

II. $a < 0$. Въ этомъ случаѣ дѣля на $4a$, измѣнимъ знакъ неравенства, и получимъ:

$$m \leqq \frac{4ac - b^2}{4a},$$

т. е. m должно быть меньше и, въ крайнемъ случаѣ, равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$; слѣд. $\frac{4ac - b^2}{4a}$ есть *maximum* тринома. Соотвѣтствующее значеніе x выражается опять формулою $x = -\frac{b}{2a}$. Итакъ

При $a > 0$ триномъ имѣетъ minimum, при $a < 0$ онъ имѣетъ maximum; maximum и minimum выражаются формулою $\frac{4ac - b^2}{4a}$; а соотвѣтствующія значенія независимаго перемѣннаго формулою: $x = -\frac{b}{2a}$.

Найденное значеніе $\frac{4ac - b^2}{4a}$, какъ видно, есть maximum или minimum въ смыслѣ абсолютномъ; но пока не видно, чтобы это были maximum или minimum относительныя. Нужно еще доказать это; т. е. доказать, что напр. найденное минимальное значеніе тринома дѣйствительно меньше двухъ смежныхъ съ нимъ значеній функціи. Для этого мы должны вычислить два значенія тринома, которыя онъ имѣетъ при двухъ значеніяхъ x: одномъ, немного меньшемъ $-\frac{b}{2a}$, другомъ, немного большемъ $-\frac{b}{2a}$. Называя буквою h абсолютную величину нѣкотораго весьма малаго количества, вычислимъ величины тринома при $x = -\frac{b}{2a} - h$ и при $x = -\frac{b}{2a} + h$. Приведя триномъ къ виду

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

подставляемъ сюда сначала $-\frac{b}{2a} - h$, потомъ $-\frac{b}{2a} + h$ вмѣсто x; въ обоихъ случаяхъ находимъ, что триномъ беретъ видъ

$$P = \frac{4ac - b^2}{4a} + ah^2.$$

Замѣчая, что: 1) при $a > 0$, ah^2 — величина существенно положительная, находимъ, что $P > \frac{4ac - b^2}{4a}$, т. е. что дробь $\frac{4ac - b^2}{4a}$ меньше двухъ сосѣд-

нихъ съ нею значеній тринома: дробь эта, слѣд., дѣйствительно представляетъ относительный минимумъ функціи; 2) при $a < 0$, ah^2 есть количество существенно—отрицательное, а потому въ этомъ случаѣ $P < \frac{4ac - b^2}{4a}$, и слѣд. дробь $\frac{4ac - b^2}{4a}$ больше двухъ смежныхъ съ нею значеній тринома, т. е. представляетъ относительный максимумъ функціи.

Результаты эти вполнѣ согласны съ выводами § 597.

652. Примѣръ I. — *Найти maximum или minimum тринома* $2x^2 - 5x + 7$.

Положивъ $2x^2 - 5x + 7 = m$ и рѣшивъ относительно x уравненіе $2x^2 - 5x + 7 - m = 0$, имѣемъ

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8(7 - m)}}{4}.$$

Для дѣйствительности x необходимо, чтобы было $25 - 8(7 - m) \geqq 0$, или $-31 + 8m \geqq 0$, откуда $m \geqq \frac{31}{8}$.

Заключаемъ, что m не должно быть меньше $\frac{31}{8}$, сл. $min.\ (m) = \frac{31}{8}$, а соотвѣтствующее значеніе $x = \frac{5}{4}$.

Для провѣрки беремъ $x = \frac{5}{4} \pm h$, гдѣ h безконечно—мало, и при этомъ значеніи x находимъ величину тринома, именно: $2\left(\frac{5}{4} \pm h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4} \pm h\right) + 7$ или, по упрощеніи, $\frac{31}{8} + 2h^2$. Итакъ, при двухъ значеніяхъ x, смежныхъ съ $\frac{5}{4}$, триномъ получаетъ величины, большія $\frac{31}{8}$, ибо $2h^2$ — положительно; сл. $\frac{31}{8}$ есть дѣйствительно minimum тринома.

653. Примѣръ II.—*Найти maximum и minimum функціи* $cx^2 - b(a - x)^2$.

Приравнявъ это выраженіе m, расположивъ по степенямъ x и собравъ всѣ члены въ первую часть, имѣемъ ур-ніе

$$(c - b)x^2 + 2abx - (a^2b + m) = 0,$$

откуда
$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 + (c - b)(a^2b + m)}}{c - b}.$$

Для дѣйствительности x необходимо, чтобы m удовлетворяло неравенству $a^2b^2 + (c - b)(a^2b + m) \geqq 0$, или $(c - b)m + a^2bc \geqq 0$. Рѣшая это неравенство, различаемъ два случая:

1) Если $c - b > 0$, то $m \geqq \frac{a^2bc}{b - c}$, откуда minimum $(m) = \frac{a^2bc}{b - c}$, а соотвѣтствующее значеніе x есть $x = \frac{ab}{b - c}$.

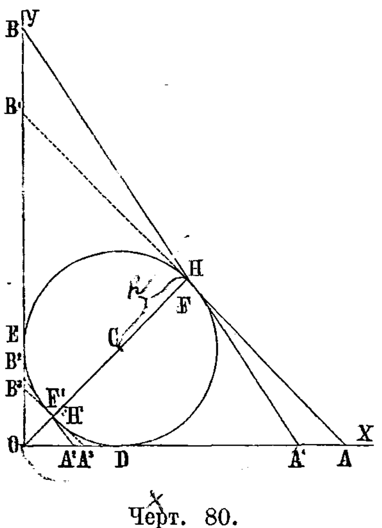
2) Если $c-b<o$, то $m \lessgtr \frac{a^2bc}{b-c}$, откуда maximum $(m)=\frac{a^2bc}{b-c}$, а $x=\frac{ab}{b-c}$

Для повѣрки подставляемъ въ данное выраженіе вмѣсто x два значенія смежныя съ $\frac{ab}{b-c}$, именно $\frac{ab}{b-c}\pm h$; находимъ: $c\left(\frac{ab}{b-c}\pm h\right)^2-b\left(a-\frac{ab}{b-c}\mp h\right)^2$, или, по упрощеніи, $\frac{a^2bc}{b-c}+(c-b)h^2$. При $c-b>0$, членъ $(c-b)h^2$ существенно положителенъ; а это значитъ, что при x смежныхъ съ $\frac{ab}{b-c}$ триномъ больше нежели $\frac{a^2bc}{b-c}$: послѣднее выраженіе есть, слѣд., minimum тринома. При $c-b<o$, членъ $(c-b)h^2$ отрицателенъ; это значитъ, что величины тринома при x смежныхъ съ $\frac{ab}{b-c}$ меньше $\frac{a^2bc}{b-c}$; слѣд. эта дробь есть maximum тринома.

654. Примѣръ III.—*Данъ кругъ радіуса* R, *вписанный въ прямомъ углѣ. Провести къ этому кругу касательную такъ, чтобы площадь отсѣкаемаго ею въ углѣ треугольника* A′OB *была minima.*

Пусть $OA'=x$, $OB=y$. Площадь Δ $A'OB=\frac{1}{2}xy$; чтобы представить ее въ функціи одного перемѣннаго, выразимъ, что прямая A′B касательна къ кругу C; имѣемъ $A'B=BF+FA'=BE+A'D=y-R+x-R=x+y-2R$; съ другой стороны, такъ какъ $A'B^2=x^2+y^2$, связь между x и y будетъ: $(x+y-2R)^2=x^2+y^2$. Итакъ, ур-нія задачи суть (называя площадь Δ A′OB чрезъ m^2):

$$xy=2m^2,\quad 2R(x+y)=xy+2R^2.$$



Черт. 80.

Подставляя во второе ур-ніе вмѣсто xy его величину $2m^2$, имѣемъ:

$$xy=2m^2 \quad \text{и} \quad x+y=\frac{m^2+R^2}{R};$$

такимъ образомъ видно, что неизвѣстныя x и y суть корни ур-нія

$$X^2-\frac{m^2+R^2}{R}\cdot X+2m^2=0,$$

откуда $X=\left\{\frac{x}{y}\right\}=\frac{m^2+R^2}{2R}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2+R^2}{2R}\right)^2-2m^2}=\frac{m^2+R^2\pm\sqrt{m^4-6R^2m^2+R^4}}{2R}$.

Для дѣйствительности x и y необходимо, чтобы было

$m^4-6R^2m^2+R^4\geq o$, или $[m^2-R^2(3+\sqrt{8})][m^2-R^2(3-\sqrt{8})]\geqq 0$.

Это неравенство будетъ удовлетворено, если количеству m^2 дадимъ значенія, лежащія внѣ корней тринома, т. е.: 1) значенія, содержащіяся между 0 и

$R^2(3-2\sqrt{2})$; 2) значенія, большія $R^2(3+2\sqrt{2})$. Maximum значеній перваго ряда есть $R^2(3-2\sqrt{2})$; minimum значеній втораго ряда равенъ $R^2(3+2\sqrt{2})$.

Что касается minimum'а, то значенія x и y, ему соотвѣтствующія, суть: $x=y=\frac{m^2+R^2}{2R}=R(2+\sqrt{2})$. Равенство x и y показываетъ, что Δ минимальной площади есть равнобедренный прямоугольный Δ AOB′, котораго гипотенуза есть касательная AB′ въ конечной точкѣ діаметра - биссектора OCH даннаго угла.

Что касается maximum'а $R^2(3-2\sqrt{2})$, то онъ не можетъ соотвѣтствовать треугольникамъ, образуемымъ касательными, проводимыми къ дугѣ EHD, ибо площади этихъ треугольниковъ измѣняются отъ $+\infty$ до $+\infty$, слѣд. не имѣютъ maximum'а; съ другой стороны, и самая величина maximum'а $R^2(3-2\sqrt{2})$ меньше R^2. Онъ соотвѣтствуетъ треугольникамъ, образуемымъ касательными къ дугѣ DH′E. Въ самомъ дѣлѣ площади этихъ треугольниковъ измѣняются отъ 0 до 0 и слѣд. имѣютъ maximum. Обозначивъ: $OA_2=x$, $OB_2=y$, имѣемъ: $A_2B_2=EB_2+DA_2=R-x+R-y=2R-x-y$, и ур-нія этой новой задачи будутъ:

$$xy=2m^2,\quad x^2+y^2=(2R-x-y)^2;$$

они не отличаются отъ ур-ній предыдущей задачи, и изслѣдуя подрадикальный триномъ, мы должны были, на ряду съ minimum'омъ первой серіи Δ-ковъ, найти и maximum второй серіи.

655. Примѣръ IV.— *Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты* h (опущенной на гипотенузу) *у какого периметръ имѣетъ наименьшую величину?*

Пусть будутъ: x и y — катеты, z — гипотенуза и $2p$ — периметръ треугольника; ур-нія задачи суть:

$$x+y+z=2p,\quad xy=hz,\quad x^2+y^2=z^2.$$

Изъ перваго: $x+y=2p-z$, или $(x+y)^2=(2p-z)^2$; затѣмъ, придавая къ третьему удвоенное второе, имѣемъ:

$$x^2+y^2+2xy=z^2+2hz,\quad \text{или}\quad (x+y)^2=z^2+2hz;$$

приравнивая оба выраженія $(x+y)^2$, имѣемъ ур-ніе въ z

$$(2p-z)^2=z^2+2hz,$$

изъ котораго
$$z=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

Слѣд. $x+y=2p-\frac{2p^2}{h+2p}=\frac{2ph+2p^2}{h+2p}=2p\cdot\frac{h+p}{h+2p}$; $xy=hz=\frac{2p^2h}{h+2p}$.

Итакъ, x и y суть корни квадратнаго ур-нія

$$X^2-2p\cdot\frac{h+p}{h+2p}\cdot X+\frac{2hp^2}{h+2p}=0.$$

Изъ него

$$X=\left\{\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=p\cdot\frac{h+p}{h+2p}\pm\sqrt{p^2\cdot\left(\frac{h+p}{h+2p}\right)^2-\frac{2hp^2}{h+2p}},$$

а какъ подрадикальное выраженіе приводится къ $\frac{p^2}{(h+2p)^2}(p^2-h^2-2hp)$, то

$$X=\frac{p}{h+2p}\,(h+p\pm\sqrt{p^2-h^2-2ph}).$$

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы p удовлетворяло неравенству $p^2-2ph-h^2\geq 0$, или

$$[p-h(1+\sqrt{2})]\,.\,[p-h(1-\sqrt{2})]\geq 0.$$

Отсюда извѣстнымъ образомъ заключаемъ, что неравенство удовлетворяется двумя серіями значеній p, а именно: 1) всѣми $p<h(1-\sqrt{2})$; 2) всѣми $p>h(1+\sqrt{2})$; слѣд. $h(1-\sqrt{2})$ есть maximum p, а $h(1+\sqrt{2})$ — minimum p.

Что касается minimum'а, равнаго $h(1+\sqrt{2})$, то отвѣчающія ему значенія x и y суть:

$$x=y=\frac{h(1+\sqrt{2}).h(2+\sqrt{2})}{h(3+2\sqrt{2})}=h\,.\,\frac{4+3\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=h\sqrt{2}\,.$$

Слѣд. *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты, равнобедренный имѣетъ наименьшій периметръ.*

Что касается найденнаго maximum'а, то, будучи отрицательнымъ, онъ не можетъ относиться къ данному геометрическому вопросу. Но замѣчая, что при $p=h(1-\sqrt{2})$, количества x и y отрицательны, а z положительно, мы, перемѣнивъ въ ур-хъ вопроса знаки количества x, y и p, найдемъ уравненія:

$$x+y+z=2p,\quad xy=hz,\quad x^2+y^2=z^2.$$

Этимъ ур-мъ отвѣчаетъ вопросъ: Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты h у какого избытокъ суммы катетовъ надъ гипотенузою будетъ наименьшій? Рѣшивъ этотъ вопросъ, найдемъ, что искомый треугольникъ есть равнобедренный, и что minimum половины избытка дается абсолютною величиною отрицательнаго maximum'а предыдущей задачи.

Примѣчаніе. — Если бы требовалось изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра найти такой, котораго высота, опущенная на гипотенузу, была бы наибольшая; тогда p была бы величина данная и нужно бы было найти h, удовлетворяющія неравенству

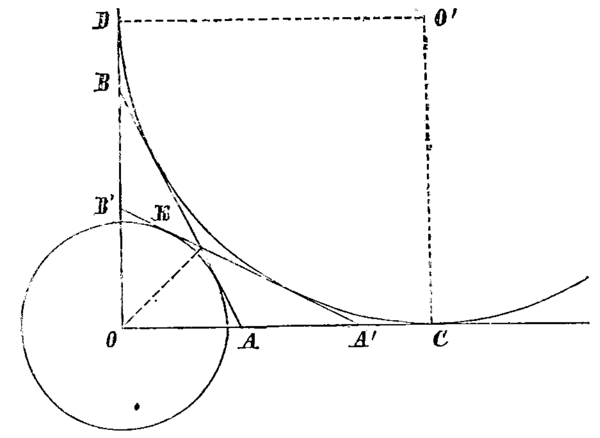
$$h^2+2ph-p^2<0,\ \text{или}\ [h-p(\sqrt{2}-1)][h+p(1+\sqrt{2})]<0.$$

Отсюда нашли бы, что maximum $(h)=p(\sqrt{2}-1)$; соотвѣтствующія значенія x и y равны между собою, и общая величина ихъ есть

$$x=y=p\,.\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=p(2-\sqrt{2}).$$

Эти результаты легко найти геометрически. Извѣстно, что для построенія прямоугольнаго треугольника по даннымъ: периметру и высотѣ на гипотенузу, откладываютъ на сторонахъ прямаго угла $OC=OD=p$; возставляютъ въ точкахъ C и D перпендикуляры, которыхъ пересѣченіе опредѣляетъ центръ O' круга, внѣ-вписаннаго въ искомомъ Δ AOB; изъ точки O какъ изъ центра радіусомъ OK, равнымъ высотѣ, описываютъ другой кругъ. Гипотенуза AB должна быть касательною къ обоимъ кругамъ O и O'. Слѣд. вообще задача имѣетъ два

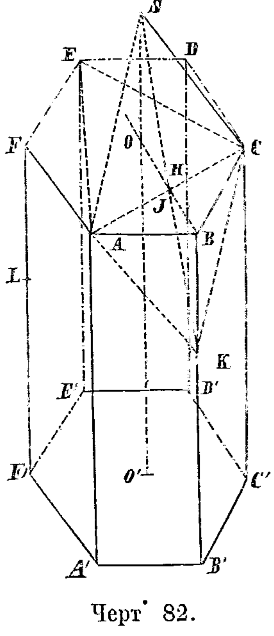
рѣшенія одинаковыя, ибо тр-ки OAB и OA′B′ равны, такъ какъ $OA = OB'$ и $OA' = OB$.



Черт. 81.

Задача возможна, когда обѣ окружности лежатъ одна внѣ другой; для того, чтобы они были касательны, необходимо чтобы $OO' = h + p$, а какъ $OO' = p\sqrt{2}$, то $h + p = p\sqrt{2}$, или $h = p(\sqrt{2} - 1)$. Если h будетъ имѣть большую величину, окружности пересѣкутся, и задача станетъ невозможна.

656. Примѣръ V. — *Задача о пчелиныхъ ячейкахъ.* На продолженіи оси OO' правильной шестіугольной призмы возьмемъ точку S; черезъ эту точку и чрезъ каждую изъ сторонъ правильнаго ΔACE, полученнаго соединеніемъ чрезъ одну вершинъ верхняго основанія призмы, проведемъ три плоскости, по которымъ отрѣжемъ отъ призмы три тетраэдра BACK, DCEH и FEAL и замѣнимъ ихъ однимъ тетраэдромъ SACE, поставленнымъ надъ призмой. Новый многогранникъ будетъ ограниченъ сверху тремя ромбами SAKC, SCEH, SEAL; объемъ его всегда равенъ объему взятой призмы, гдѣ бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида SACE составлена изъ трехъ пирамидъ SOAC, SOCE и SOEA, соотвѣтственно равныхъ тремъ отрѣзаннымъ пирамидамъ; такъ пирамида $SOAC =$ пир. KABC, ибо они имѣютъ равныя основанія ($\Delta OAC = \Delta ABC$, какъ половины ромба ABCO) и равныя высоты SO и KB (по равенству прямоуг. треугольниковъ SOI и KBI). Имѣя равные объемы, многогранники имѣютъ, однако, различныя поверхности, и *задача состоитъ въ опредѣленіи точки* S *такъ, чтобы поверхность новаго десятигранника имѣла наименьшую величину.*



Черт. 82.

Пусть $AB = a$, $BB' = OO' = b$, $BK = SO = x$; въ такомъ случаѣ: $AC = a\sqrt{3}$; $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2}$; слѣд. $SK = \sqrt{4x^2 + a^2}$; площадь ромба SAKC, равная полупроизведенію діагоналей AC и SK, выразится формулою $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$; площадь трапеціи $CKB'C'$ — формулою $\frac{1}{2}a(2b - x)$. Слѣд. поверхность многогранника, не считая основанія, выражается формулою $\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b - x)$, или $3a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x\right]$. Постоянный

множитель $3a$ не вліяетъ на условія max. и min., потому вопросъ приводится къ опредѣленію minimum'а скобочнаго выраженія. Положивъ

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x=m$$

и освободивъ это ур-ніе отъ радикала, найдемъ

$$8x^2-8(m-2b)x+3a^2-4(m-2b)^2=0,$$

откуда $$x=\frac{2(m-2b)\pm\sqrt{6[2(m-2b)^2-a^2]}}{4}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было

$$2(m-2b)^2-a^2\gtrless 0,\ \text{или}\ (m-2b)^2\gtrless\frac{a^2}{2},\ \text{или}\ m-2b\gtrless\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\text{minim.}(m)=2b+\frac{a}{\sqrt{2}}$. Помноживъ на $3a$, найдемъ, что искомая минимальная поверхность $=$

$$6ab+\frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

а соотвѣтствующая величина $x=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Формула для x показываетъ; что разность двухъ смежныхъ боковыхъ реберъ должна быть $=$ четверти діагонали квадрата, построеннаго на сторонѣ шестіугольника, служащаго основаніемъ призмы.

Поверхность призмы, не считая основанія, была бы $6ab+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; слѣд. поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на $\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ поверхности шестіугольной призмы, имѣющей то же основаніе и тотъ же объемъ.

Легко видѣть, что для треугольника KBI имѣетъ мѣсто пропорція

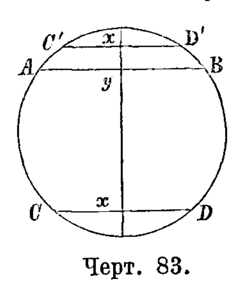
$$BK:BI:IK=1:\sqrt{2}:\sqrt{3},$$

откуда (при помощи тригонометріи) найдемъ, что уголъ $BIK=35^\circ 15' 52''$.

Примѣчаніе.—Пчелы строятъ ячейки своихъ сотовъ именно въ формѣ такихъ десятигранниковъ съ минимальною поверхностью; шестіугольникъ образуетъ входъ въ ячейку; медъ кладется на дно; пчелы строятъ сначала ромбы, затѣмъ боковыя трапеціи. Если вообразить себѣ плоскость, заполненную шестіугольниками и построить на каждомъ изъ нихъ ячейку, то вершины ячеекъ будутъ находиться всѣ въ одной плоскости, параллельной первой. Затѣмъ, если къ такой фигурѣ приложить другую выпуклостями во впадины первой, получимъ совокупность ячеекъ, называемую *сотомъ*. Улей наполняется сотами, помѣщенными другъ надъ другомъ такъ, чтобы двѣ пчелы могли вмѣстѣ пройти между двумя послѣдовательными сотами.

Итакъ: наклоненіе ромбовъ, образующихъ дно, таково, что ячейки при данномъ объемѣ имѣетъ минимальную поверхность; правильный треугольникъ, квадратъ и прав. шестіугольникъ суть единственные правильные многоугольники, которыми можно заполнить плоскость безъ просвѣтовъ, и изъ нихъ шестіугольникъ, при той же площади, имѣетъ наименьшій контуръ. Такимъ образомъ является двоякая экономія на воскъ. Геометрическое строеніе пчелиныхъ ячеекъ, замѣченное еще Паппусомъ, геометромъ IV вѣка до Р. Х., было изучаемо сначала Филиппомъ Маральди (1712 г.), затѣмъ Реомюромъ, который и предложилъ вопросъ о минимумѣ Самуилу Кенигу и Маклорену. Послѣдній впервые далъ точное теоретическое рѣшеніе вопроса. Для угла ромба Кенигъ нашолъ $109^\circ 26'$ вмѣсто $109^\circ 28' 16''$.

657. Примѣръ VI.—*Зная сумму $2a$ двухъ параллельныхъ хордъ круга радіуса R, опредѣлить ихъ положеніе такъ, чтобы разстояніе этихъ хордъ имѣло наибольшую или наименьшую величину.*



Черт. 83.

Пусть длины параллельныхъ полухордъ будутъ x и y; прямо имѣемъ, назвавъ разстояніе между ними буквою m:

$$\sqrt{R^2-x^2} \pm \sqrt{R^2-y^2} = m,$$

гдѣ знакъ (+) относится къ случаю, когда хорды расположены по обѣ, а (—)—по одну сторону центра. Затѣмъ, по условію:

$$x+y=a.$$

Возвышая обѣ части перваго ур. въ квадратъ, имѣемъ:

$$2R^2-(x^2+y^2) \pm 2\sqrt{(R^2-x^2)(R^2-y^2)} = m^2,$$

или

$$(m^2-2R^2+x^2+y^2)^2 = 4(R^2-x^2)(R^2-y^2).$$

Раскрывая и дѣлая приведеніе, имѣемъ:

$$m^4+(x^2+y^2)^2-4m^2R^2+2m^2(x^2+y^2)=4x^2y^2.$$

Изъ втораго ур-нія находимъ: $x^2+y^2=a^2-2xy$; слѣд.

$$m^4+(a^2-2xy)^2-4m^2R^2+2m^2(a^2-2xy)=4x^2y^2,$$

откуда

$$xy=\frac{(m^2+a^2)^2-4m^2R^2}{4(a^2+m^2)}.$$

По произведенію и суммѣ x и y можемъ выразить эти количества какъ корни квадратнаго ур-нія

$$u^2-au+\frac{(m^2+a^2)^2-4m^2R^2}{4(a^2+m^2)}=0.$$

Условіе дѣйствительности корней таково:

$$a^2(a^2+m^2)-(m^2+a^2)^2+4m^2R^2 \gtreqless 0, \text{ или } m^2(-m^2-a^2+4R^2) \gtreqless 0.$$

Такъ какъ по свойству геометрическаго вопроса $a^2<4R^2$, то предыдущее неравенство можно написать такъ:

$$(\sqrt{4R^2-a^2}-m)(\sqrt{4R^2-a^2}+m) \geqslant 0 \ . \ . \ . \ (1)$$

Когда $m>0$, изъ неравенства (1) находимъ: $m\leq\sqrt{4R^2-a^2}$, сл. maximum $(m)=\sqrt{4R^2-a^2}$, а соотвѣтствующія значенія x и y суть $x=y=\frac{a}{2}$. Очевидно, этотъ maximum принадлежитъ функціи $\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R^2-y^2}$, ибо другая функція при $x=y=a$ обращается въ 0.

Когда $m<0$, неравенство (1) даетъ: $m\geqslant-\sqrt{4R^2-a^2}$, откуда minimum $(m)=-\sqrt{4R^2-a^2}$. Этотъ minimum принадлежитъ функціи: $-\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{R^2-y^2}$. Опредѣленіе minim. или max. этой функціи привело бы къ прежнему ур-нію въ u, послѣ возвышенія въ квадратъ.

Для провѣрки найденнаго mіximum'а$=\sqrt{4R^2-a^2}$, которому соотвѣтствуютъ $x=y=\frac{a}{2}$, даемъ количеству $\frac{a}{2}$ безконечно малое приращеніе δ, т. е. полагаемъ $x=\frac{a}{2}+\delta$; въ такомъ случаѣ изъ соотношенія $x+y=a$, находимъ: $y=\frac{a}{2}-\delta$; вопросъ приводится къ провѣркѣ неравенства

$$\sqrt{R-\left(\frac{a}{2}+\delta\right)^2}+\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}-\delta\right)^2}<\sqrt{4R^2-a^2}.$$

Такъ какъ обѣ части этого неравенства положительны, то возвысивъ въ квадратъ, замѣняемъ тождественнымъ ему неравенствомъ

$$4\sqrt{\left[R^2-\left(\frac{a}{2}+\delta\right)^2\right]\left[R^2-\left(\frac{a}{2}-\delta\right)^2\right]}<4R^2-a^2+4\delta^2;$$

замѣчая, что $4R^2-a^2$ положительно, можемъ еще разъ возвысить въ квадратъ, не измѣняя смысла неравенства; и по упрощеніи находимъ: $-32R^2\delta^2<+32R^2\delta^2$, что вѣрно.

658. Третій способъ.—Этотъ способъ основанъ на самомъ опредѣленіи maximum'а и minimum'а функціи. Пусть данная функція есть квадратный триномъ ax^2+bx+c, и пусть она при $x=x'$ достигаетъ maximum'а; въ такомъ случаѣ, каковъ бы ни былъ знакъ произвольно-малаго количества h, должно имѣть мѣсто неравенство

$$a(x'+h)^2+b(x'+h)+c-(ax'^2+bx'+c)<0,$$

или

$$h(2ax'+b)+ah^2<0;$$

такъ какъ h *произвольно-мало*, то первая часть неравенства имѣетъ знакъ перваго члена; поэтому она будетъ мѣнять знакъ съ перемѣною знака h, и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, пока первый членъ будетъ отличенъ онъ нуля; другими словами, неравенство можетъ существовать при измѣненіи знака h только тогда, когда первый членъ будетъ тожественно$=0$, т. е. когда $2ax'+b=0$, или $x'=-\frac{b}{2a}$. Но при этомъ значеніи x' неравенство приводится къ $ah^2<0$, и потому, чтобы оно было возможно, необходимо, чтобы было $a<0$.

Итакъ, при $a < 0$ триномъ имѣетъ maximum, когда $x' = -\frac{b}{2a}$. Самый же maximum $= \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что триномъ имѣетъ минимумъ при $x' = -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$. Самый minimum выражается тою же формулою.

Этотъ способъ, принадлежащій къ числу натуральныхъ, важенъ для насъ въ томъ отношеніи, что даетъ возможность элементарнаго опредѣленія max. и min. въ такихъ случаяхъ, въ какихъ вышеизложенные элементарные методы не примѣнимы. Найдемъ помощію этого способа

659. Maxima и minima кубичной функціи $ax^3 + bx^2 + cx + d$. — Пусть x и будетъ то значеніе перемѣннаго, при которомъ функція имѣетъ maximum или minimum; въ такомъ случаѣ, назвавши буквою h произвольно малое приращеніе перемѣннаго x, будемъ имѣть

$$a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \lesseqgtr 0,$$

гдѣ верхній знакъ неравенства относится къ случаю maximum'a, нижній — къ случаю minimum'a; по упрощеніи, найдемъ

$$(3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3 \lesseqgtr 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1).$$

Пока первый членъ, при h весьма маломъ, не равенъ нулю, первая часть будетъ мѣнять знакъ вмѣстѣ съ h, и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, или постоянно положительною, какъ требуетъ неравенство; итакъ, значенія x, дающія maximum или minimum функціи, должны удовлетворять уравненію

$$3ax^2 + 2bx + c = 0. \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2).$$

Первое условіе чтобы функція имѣла max. или min., состоитъ въ томъ, чтобы корни ур-нія (2) были дѣйствительны, т. е. чтобы $b^2 - 3ac \geq 0$; но равенство $b^2 - 3ac = 0$ необходимо исключить, ибо при немъ не м. б. ни max., ни min. Въ самомъ дѣлѣ, если $b^2 - 3ac = 0$, корни ур-нія (2) дѣйствительные и равные и общая величина ихъ $x = -\frac{b}{3a}$, откуда $3ax + b = 0$, т. е. второй членъ нер. (1) обращается въ ноль, и первая часть этого неравенства обращается въ ah^3; поэтому разность между максимальнымъ (или минимальнымъ) значеніемъ функціи, если таковое существуетъ, и смежными ея значеніями, выражается количествомъ ah^3, мѣняющимъ знакъ вмѣстѣ съ h. Итакъ, первое условіе, необходимое для того, чтобы функція имѣла max. или min., есть $b^2 - 3ac > 0$.

Пусть это условіе удовлетворяется; въ такомъ случаѣ корни ур-нія (2) будутъ дѣйствительные и неравные, и сл. будутъ отличны отъ $-\frac{b}{3a}$, т. е. необходимо будетъ:

$$3ax' + b \lesseqgtr 0, \quad 3ax'' + b \lesseqgtr 0.$$

Пусть $x' < x''$; тогда

$$x' < -\frac{b}{3a} < x'' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

ибо $-\frac{b}{3a}$ есть полусумма корней.

Затѣмъ различаемъ два случая.

Первый случай: $a > 0$. Неравенства (3) въ этомъ случаѣ можно представить въ видѣ:

$$3ax' < -b < 3ax'',$$

откуда

$$3ax' + b < 0 \quad \text{и} \quad 3ax'' + b > 0;$$

слѣд. каковъ бы ни былъ знакъ весьма малаго количества h, будетъ

$$(3ax' + b)h^2 + ah^3 < 0 \quad \text{и} \quad (3ax'' + b)h^2 + ah^3 > 0.$$

Первое неравенство показываетъ, что приращенія функціи при значеніяхъ x, смежнымъ съ x', отрицательны, а при значеніяхъ x, смежныхъ съ x'', положительны, слѣд.: при $x = x'$ функція имѣетъ maximum, а при $x = x''$ она имѣетъ minimum.

Второй случай: $a < 0$. — Неравенства (3) въ этомъ случаѣ, по умноженіи на положит. количество $-3a$, даютъ:

$$3ax' + b > 0 \quad \text{и} \quad 3ax'' + b < 0;$$

слѣд. каковъ бы ни былъ знакъ h, имѣемъ два неравенства:

$$(3ax' + b)h^2 + ah^3 > 0 \quad \text{и} \quad (3ax'' + b)h^2 + ah^3 < 0,$$

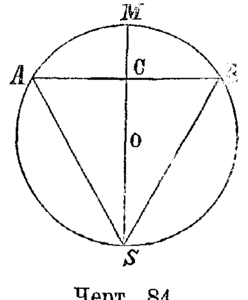
изъ которыхъ выводимъ заключеніе, обратное предыдущему.

Отсюда *правило: чтобы найти maxima или minima кубичной функціи $ax^3 + bx^2 + cx + d$, приравниваемъ нулю полиномъ $3ax^2 + 2bx + c$, составляемый умноженіемъ каждаго члена функціи на показателя буквы x въ этомъ членѣ, и уменьшеніемъ этого показателя на 1* *); *так. обр. получаемъ уравненіе*

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Если $b^2 - 3ac \leqslant 0$, функція не имѣетъ ни max., ни minimum'a; если же $b^2 - 3ac > 0$, меньшему корню ур-нія (1) соотвѣтствуетъ maximum, а большему minimum, когда $a > 0$; напротивъ, меньшему корню соотвѣтствуетъ minimum, а большему — maximum, когда $a < 0$.

660. Примѣръ. — *Найти maximum и minimum разности объемовъ: конуса, вписаннаго въ данный шаръ и сферическаго сегмента, имѣющаго тоже основаніе.*



Черт. 84.

Вопросъ можно понимать двояко, а именно: высота конуса можетъ совпадать или не совпадать съ высотою сегмента. Въ первомъ предположеніи, означивъ MC буквою x, имѣемъ:

объемъ конуса $\quad SAB = \frac{1}{3}\pi x(2R - x)^2;$

объемъ сегмента $ABS = \frac{1}{3}\pi(2R - x)^2(3R - SC)$

$$= \frac{1}{3}\pi(2R - x)^2(R + x).$$

---

*) Изъ этого слѣдуетъ, что послѣднимъ членомъ новаго полинома будетъ c, ибо послѣдній членъ данной функціи, который можно написать въ видѣ dx^0, дастъ, слѣдуя этому закону, $0 . dx^{-1}$, или 0.

Разность между первымъ и вторымъ объемомъ выражается формулою: $-\frac{1}{3}\pi R(2R-x)^2$. Такъ какъ множитель $-\frac{1}{3}\pi R$ — постояненъ, то измѣненія выраженія зависятъ отъ $(2R-x)^2$; но это выраженіе есть квадратъ, слѣд. оно имѣетъ minimum равный нулю, что имѣетъ мѣсто при $x=2R$; а слѣд. выраженіе $-\frac{1}{3}\pi(2R-x)R$ имѣетъ maximum при $x=2R$, а какъ при этомъ x не можетъ, возрастая, превзойти $2R$, то полученный maximum есть абсолютный.

Во второмъ предположеніи:

$$\text{объемъ сегмента } AMB = \frac{1}{3}\pi x^2(3R-x),$$

слѣд. разность между конусомъ и сегментомъ равна $\frac{1}{3}\pi x(2R-x)^2-\frac{1}{3}\pi x^2(3R-x)$

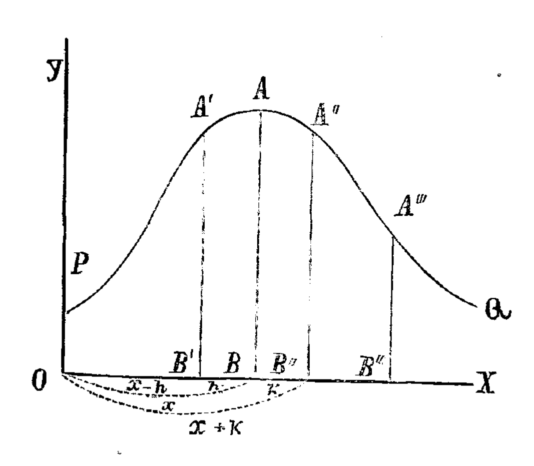
или
$$\frac{1}{3}\pi[2x^3-7Rx^2+4R^2x].$$

Измѣненія зависятъ отъ перемѣннаго множителя $2x^3-7Rx^2+4R^2x$, представляющаго кубичную функцію; значенія x, дающія этой функціи maximum и minimum, по правилу, суть корни квадратнаго уравненія

$$3.2x^2-2.7Rx+4R^2=0, \quad \text{или} \quad 6x^2-14Rx+4R^2=0.$$

Эти корни суть: $x'=\frac{R}{3}$, $x''=2R$; а какъ коэффиціентъ при x^2 положителенъ, по меньшему корню соотвѣтствуетъ maximum разности объемовъ $\frac{17\pi R^3}{81}$, а большему ея minimum $-\frac{4}{3}\pi R^3$, причемъ этотъ minimum — абсолютный.

661. Принципъ Фермата. — Знаменитый французскій математикъ Ферматъ, въ одномъ изъ своихъ писемъ къ Паскалю и Робервалю, отъ 23 августа 1636 г. заявляетъ, что изъ всѣхъ своихъ открытій наибольшее значеніе онъ придаетъ методу опредѣленія максимальныхъ и минимальныхъ значеній во всевозможныхъ задачахъ, основанному на принципѣ, который онъ считаетъ фундаментальнымъ. Этотъ принципъ легко понять, разсматривая функцію какъ ординату кривой.



Черт. 85.

Пусть ордината AB представляетъ максимальное состояніе разсматриваемой функціи, а обсцисса $OB=x$ соотвѣтствующее значеніе перемѣннаго. Принципъ Фермата состоитъ въ томъ, что всегда существуютъ такія два значенія независимаго перемѣннаго—одно $x-h$, немного меньшее x, другое $x+k$, немного большее x, которымъ соотвѣтствуютъ два значенія функціи: $f(x-h)$ и $f(x+k)$ (или двѣ

ординаты $A'B'$ и $A''B''$) равныя между собою. Въ самомъ дѣлѣ, функція, возрастая, и приближаясь къ своему maximum'у AB, пройдетъ чрезъ свое значеніе $f(x-h)$, безконечно-близкое къ этому maximum'у AB; затѣмъ, достигнувъ maximum'а, она начнетъ убывать и, прежде чѣмъ дойдетъ до нѣкотораго состоянія $A'''B'''$, меньшаго AB, должна, по свойству непрерывности, пройти всѣ промежуточныя состоянія, слѣд., между прочимъ, пройдетъ и чрезъ состояніе $A''B''$ или $f(x+k)$, равное $A'B'$ или $f(x-h)$ и безконечно-близкое къ AB.

Такое же равенство имѣло-бы мѣсто и тогда, если бы AB изображала minimum функціи.

Отсюда непосредственно вытекаетъ и самый методъ. Приравниваемъ два значенія функіи, одно, соотвѣтствующее $x-h$, другое $x+k$, гдѣ x есть значеніе перемѣннаго, дающее maximum или minimum функціи, а h и k безконечно-малыя; такимъ образомъ получаемъ уравненіе $f(x-h)=f(x+k)$. Очевидно, что если значенія перемѣннаго $x-h$ и $x+k$, дающія равныя значенія функціи, сближать между собою, т. е. приближать h и k къ нулю, то оба значенія функціи будутъ приближаться къ maximum'у (или min), и въ предѣлѣ, т. е. при $h=k=0$, сольются съ maximum'омъ (или min.), а оба значенія перемѣннаго сольются съ тѣмъ значеніемъ, которое соотвѣтствуетъ maximum'у (или min.). Такимъ образомъ, въ предѣлѣ получится ур-ніе въ x: $\varphi(x)=0$, которому будетъ удовлетворять значеніе перемѣннаго x, дающее или maximum или minimum. Рѣшивъ это ур-ніе, найдемъ, вообще говоря, нѣсколько значеній для x, напр. $x=a, b, c, \ldots$ Ничто не указываетъ, чтобы всѣ эти рѣшенія давали maximum или minimum функціи; слѣд. для каждаго нужна повѣрка. Впрочемъ, если ур-ніе $\varphi(x)=0$ имѣетъ только одно рѣшеніе, и по свойству вопроса можно à priori заключить, что $f(x)$ имѣетъ max. или min., повѣрка будетъ не необходима.

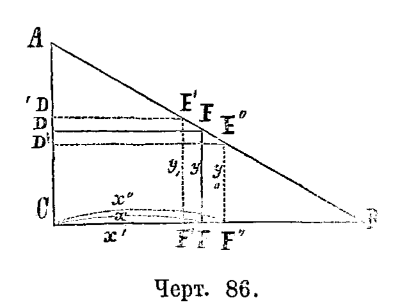
На практикѣ поступаемъ такъ. Выразивъ всѣ неизвѣстныя черезъ одно x и положивъ $x-h=x'$, $x+k=x''$, въ ур-ніи $f(x')=f(x'')$ дѣлаемъ упрощенія, удаляя общія части и сокращая на $x'-x''$, въ оставшихся членахъ дѣлаемъ $x'-x''$ равнымъ нулю, послѣ чего и получаемъ ур-ніе $\varphi(x)=0$.

Методъ Ферматa есть болѣе общій изъ числа элементарныхъ методовъ опредѣленія максим. и миним. значеній функціи. Въ историческомъ отношеніи онъ важенъ тѣмъ, что послужилъ зародышемъ, изъ котораго позднѣе развилось дифференціальное исчисленіе.

662. Примѣръ I. — *Изъ какой точки гипотенузы даннаго прямоугольнаго треугольника нужно опустить перпендикуляры на катеты, чтобы прямоугольникъ, образуемый ими со сторонами прямаго угла, имѣлъ наибольшую площадь.*

Взявъ точку E на гипотенузѣ и опустивъ изъ нея перпендикуляры ED и EF на катеты, образуемъ прямоугольникъ EDCF; когда точка E совпадаетъ съ A, прямоугольникъ превращается въ прямую AC, а его площадь въ нуль; если затѣмъ двигать точку E отъ A къ B, то площадь прямоугольника сначала будетъ увеличиваться, а потомъ начинаетъ уменьшаться, и когда точка E совпадаетъ съ B, площадь снова обращается въ ноль. Такимъ образомъ, измѣняясь отъ нуля до нуля, она необходимо проходитъ чрезъ maximum.

Пусть въ положеніи EDCF прямоугольникъ имѣемъ наибольшую площадь xy. По принципу Фермата, всегда существуютъ такіе два безконечно близкіе къ DEFC прямоугольника D′E′F′C и D″E″F″C, которыхъ площади равны, т. е.



Черт. 86.

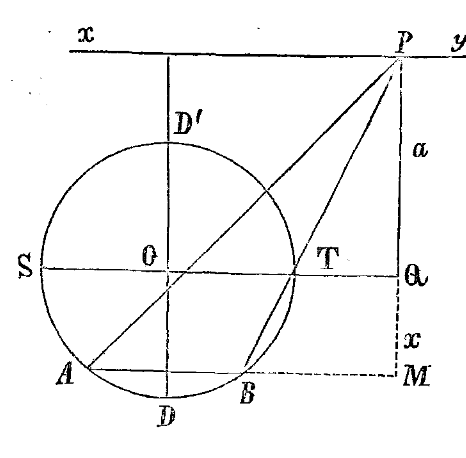
$$x'y' = x''y'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Чтобы y выразить черезъ x, замѣчаемъ, что для всякаго положенія прямоугольника между его измѣреніями существуетъ соотношеніе (напр. изъ подобія $\triangle$-въ BEF и BAC), выражающееся пропорціей $y:(a-x)=b:a$, откуда $y=\frac{b}{a}(a-x)$. Въ силу этого соотношенія можно исключить перемѣнное y и представить (1) въ формѣ

$$\frac{b}{a}x'\left(a-x'\right)=\frac{b}{a}x''\left(a-x''\right),$$

откуда: $ax'-x'^2=ax''-x''^2$, или $a(x'-x'')=(x'+x'')(x'-x'')$. Сокративъ на $x'-x''$, имѣемъ: $a=x'+x''$. Положивъ $x'=x''=x$, получимъ ур-ніе $2x=a$, котораго корень $x=\frac{a}{2}$ даетъ искомый maximum. Отсюда, изъ вышеприведенной пропорціи, найдемъ: $y=\frac{b}{2}$. Эти результаты показываютъ, что maximum площади прямоугольника даетъ точка, лежащая въ срединѣ гипотенузы. Самый же maximum площади $=\frac{ab}{4}$ (половина площади $\triangle$-ка).

663. Примѣръ II. — *Данъ кругъ и прямая xy. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершину въ точкѣ* P, *данной на этой прямой, а основаніемъ хорду* AB, *параллельную этой прямой, найти тотъ, площадь котораго имѣетъ наибольшую величину.*



Черт. 87.

Различаемъ два случая, смотря по тому, пересѣкаетъ данная прямая xy кругъ O или нѣтъ.

I. Пусть прямая xy не пересѣкаетъ кругъ O. Задача имѣетъ maximum, потому-что если перемѣщать хорду AB параллельно xy, отъ D′ къ D, она будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, а слѣд. такимъ же образомъ будетъ измѣняться и площадь треугольника: послѣдняя имѣетъ, по этому, maximum. Затѣмъ, замѣчаемъ, что если перемѣщать хорду отъ D′ къ ST, площадь треуг-ка будетъ увеличиваться, ибо увеличивается высота и основаніе его. Въ другомъ полукругѣ, по мѣрѣ удаленія хорды отъ центра, она уменьшается, высота же увеличивается, по этому здѣсь и слѣдуетъ искать maximum.

Пусть хорда $AB = 2y$, разстояніе ея OC отъ центра равно x, радіусъ круга $= R$, перпендикуляръ $PQ = a$. Пусть площадь максимальная соотвѣтствуетъ $OC = x$, эта площадь $= (a + x)\sqrt{R^2 - x^2}$.

По принципу Фермата имѣемъ

$$(a + x')\sqrt{R^2 - x'^2} = (a + x'')\sqrt{R^2 - x''^2}.$$

Возвышая въ квадратъ, тотчасъ же освободили бы ур. отъ радикаловъ, но для опредѣленія x получили бы кубичное ур-ніе. Слѣдующій пріемъ позволяетъ привести вопросъ къ рѣшенію квадратнаго ур-нія. Даемъ уравненію видъ

$$a(\sqrt{R^2 - x'^2} - \sqrt{R^2 - x''^2}) = x''\sqrt{R^2 - x''^2} - x'\sqrt{R^2 - x'^2}.$$

Умножая и дѣля первую часть на сумму радикаловъ этой части, а вторую на сумму членовъ этой части, имѣемъ:

$$a \cdot \frac{x''^2 - x'^2}{\sqrt{R^2 - x'^2} + \sqrt{R^2 - x''^2}} = \frac{R^2(x''^2 - x'^2) - (x''^4 - x'^4)}{x''\sqrt{R^2 - x''^2} + x'\sqrt{R^2 - x'^2}}.$$

Раздѣливъ обѣ части на $x''^2 - x'^2$ и положивъ затѣмъ $x' = x'' = x$, получаемъ ур-ніе

$$\frac{a}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - 2x^2}{2x\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \text{или} \quad 2x^2 + ax - R^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8R^2}}{4}.$$

Отрицательный корень отбрасываемъ, ибо въ верхнемъ полукругѣ, съ пониженіемъ хорды идетъ постепенное увеличеніе площади $\triangle$-ка. Итакъ, x соотвѣствующій максимальной площади, равенъ

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 8R^2}}{4}.$$

Корень этотъ дѣйствительно меньше R, ибо подстановка 0 и R вмѣсто x въ триномъ $2x^2 + ax - R^2$ даетъ результаты противоположнаго знака: $-R^2$ и $R^2 + aR$.

Въ частномъ случаѣ, когда прямая xy касается къ кругу, $a = R$, и $x = \frac{1}{2}R$. — Когда точка P совпадаетъ съ D′ (точкою касанія), треугольникъ D′AB - равнобедренный и вписанный; площадь его $= \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$. Итакъ: *изъ всѣхъ равнобедренныхъ вписанныхъ треугольниковъ—правильный имѣетъ наибольшую площадь.*

II. Если прямая xy пересѣкаетъ кругъ, то для каждой части круга получается maximum. Къ большему сегменту относится разобранный случай; для меньшаго изъ ур-нія $(x' - a)\sqrt{R^2 - x'^2} = (x'' - a)\sqrt{R^2 - x''^2}$

находимъ:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8R^2}}{4}.$$

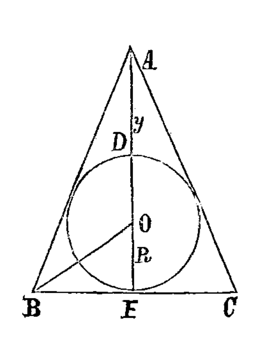
Если параллель проходитъ черезъ центръ, то $a = 0$, и $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

664. Методъ равныхъ корней.—Пусть кривая PAQ (Черт. 85) изображаетъ ходъ функціи $f(x)$; давая функціи частное значеніе m и рѣшая ур-ніе $f(x)-m=0$, мы опредѣляемъ тѣ значенія x, при которыхъ функція получаетъ эту величину m. Съ геометрической точки зрѣнія это приводится къ опредѣленію точекъ встрѣчи кривой съ параллелью, проведенною въ разстояніи m отъ оси x. Когда m мало разнится отъ maximum'а AB, мы находимъ для x двѣ величины OB′ и OB″, мало разнящіяся между собою; они дѣлаются равными между собою и OB, когда m обращается въ AB. Итакъ, когда цѣлая въ x функція получаетъ при $x=\alpha$ maximum m', уравненіе $f(x)-m'=0$ имѣетъ два корня равные α, и слѣд. его первая часть раздѣлится на $(x-\alpha)^2$. Въ самомъ дѣлѣ: если ур. $f(x)-m=0$ имѣетъ корни α' и α'', то $f(\alpha')-m=0$ и $f(\alpha'')-m=0$; первое равенство показываетъ, что $f(x)-m$ дѣлится на $x-\alpha'$, второе, что тотъ же полиномъ дѣлится на $x-\alpha''$; сл. онъ дѣлится и на $(x-\alpha')(x-\alpha'')$, и при $\alpha'=\alpha''$, на $(x-\alpha)^2$. Отсюда правило:

Чтобы найти maximum цѣлой функціи, дѣлимъ разность $f(x)-m$ *на* $(x-\alpha)^2$ *или на* $x^2-2\alpha x+\alpha^2$, *продолжая дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ первой степени, вида* $Mx+N$; *выражаютъ, что этотъ остатокъ тождественно равенъ нулю при всякомъ* x, *полагая* $M=0$, $N=0$; *рѣшивъ эти уравненія, и найдемъ* $x=\alpha$, *соотвѣтствующій maximum'у, и самый этотъ maximum* m.

Очевидно, то-же относится и къ minimum'у функціи.

665. Примѣръ. — *Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, описанныхъ около круга, найти тр-къ наименьшей площади.*



Черт. 88.

Если перемѣщать вершину A по высотѣ AE отъ D до безконечности, то площадь $\triangle$-ка будетъ измѣняться отъ ∞ до ∞, слѣд. имѣетъ minimum. Пусть половина основанія равна x, высота $=R+y$; чтобы выразить y черезъ x, изъ $\triangle$ ABE, по свойству биссектриссы, имѣемъ $y:R=AB:x$, или $y^2:R^2=[(y+R)^2+x^2]:x^2$, откуда найдемъ: $y=\frac{R(R^2+x^2)}{x^2-R^2}$. Подставляя это выраженіе въ формулу площади тр-ка, получимъ

$$\triangle ABC=x(y+R)=x\left(\frac{R(R^2+x^2)}{x^2-R^2}+R\right)=\frac{2Rx^3}{x^2-R^2}.$$

Вопросъ приводится къ нахожденію minimum'а выраженія $\frac{x^3}{x^2-R^2}$. Приравнивая это выраженіе m, получаемъ ур-ніе

$$x^3-mx^2+mR^2=0.$$

Раздѣливъ первую часть его на $x^2-2\alpha x+\alpha^2$, находимъ въ остаткѣ $(3\alpha^2-2\alpha m)x+(mR^2-2\alpha^3+\alpha^2 m)$, откуда, слѣдуя правилу, имѣемъ 2 ур-нія

$$3\alpha^2-2\alpha m=0,\quad mR^2-2\alpha^3+\alpha^2 m=0.$$

Изъ перваго находимъ: $m=\frac{3}{2}\alpha$; подставляя во второе, получаемъ: $x=$

$R\sqrt{3}$; слѣд. $m=\frac{3}{2}R\sqrt{3}$, а минимальная площадь $=3R^2\sqrt{3}$: заключаемъ, что искомый треугольникъ—правильный.

II. Maxima и minima квадратной дроби $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

666. Первый методъ. — Нужно опредѣлить x такъ, чтобы при всякомъ знакѣ безконечно—малаго h, имѣло мѣсто неравенство

$$\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c}{a'(x+h)^2+b'(x+h)+c'}-\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\lesseqgtr 0,$$

гдѣ знакъ $<$ относится къ случаю maximum'а дроби, знакъ $>$ къ случаю ея minimum'а.

Умножая на произведеніе знаменателей, которое положительно, ибо полиномъ $a'(x+h)^2+b'(x+h)+c'$, разнясь безконечно мало отъ $a'x^2+b'x+c'$, имѣетъ одинаковый съ нимъ знакъ, находимъ неравенство:

$$[a(x+h)^2+b(x+h)+c][a'x^2+b'x+c']-$$
$$-[a'(x+h)^2+b'(x+h)+c'](ax^2+bx+c)\lesseqgtr 0,$$

которое, будучи упрощено и расположено по возрастающимъ степенямъ h, приводится къ:

$$h[(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb']+h^2[(ab'-ba')x+ac'-ca']\lesseqgtr 0 \quad . \ . \ . \ (1).$$

Чтобы это выраженіе не перемѣняло знака вмѣстѣ съ h, коэффиціентъ при h долженъ быть нулемъ; слѣд. значенія x, которыя могутъ дать дроби максимальное или минимальное значеніе, суть корни уравненія:

$$(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Итакъ первое условіе, чтобы дробь имѣла maximum или minimum, состоитъ въ томъ, чтобы ур. (2) имѣло корни дѣйствительные, т. е. чтобы было

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')\geq 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Взявъ равенство, т. е. полагая, что ур. (2) имѣетъ корни равные, находимъ, что общая величина ихъ опредѣляется равенствомъ: $x=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$, откуда

$$x(ab'-ba')+ac'-ca'=0;$$

отсюда слѣдуетъ, что неравенство (1) привело бы къ равенству $0=0$, каково бы ни было h: въ этомъ случаѣ, слѣд., дробь не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а.

Обращаясь къ равенству $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$, замѣчаемъ, что, какъ доказано въ § 490, оно выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы два ур-нія $ax^2+bx+c=0$ и $a'x^2+b'x+c'=0$ имѣли общій корень, именно: $x_1=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$; сл. оба члена дроби дѣлятся на $x-x_1$ и по сокращеніи, дробь приводится къ $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}$, а это выраженіе не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а (§ 602).

Итакъ, пусть существуетъ неравенство (3), и пусть x' и x'' суть два корня ур-нія (2), причемъ $x' < x''$; сравнивая ихъ съ полусуммою корней, имѣемъ неравенства

$$x' < -\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} < x''.$$

1-й случай: $ab'-ba' > 0$. Предыдущія неравенства тождественны слѣдующимъ:

$$(ab'-ba')x' + ac' - ca' < 0, \qquad (ab'-ba')x'' + ac' - ca' > 0.$$

Отсюда выводимъ:

$$[(ab'-ba')x' + (ac'-ca')]h^2 < 0, \quad [(ab'-ba')x'' + (ac'-ca')]h^2 > 0.$$

Первое условіе выражаетъ, что величинѣ x' соотвѣтствуетъ maximum дроби, а второе, что большему корню x'' отвѣчаетъ minimum дроби.

2-й случай: $ab'-ba' < 0$. — Умножая на положительное количество $-(ab'-ba')$, находимъ

$$[(ab'-ba')x' + ac' - ca']h^2 > 0 \quad \text{и} \quad [(ab'-ba')x'' + ac' - ca']h^2 < 0;$$

заключенія обратны предыдущимъ.

3-й случай: $ab'-ba' = 0$. — Ур-ніе (2) въ этомъ случаѣ дѣлается 1-й степени, а потому дробь имѣетъ maximum или minimum, смотря потому, отрицательно $ac'-ca'$ или положительно, ибо неравенство (1) приводится къ $h^2(ac'-ca') \lesseqgtr 0$.

Наконецъ, если бы сверхъ того имѣли $ac'-ca' = 0$, и слѣд. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, дробь не имѣла бы ни maximum'a, ни minimum'a: она имѣла бы постоянную величину $\frac{a}{a'}$, при всякомъ x. Этотъ анализъ приводитъ къ слѣдующему правилу нахожденія maximum'a и minimum'a квадратной дроби:

Составляемъ уравненіе:

$$(ab'-ba')x^2 + 2(ac'-ca')x + bc' - cb' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Если его корни равные или мнимые, дробь не имѣетъ ни maximum'a, ни minimum'a; если же корни дѣйствительные и неравные, то меньшему корню соотвѣтствуетъ maximum, большему minimum, если коэффиціентъ $ab'-ba'$ положителенъ; напротивъ, меньшему корню отвѣчаетъ minimum, а большему maximum, если $ab'-ba' < 0$; если же $ab'-ba' = 0$, дробь имѣетъ maximum или minimum, смотря потому, будетъ ли $ac'-ca' < 0$ или > 0.

Примѣръ I. — *Найти maximum и minimum дроби* $\frac{5x-1}{4x^2}$.

Уравненіе, аналогичное (2), въ данномъ случаѣ есть: $-20x^2 + 8x = 0$, откуда:

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{2}{5}.$$

Меньшему корню соотвѣтствуетъ абсолютный minimum дроби, равный $-\infty$; большему корню — maximum, равный $\frac{25}{16}$.

Примѣръ II. — *Найти maximum и minimum дроби* $\frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$.

Уравненіе, дающее значенія x, обращающія дробь въ maximum и minimum, въ данномъ случаѣ есть

$$-bx^2+2(a-c)x+b=0.$$

Корни этого ур-нія всегда дѣйствительные и неравные, ибо подрадикальное количество есть сумма двухъ квадратовъ. Такимъ образомъ, если $b>0$, дробь имѣетъ

$$\text{maximum} = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}, \text{ при } x=\frac{a-c+\sqrt{(a-c)+b^2}}{b}; \text{ и}$$

$$\text{minimum} = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}, \text{ при } x=\frac{a-c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{b}.$$

Обратно—если $b<0$.

667. Второй методъ. — Приравнявъ дробь произвольному, но опредѣленному, количеству m, опредѣлимъ, при какихъ значеніяхъ перемѣннаго x она можетъ имѣть эту величину m. Искомыя значенія x дастъ ур-ніе

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m, \quad \text{или} \quad (a-a'm)x^2+(b-b'm)x+c-c'm=0,$$

изъ котораго

$$x=\frac{-(b-b'm)\pm\sqrt{(b-b'm)^2-4(a-a'm)(c-c'm)}}{2(a-a'm)},$$

или, расположивъ подрадикальное количество по степенямъ m, найдемъ:

$$x=\frac{b'm-b\pm\sqrt{(b'^2-4a'c')m^2+2(2ac'+2ca'-bb')m+b^2-4ac}}{2(a-a'm)}.$$

Положивъ

$$b'^2-4a'c'=P, \quad 2ac'+2ca'-bb'=Q, \quad b^2-4ac=R,$$

дадимъ подрадикальному количеству видъ

$$Pm^2+2Qm+R \text{ . . . . (1).}$$

Для того, чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательнымъ, т. е. чтобы было

$$Pm^2+2Qm+R \geqslant 0 \text{ . . . . (2).}$$

Итакъ, m можетъ измѣняться только въ предѣлахъ, удовлетворяющихъ этому неравенству; соотвѣтствующія значенія x получатся изъ формулы

$$x=\frac{b'm-b\pm\sqrt{Pm^2+2Qm+R}}{2(a-a'm)} \text{ . . . . (3).}$$

Здѣсь могутъ представиться три случая: $Q^2-PR>0$, $Q^2-PR=0$ и $Q^2-PR<0$.

Первый случай: $Q^2-PR>0$. — Корни тринома (1) будутъ дѣйствительные неравные: пусть меньшій корень будетъ m', большій m''. Извѣстно, что при всякомъ значеніи m, лежащемъ внѣ корней, знакъ тринома (1) одинаковъ съ знакомъ коэффиціента P; при всѣхъ же значеніяхъ m, лежащихъ между корня-

ми, знакъ тринома противоположенъ знаку P. Отсюда необходимость различать два случая:

1. $P > 0$. Неравенство (2) будетъ удовлетворено, если количеству m будемъ давать значенія, лежащія внѣ корней тринома (1); такимъ образомъ дробь m можетъ принимать два ряда значеній: отъ $-\infty$ до m' и отъ m'' до $+\infty$. Заключаемъ, что m' есть наибольшее значеніе перваго ряда, а m''—наименьшее значеніе втораго ряда, т. е. *maximum дроби равенъ меньшему корню тринома* (1), *а minimum—большему его корню*; и дробь не имѣетъ значеній между корнями тринома. Когда дробь принимаетъ максимальное и минимальное значеніе, подрадикальное количество формулы (3) обращается въ ноль, и

$$x = \frac{b'm - b}{2(a - a'm)};$$

подставивъ сюда m' вмѣсто m, найдемъ x, соотвѣтствующій maximum'у дроби, а замѣнивъ m количествомъ m'', найдемъ x, соотвѣтствующій minimum'у.

2. $P < 0$. Неравенство (2) будетъ удовлетворено, если количеству m дадимъ значенія, лежащія между корнями тринома (1); такимъ образомъ дробь m можетъ имѣть всѣ значенія въ предѣлахъ: $m'' \geqslant m \geqslant m'$, т. е. *меньшій корень тринома* (1) *есть minimum дроби, а большій—ея maximum*. Соотвѣтствующія значенія x вычисляются по прежней формулѣ.

Примѣры.—1. *Найти maximum и minimum дроби* $\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$.

Приравнявъ данную дробь произвольному количеству m, рѣшаемъ ур.

$$\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14} = m, \text{ или } x^2 - (2 + 6m)x + (14m + 21) = 0,$$

откуда

$$x = 1 + 3m \pm \sqrt{9m^2 - 8m - 20}.$$

Корни подрадикальнаго тринома суть: 2 и $-\frac{10}{9}$. Такъ какъ въ данномъ случаѣ $P > o$, то заключаемъ, что maximum дроби равенъ меньшему корню, а minimum—большему; слѣд.

$$\max. (m) = -\frac{10}{9}; \ \text{minimum } (m) = 2.$$

Подставивъ въ формулу x вмѣсто m, сперва $\left(-\frac{10}{9}\right)$, а потомъ 2, и замѣчая, что при этихъ значеніяхъ m подрад. колич. обращается въ ноль, находимъ:

$$x_{(\max.)} = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}; \quad x_{(\min.)} = 1 + 3 \,.\, 2 = 7.$$

2. *Найти max. и min. дроби* $\frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Приравнявъ дробь количеству m, и рѣшивъ полученное ур. относительно x, имѣемъ

$$x = \frac{5 - m \pm \sqrt{-3m^2 - 2m + 2}}{2(1-m)}.$$

Корни подрадикальнаго тринома суть: -3 и $+2\frac{1}{3}$; а какъ $P < 0$, то за-

ключаемъ, что большій корень есть maximum дроби, меньшій — ея minimum; итакъ

$$\text{max. } (m) = 2\frac{1}{3}; \text{ minimum } (m) = -3.$$

Вычисливъ соотвѣтствующія значенія x по формулѣ $x = \frac{5-m}{2(1-m)}$ находимъ: $x_{\text{max.}} = -1$; $x_{\text{min.}} = +1$.

Второй случай: $Q^2 - PR = 0$.—Триномъ (1) имѣетъ корни дѣйствительные равные и общая величина ихъ $= -\frac{Q}{P}$; триномъ принимаетъ видъ $P\left(m + \frac{Q}{P}\right)^2$, а условіе дѣйствительности x — видъ:

$$P\left(m + \frac{Q}{P}\right)^2 \geqq 0.$$

Заключаемъ, что триномъ всегда имѣетъ знакъ количества P. Отсюда:

1. $P > 0$. При всякомъ m триномъ (1) остается положительнымъ, а при $m = -\frac{Q}{P}$ обращается въ ноль, слѣд. дробь можетъ имѣть какую угодно величину, и слѣд. нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а. Это можно было предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ: $Q^2 - PR = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')$; но въ данномъ случаѣ это выраженіе $= 0$, а мы видѣли (§ 490), что при такомъ условіи триномы $ax^2 + bx + c$ и $a'x^2 + b'x + c'$ имѣютъ одинъ общій корень, а слѣд. оба члена дроби—общаго множителя; сокративъ его, найдемъ

$$m = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}.$$

Отсюда видно, что задача всегда возможна; всегда найдемъ для x одну величину, и только одну, при которой дробь принимаетъ данную величину.

2. $P < 0$. Въ этомъ случаѣ триномъ (1) будетъ отрицателенъ при всякомъ m, кромѣ $m = -\frac{Q}{P}$; слѣд. какую бы величину дробь m ни имѣла, кромѣ величины $-\frac{Q}{P}$, x остается мнимымъ, и только при $m = -\frac{Q}{P}$, онъ дѣйствителенъ; слѣд., наоборотъ, всякая дѣйствительная величина x должна дѣлать дробь равною $\left(-\frac{Q}{P}\right)$, иначе говоря, дробь должна имѣть постоянную величину, а слѣд. не имѣетъ ни max., ни min.

Можно доказать непосредственно, что когда совмѣстно имѣемъ $P < 0$ и $Q^2 - PR = 0$, то дробь имѣетъ постоянную величину. Въ самомъ дѣлѣ

$$Q^2 - PR = a'c'\left[b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'}\right]^2 + \frac{4a'c' - b'^2}{4a'c'}(ac' - ca')^2 \quad . \quad . \quad (4)$$

Но P или $b'^2 - 4a'c' < 0$, слѣд. $4a'c' - b'^2 > 0$, откуда $4a'c' > 0$; слѣд. $Q^2 - PR$ есть сумма двухъ существенно-положительныхъ количествъ, и потому м. б. нулемъ только тогда, когда каждое изъ этихъ количествъ въ отдѣльности $= 0$; итакъ, должно быть:

$$b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1) \quad \text{и} \quad ac' - ca' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

или, замѣнивъ въ (1) c' его величиною, выведенною изъ (2):

$$\begin{cases} 2bc \cdot \frac{a'^2}{a^2} - 2b'ca' = 0, \text{ или } \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \end{cases}$$

т. е.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

но мы видѣли (§ 491), что при этихъ условіяхъ дробь имѣетъ постоянную величину, не зависитъ отъ x.

Примѣчаніе. З а д а ч а: *найти прямо условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы дробь* $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ *имѣла постоянную величину при всякомъ* x?

1-й способъ. Оставаясь постоянною при всякомъ x, дробь должна имѣть одну и ту же величину и для трехъ различныхъ значеній x, напр. для $x=0$, $x=-1$ и $x=+1$; слѣд. должно быть:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'},$$

откуда, по § 329, найдемъ:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a+c}{a'+c'} = \frac{b}{b'}, \text{ или, наконецъ, } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Эти условія, будучи необходимы, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны; ибо какъ скоро они выполнены, то, назвавъ общую величину равныхъ отношеній буквою k, найдемъ: $a=a'k$, $b=b'k$, $c=c'k$, и дробь беретъ видъ $\frac{k(a'x^2+b'x+c')}{a'x^2+b'x+c'}$, т. е. $=k$.

2-й способъ. Пусть постоянная, впрочемъ, неизвѣстная, величина дроби будетъ k. Положить $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=k$ значитъ положить, что $ax^2+bx+c=k(a'x^2+b'x+c')$, или $(a-a'k)x^2+(b-b'k)x+c-c'k=0$, каковъ бы ни былъ x. Отсюда, по § 72, заключаемъ, что

$$a-a'k=0, \quad b-b'k=0, \quad c-c'k=0, \text{ или } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Третій случай. $Q^2-PR<0$. Въ этомъ случаѣ корни тринома (1) мнимые, слѣд. триномъ всегда сохраняетъ знакъ коэффиціента P. Отсюда:

1. $P>0$. Подрадикальное количество формулы x будетъ при всякомъ m положительно, а сл. x дѣйствителенъ; такимъ обр. дробь m можетъ имѣть какую угодно величину, и слѣд. не имѣетъ ни maximum'a, ни min.

2. $P<0$. Подрадикальное колич. формулы x будетъ существенно-отрицательно, слѣд. при всякомъ m для x будетъ получаться мнимое значеніе; а слѣд. обратно, какое-бы дѣйствительное значеніе мы ни дали перемѣнному x, дробь m не можетъ получить дѣйствительнаго значенія. Но это заключеніе, очевидно, нелѣпо, ибо изъ ур-нія $m=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ видно, что дѣйствительному зна-

ченію x соотвѣтствуетъ дѣйствительное же значеніе дроби m. Стало-быть, случай совмѣстнаго существованія условій: $P < 0$ и $Q^2 - PR < 0$ невозможенъ.

Впрочемъ, можно доказать это и прямо; въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (4) видно, что когда $P < 0$, выраженіе $Q^2 - PR$ представляетъ сумму двухъ квадратовъ, а такая сумма никогда не можетъ быть отрицательною.

Частные случаи. Когда $P = 0$, подрадикальное выраженіе формулы x обращается въ $2Qm + R$. Чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы $2Qm + R \gtreqless 0$, или $2Qm \gtreqless -R$. Отсюда:

1) Если $Q > 0$, то $m \gtreqless -\frac{R}{2Q}$, слѣд. min. $(m) = -\frac{R}{2Q}$: дробь имѣетъ только min., и не имѣетъ max.

2) Если $Q < 0$, то $m \lesseqgtr -\frac{R}{2Q}$, откуда max. $(m) = -\frac{R}{2Q}$: дробь имѣетъ только maximum, и не имѣетъ min.

3) Если $Q = 0$, неравенство приводится къ $R \gtreqless 0$: оно всегда удовлетворяется; ибо въ этомъ случаѣ $b^2 - 4ac = \frac{(ac' - ca')^2}{a'c'}$, гдѣ $a'c' > 0$, т. к. $b'^2 - 4a'c' = 0$. Слѣд. всякому значенію m отвѣчаетъ дѣйствительное значеніе x^{ca}: дробь не имѣетъ ни max., ни min.

Изслѣдованіе приводитъ къ слѣдующему результату: *Когда корни тринома* $Pm^2 + 2Qm + R$ *мнимые или дѣйствительные равные, дробь не имѣетъ ни max., ни min.; если же корни этого тринома дѣйствительные неравные, дробь имѣетъ maximum и minimum, выражаемыя корнями тринома; соотвѣтствующія значенія x получаются изъ формулы*

$$x = -\frac{b - b'm}{2(a - a'm)},$$

въ которой m нужно замѣнить корнями тринома.

О результатахъ этого изслѣдованія мы получимъ болѣе ясное понятіе, изслѣдуя измѣненія дроби при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

III. Изслѣдованіе измѣненій дроби $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

668. Теорема: *Квадратная дробь непрерывна при измѣненіи x отъ α до β, если только въ промежуткѣ между α и β не содержится ни одинъ изъ корней знаменателя.*

Во первыхъ очевидно, что данная дробь дѣйствительна при всякомъ дѣйствит. x, и что она конечна, если только значеніе, данное x — *су*, не обращаетъ знаменателя въ нуль. Остается доказать, что если x_1 есть нѣкоторое значеніе x, заключающееся между α и β, то количеству x_1 всегда можно дать при-

ращеніе h, на столько близкое къ нулю, чтобы и приращеніе К дроби y_1 само было какъ угодно близко къ нулю. Имѣемъ:

$$y_1=\frac{ax_1^2+bx_1+c}{a'x_1^2+b'x_1+c'},\quad y_1+K=\frac{a(x_1+h)^2+b(x_1+h)+c}{a'(x_1+h)^2+b'(x_1+h)+c'},$$

$$K=\frac{[a(x_1+h)^2+b(x_1+h)+c](a'x_1^2+b'x_1+c')-[a'(x_1+h)^2+b'(x_1+h)+c'](ax_1^2+bx_1+c)}{[a'(x_1+h)^2+b'(x_1+h)+c'](a'x_1^2+b'x_1+c')}$$

или, по упрощеніи числителя,

$$K=\frac{h\{(ab'-ba')x_1^2+[(ab'-ba')h+2(ac'-ca')]x_1+[(ac'-a'c)h+(bc'-b'c)]\}}{[a'(x_1+h)^2+b'(x_1+h)+c'](a'x_1^2+b'x_1+c')}.$$

По мѣрѣ приближенія h къ нулю числитель стремится къ нулю, а знаменатель къ $(a'x_1^2+b'x_1+c')^2$. Но x_1 не обращаетъ этого тринома въ ноль, ибо интервалъ отъ α до β, содержащій x_1, не содержитъ корней знаменателя; слѣд. вмѣстѣ съ h и К стремится къ нулю; иначе говоря, можно приращенію h перемѣннаго x дать значеніе настолько близкое къ нулю, чтобы и соотвѣтственное приращеніе К дроби было также какъ угодно близко къ нулю; что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. — Если x — су дать знаніе x_1, обращающее въ ноль знаменателя дроби, то она вообще обратится въ безконечность, испытывая при этомъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $\pm\infty$ въ $\mp\infty$, если только корни знаменателя неравные, или если оба члена дроби не имѣютъ общаго множителя $x-x_1$. Если эти исключенія не имѣютъ мѣста, то слѣдуетъ опредѣлить знакъ безконечности, когда x приближается къ x_1, возрастая, и затѣмъ переходитъ чрезъ x_1. Для этого достаточно опредѣлить знакъ числителя при $x=x_1$; зная знакъ и знаменателя, будемъ знать и знакъ дроби.

669. При изученіи измѣненій дроби будемъ держаться слѣдующаго порядка.

1. Опредѣляемъ maximum и minimum, если таковыя имѣются, и соотвѣтственныя значенія x.

2. Приравниваемъ нулю числителя, потомъ знаменателя и рѣшаемъ полученныя ур-нія: корни перваго ур-нія, если они дѣйств., дадутъ тѣ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ ноль; втораго — тѣ значенія x, при которыхъ она обращается въ $\pm\infty$.

3. Опредѣляемъ значеніе дроби при $x=0$.

4. Наконецъ, ищемъ предѣльныя значенія дроби, т. е. при $x=\pm\infty$.

Расположивъ значенія x въ порядкѣ ихъ возрастанія, а противъ нихъ соотвѣтствующія величины дроби, составимъ таблицу, ясно показывающую измѣненія дроби по величинѣ и знаку. Для наглядности такую таблицу будемъ сопровождать графическимъ изображеніемъ измѣненій дроби.

Задача I.

670. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{3x^2+2x-3}{4x^2-10x+7}$ *при непрерывномъ возрастаніи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Слѣдуя вышеозначенному плану, опредѣляемъ:

1. *Maximum* и *minimum* дроби. — Приравнивая данную дробь произвольному количеству y, получаемъ ур-ніе

$$\frac{3x^2+2x-3}{4x^2-10x+7}=y, \text{ или } (3-4y)x^2+(2+10y)x-(3+7y)=0,$$

изъ котораго (расположивъ подрадик. колич. по степенямъ y):

$$x=\frac{-(1+5y)\pm\sqrt{-3y^2+19y+10}}{3-4y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Приравнявъ подрадик. выраженіе нулю и рѣшивъ ур. $3y^2-19y-10=0$, находимъ: $y'=-0{,}488$, $y''=6{,}821$; а какъ въ данномъ случаѣ коэффиціентъ при y^2 подъ радикаломъ отрицателенъ, то заключаемъ, что большій корень есть maximum дроби, меньшій — ея minimum. Итакъ

$$\text{max. } (y)=6{,}821; \quad \text{min. } (y)=-0{,}488.$$

Соотвѣтствующія значенія x суть:

$$x_{\text{max.}}=\frac{-(1+5.6{,}821)}{3-4.6{,}821}=1{,}445; \quad x_{\text{min.}}=-\frac{(1+5.-0{,}488)}{3-4.-0{,}488}=0{,}291.$$

Заключаемъ, что дробь можетъ измѣняться только между $-0{,}488$ и $+6{,}821$ и не имѣетъ значеній, меньшихъ $-0{,}488$ и большихъ $6{,}821$. Всякое же значеніе между этими предѣлами она принимаетъ два раза, при двухъ различныхъ значеніяхъ x, потому-что для каждаго y, лежащаго между $-0{,}488$ и $+6{,}821$, мы изъ формулы (1) находимъ два различныхъ дѣйствит. значенія x.

2. *Нулевыя значенія дроби*, соотвѣтствующія конечнымъ значеніямъ x. — Алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ обращается въ ноль, когда обращается въ ноль числитель A, знаменатель же B остается отличнымъ отъ нуля; или когда B обращается въ ∞, причемъ A остается конечнымъ. Но B — выраженіе цѣлое относительно x, сл. оно не можетъ обратиться въ ∞ при конечныхъ x; остается приравнять A нулю. Положивъ $3x^2+2x-3=0$ и рѣшивъ это ур., найдемъ:

$$x'=-1{,}387, \quad x''=+0{,}721.$$

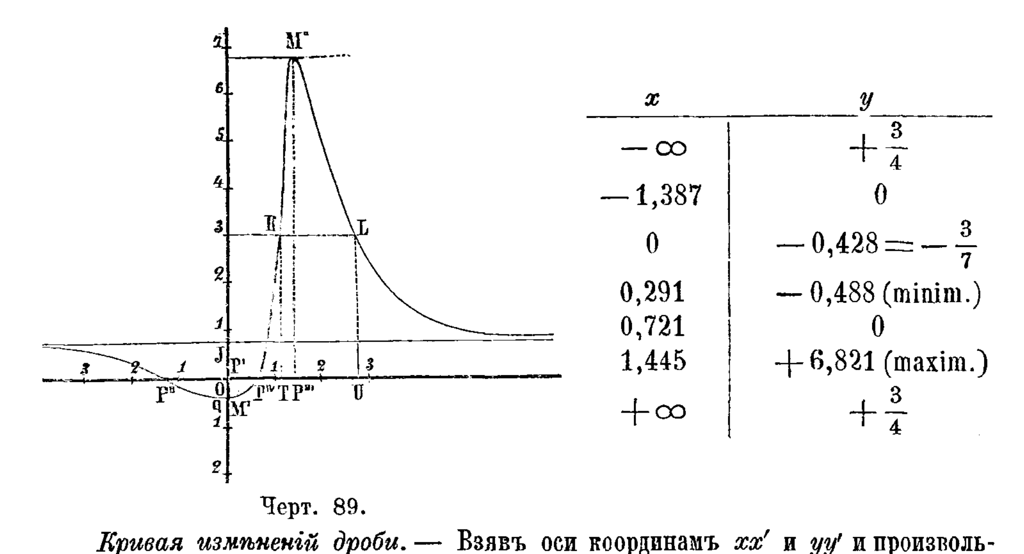
3. *Безконечныя значенія дроби.* — Дробь не обращается въ ∞; въ этомъ убѣждаемся, приравнявъ знаменателя нулю, и рѣшивъ ур-ніе $4x^2-10x+7=0$: найдемъ для x мнимыя значенія.

4. *Значеніе дроби при* $x=0$. — Положивъ $x=0$, найдемъ $y=-\frac{3}{7}$.

5. *Предѣльныя значенія дроби.* — Положивъ $x=\pm\infty$, находимъ, что y принимаетъ неопред. видъ $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытія котораго дѣлимъ числ. и знам. на x^2 и затѣмъ полагаемъ $x=\pm\infty$.

Такимъ образомъ получаемъ, что при $x=\pm\infty$, $y=+\frac{3}{4}$.

Результаты этого изслѣдованія даютъ слѣдующую таблицу измѣненій дроби:



x	y
$-\infty$	$+\frac{3}{4}$
$-1,387$	0
0	$-0,428 = -\frac{3}{7}$
$0,291$	$-0,488$ (minim.)
$0,721$	0
$1,445$	$+6,821$ (maxim.)
$+\infty$	$+\frac{3}{4}$

Черт. 89.

Кривая измѣненій дроби. — Взявъ оси координамъ xx' и yy' и произвольную прямую за 1, наносимъ на оси x—овъ $OP'' = -1,387$ и получаемъ точку P'', для которой ордината равна 0, и въ которай, слѣд., кривая пересѣкаетъ ось отрицательныхъ x—овъ. Отложивъ $OQ = -0,428$, имѣетъ точку Q, въ которой кривая пересѣкаетъ ось отрицательныхъ y—овъ. Нанеся $OP' = 0,291$ и возставивъ въ точкѣ P' перпендикуляръ къ оси x—овъ, откладываемъ на немъ $P'M' = -0,488$ — ординату minimum. Нанеся $OP^{IV} = 0,721$, получаемъ другую точку P^{IV}, въ которой кривая пересѣкаетъ ось x-овъ. $OP''' = 1,445$ даетъ точку P''', въ которой проведя перп. $P'''M'' = 6,821$, имѣемъ наибольшую ординату. Наконецъ, отложивъ $OI = \frac{3}{4}$ и проведя черезъ точку I параллель оси x—овъ, имѣемъ ассимптоту кривой, къ которой кривая неограниченно приближается сливаясь съ него на безконечныхъ разстояніяхъ отъ оси y—овъ.

Соединяя построенныя точки непрерывною кривою, получаемъ линію, представленную на черт. 89 . Такъ какъ каждую свою величину дробь принимаетъ только два раза при двухъ различныхъ значеніяхъ x (напр. $y = 3$ при $x = OT$ и $x = OU$), то всякая прямая параллельная xx' пересѣкаетъ кривую только въ двухъ точкахъ. Исключеніе составляютъ max. и min.: прямыя, параллельныя оси x и проведенныя отъ нея, одна въ разстояніи — 0,488, другая 6,821, встрѣчаютъ кривую, каждая въ одной точкѣ, иначе — касательны къ кривой. Такимъ обр., кривая не можетъ представлять иныхъ изгибовъ, кромѣ указанныхъ на чертежѣ. Чертежъ наглядно роказываетъ, что — 0,488 есть наименьшая ордината или minimum дроби, а $+6,821$ — наибольшая, или maximum дроби.

Задача II.

671. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{2x^2+3}{x^2+4x+5}$ *при непрерывномъ возрастаніи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

1. *Maximum и minimum дроби.* — Приравнявъ дробь y-ку, получаемъ ур.

$$\frac{2x^2+3}{x^2+4x+5}=y, \quad \text{или} \quad (2-y)x^2-4y.x+3-5y=0,$$

откуда

$$x=\frac{2y\pm\sqrt{-y^2+13y-6}}{2-y}.$$

Корни подрад. тринома суть: $y'=0{,}48$ и $y''=12{,}52$, и какъ коэф. при y^2 отрицателенъ, то заключаемъ, что

$$\max.(y)=12{,}52; \quad \text{minimum}.(y)=0{,}48.$$

Соотвѣтствующія значенія x суть:

$$x_{\max.}=\frac{2.12{,}52}{2-12{,}52}=-2{,}38; \qquad x_{\min.}=\frac{2.0{,}48}{2-0{,}48}=0{,}63.$$

Такимъ образомъ дробь можетъ измѣняться только между предѣлами 0,48 и 12,52, принимая каждое свое значеніе между этими предѣлами два раза — при двухъ различныхъ значеніяхъ x.

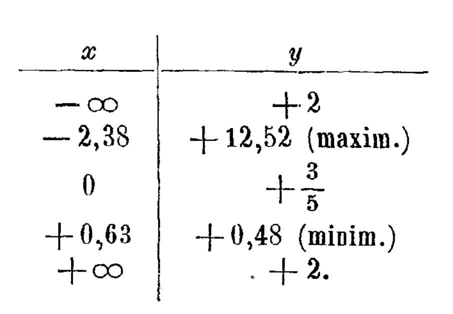
2. *Нулевыя значенія дроби.* — Такъ какъ между предѣлами 0,48 и 12,52 не содержится ноль, то дробь ни при какихъ дѣйствительномъ x не обращается въ ноль. Это видно и изъ того, что приравнивая числителя нулю, получаемъ ур. $2x^2+3=0$, имѣющее мнимые корни.

3. *Безконечныя значенія дроби.* — Дробь не обращается въ ∞, ибо корни знаменателя мнимые.

4. *Значеніе дроби при* $x=0$. — Положивъ $x=0$, имѣемъ $y=\frac{3}{5}$. Сл. кривая пересѣкаетъ ось y на разстояніи $+\frac{3}{5}$ отъ начала.

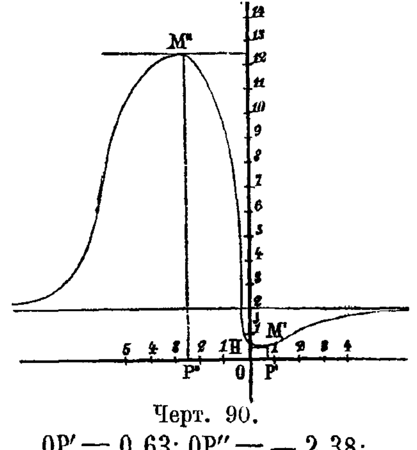
5. *Предѣльныя значенія дроби.* — Какъ и въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что при $x=\pm\infty$, $y=2$. Слѣд. кривая неограниченно приближается къ ассимптотѣ, параллельной оси x и отстоящей отъ нея на 2.

Таблица измѣненій дроби.



x	y
$-\infty$	$+2$
$-2{,}38$	$+12{,}52$ (maxim.)
0	$+\frac{3}{5}$
$+0{,}63$	$+0{,}48$ (minim.)
$+\infty$	$+2$.

Кривая измѣненій дроби.



Черт. 90.

$0P'=0{,}63$; $0P''=-2{,}38$;
$P'M'=0{,}48$; $P''M''=12{,}52$.
$0H=\frac{3}{5}$; $0J=2$.

Задача III.

672. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$. —

1. *Maximum и minimum.* — Положивъ

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}=y, \text{ или } (1-y)x^2+4y.x+1-3y=0,$$

находимъ
$$x=\frac{-2y\pm\sqrt{y^2+4y-1}}{1-y}.$$

Корни тринома y^2+4y-1 суть: $y'=-4,236$; $y''=0,236$; а какъ коэффиціентъ при y^2 положителенъ. то

$$\max.\ (y)=-4,236;\ \min.\ (y)=0,236;$$

соотвѣтствующія значенія x суть: $x_{\max.}=1,618$; $x_{\min.}=-0,617$.

2. Дробь не обращается въ ноль, ибо числитель x^2+1 существенно положителенъ.

3. Дробь обращается въ ∞, или претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при двухъ значеніяхъ x, обращающихъ знаменателя въ ноль; именно при $x'=1$ и $x''=3$. Для опредѣленія знаковъ безконечности, замѣчаемъ, что числитель дроби при всякомъ x положителенъ, сл. нужно изслѣдовать знаки знаменателя. Обозначивъ буквою h произвольно малое полож. количество, замѣчаемъ, что $x=1-h$ и $x=3+h$ будутъ находиться внѣ корней знаменателя, и слѣд. при этихъ значеніяхъ x знаменатель положителенъ, а потому и $y>0$ затѣмъ $x=1+h$ и $x=3-h$ содержатся между корнями знаменателя, а потому знаменатель и вся дробь при этихъ значеніяхъ x отрицательна. Отсюда видно, что если измѣнять x отъ $-\infty$ непрерывно до $+\infty$, то при $x=1$ и при $x=3$ дробь претерпѣвать разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $+\infty$ въ $-\infty$, въ первомъ случаѣ, т. е. при $x=1$, и изъ $-\infty$ въ $+\infty$ во второмъ, т. е. при $x=3$.

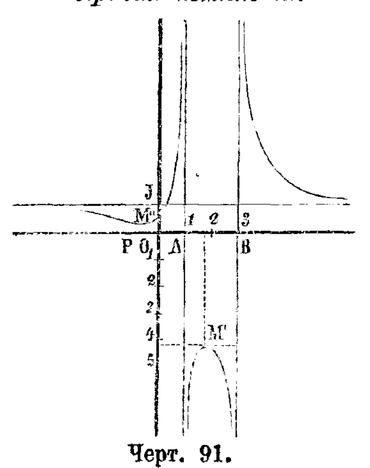
4. При $x=0$ дробь обращаетск въ $\frac{1}{3}$.

5. При $x=\pm\infty$ она равна 1.

Таблица измѣненій дроби.

x	y
$-\infty$	1
$-0,617$	0,236 (minim.)
$1-h$	$+\infty$
$1+h$	$-\infty$
1,618	$-4,236$ (maxim.)
$3-h$	$-\infty$
$3+h$	$+\infty$
$+\infty$	1

Кривая измѣненій.



Черт. 91.

Кривая измѣненій дроби. — Намѣтивъ точки M′ и M″, соотвѣтствующія max. и min. дроби, проводимъ черезъ нихъ параллели оси x-овъ: кривая не имѣетъ точекъ между этими параллелями. Затѣмъ наносимъ $OA = 1$ и $OB = 3$ и черезъ точки A и B проводимъ параллели оси y, которыя будутъ служить ассимптотами кривой въ мѣстахъ разрыва непрерывности. Такъ какъ при $x = \pm\infty$, $y = 1$, то параллель оси x на единичномъ отъ нея разстояніи будетъ служить 3-ьею ассимптотою. Наконецъ, замѣчая, что для всѣхъ x-овъ, лежащихъ внѣ 1 и 3, дробь > 0, и < 0 для всѣхъ x-овъ, лежащихъ между 1 и 3, заключаемъ что точки кривой для $x < 1$ и для $x > 3$ находятся въ области положит. ординатъ, точки же кривой для $1 < x < 3$ находятся въ области отрицат. ординатъ. Такимъ образ. получаемъ кривую, изображенную на черт. 91.

Задача IV.

673. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{2x^2 - 5x - 4}{5x^2 - 8x - 10}$ *при непрерывномъ измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$. —

1. *Maximum и minimum.* — Положивъ

$$\frac{2x^2 - 5x - 4}{5x^2 - 8x - 10} = y, \text{ или } (2 - 5y)x^2 - (5 - 8y)x - 4 + 10y = 0,$$

находимъ
$$x = \frac{5 - 8y \pm \sqrt{264y^2 - 240y + 57}}{2(2 - 5y)}.$$

Убѣдившись, что корни подрадикальнаго выраженія мнимые, заключаемъ, что оно всегда будетъ положительно, а потому дробь не имѣетъ ни max., ни min.

2. Приравнивая числителя нулю, найдемъ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ 0; эти значенія суть:

$$x' = -0{,}638 \text{ и } x'' = 3{,}138.$$

3. Приравнивая знаменателя 0, получимъ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ ∞; эти значенія суть:

$$x^{\text{III}} = -0{,}824 \text{ и } x^{\text{IV}} = 2{,}424.$$

Для опредѣленія знаковъ безконечности, даемъ дроби видъ:

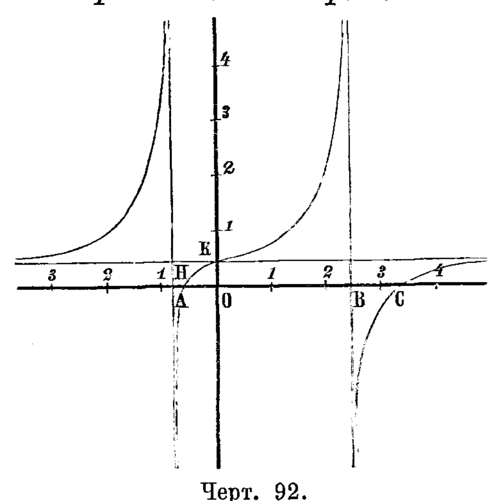
$$y = \frac{2(x + 0{,}638..)(x - 3{,}138)}{5(x + 0{,}824..)(x - 2{,}424..)}.$$

Такъ какъ $x = -0{,}824 - h$ лежитъ какъ внѣ корней числителя, такъ и внѣ корней знаменателя, то и числ. и зн. дроби, а потому и самая дробь, положительны. $x = -0{,}824 + h$ находится внѣ корней числителя и ней знаменателя, слѣд. при этомъ значеніи x числитель > 0, а знаме а потому дробь отрицательна. Заключаемъ, что при переходѣ x чре дробь претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $+$ Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что когда x, возрастая, прох $+2{,}424$, дробь перескакиваетъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$.

4. При $x = 0$ имѣемъ: $y = \frac{2}{5}$.

5. При $x = \pm\infty$, находимъ: $y = \frac{2}{5}$.

Кривая измѣненій дроби.



Черт. 92.

Таблица измѣненій дроби.

x	y
$-\infty$	$+{}^2/_5$
$-0{,}824 - h$	$+\infty$
$-0{,}824 + h$	$-\infty$
$-0{,}638$	0
0	$+\frac{2}{5}$
$+2{,}424 - h$	$+\infty$
$+2{,}424 + h$	$-\infty$
$+3{,}138$	0
$+\infty$	$+\frac{2}{5}$

Таблица измѣненій дроби показываетъ, что величина дроби постоянно увеличивается, но претерпѣваетъ два раза разрывъ непрерывности: одинъ разъ при переходѣ x чрезъ $-0{,}824$, другой разъ при переходѣ x чрезъ $2{,}424$: въ томъ и другомъ случаѣ дробь перескакиваетъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$.

Кривая измѣненій. — Отложивъ на оси y линію $OK = +\frac{2}{5}$, проводимъ черезъ точку K параллель оси x; затѣмъ, отложивъ на оси x линіи $OH = -0{,}824$ и $OB = +2{,}424$, проводимъ черезъ точки H и B параллели оси y. Такимъ обр. получаемъ три ассимптоты вѣтвей кривой. Отложивъ на оси x линіи: $OA = -0{,}638$ и $OC = 3{,}138$, получимъ точки, въ которыхъ кривая пересѣкаетъ ось x-овъ. Ось y она пересѣкаетъ въ точкѣ K.

Задача V.

674. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12}$ *при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.* —

1. *Maximum и minimum.* — Положивъ

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12} = y, \text{ или } (2 - y)x^2 - 7(1 - y)x + 3(1 - 4y) = 0,$$

находимъ

$$x = \frac{7(1 - y) \pm \sqrt{y^2 + 10y + 25}}{2(2 - y)}.$$

Замѣчая, что $y^2 + 10y + 25 = (y + 5)^2$ и что, слѣд., подрадикальное выраженіе всегда положительно, заключаемъ, что дробь не имѣетъ ни max., ни min.

Если y-ку дадимъ какое-либо значеніе, то для x найдемъ два соотвѣтственныхъ значенія; только при $y = -5$, x принимаетъ одно значеніе $= 3$. Итакъ всякую свою величину дробь принимаетъ при двухъ различныхъ значеніяхъ x, кромѣ величины, равной -5. Значенія x, соотвѣтствующія данному y, суть:

$$x = \frac{7(1-y) \pm (y+5)}{2(2-y)}, \text{ или } x = 3 \text{ и } x = \frac{1-4y}{2-y},$$

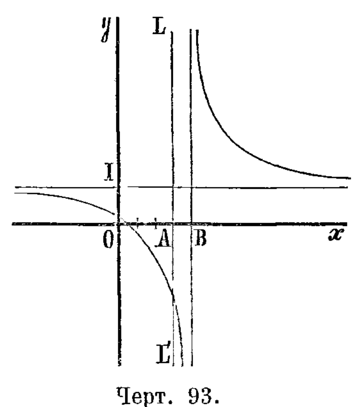
изъ которыхъ первое независитъ отъ y. Эта особенность объясняется тѣмъ, что числ. и знам. дроби имѣютъ общій корень $x = 3$ и слѣд. при $x = 3$ оба члена дроби равны 0, а дробь неопредѣленна.

Если сократить дробь на $x - 3$, она приметъ видъ

$$Y = \frac{2x-1}{x-4}, \text{ откуда } x = \frac{1-4Y}{2-Y};$$

всякой величинѣ Y соотвѣтствуетъ *только одно* значеніе x, слѣд. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ дробь $\frac{2x-1}{x-4}$ проходитъ *только одинъ разъ* чрезъ всякое свое значеніе; обращается въ 0 при $x = \frac{1}{2}$, и въ ∞ при $x = 4$; а при $x = \pm\infty$ обращается въ 2. Замѣтивъ при этомъ, что при $x = 4 - h$, $y = -\infty$, а при $x = 4 + h$, $y = +\infty$, выразимъ ходъ измѣненій сокращенной дроби таблицей:

x	*сокр. дробь* Y
$-\infty$	2
$\frac{1}{2}$	0
$4 - h$	$-\infty$
$4 + h$	$+\infty$
$+\infty$	2



Черт. 93.

Что касается дроби $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12}$, то какъ она принимаетъ какую угодно величину при $x = 3$, то чтобъ изобразить вполнѣ ея измѣненія, нужно къ кривой присоединить прямую LL′, параллельную оси $0y$ и пересѣкающую ось x-овъ въ разстояніи $OA = 3$ отъ начала координатъ.

Задача VI.

675. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{x^2 - 8x + 15}{3x^2 - 24x + 45}$ *при непрерывномъ измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Положивъ

$\frac{x^2-8x+15}{3x^2-24x+45}=y$, или $(1-3y)x^2-8(1-3y)x+15(1-3y)=0$, или $(1-3y)(x^2-8x+15)=0$, находимъ, что ур-ніе удовлетворяется при всякомъ y, когда $x^2-8x+15$ равно нулю, т. е. когда $x=3$ и $x=5$, и кромѣ того при всякомъ x, если только $y=\frac{1}{3}$. Слѣд. при $x=3$ и $x=5$, y можетъ имѣть какую угодно величину, и кромѣ того $y=\frac{1}{3}$ при какомъ угодно x. Это объясняется тѣмъ, что оба члена дроби имѣютъ одинаковые корни:

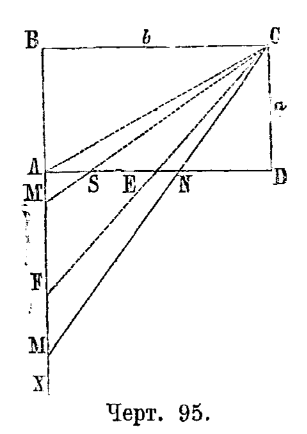
$$y=\frac{(x-3)(x-5)}{3(x-3)(x-5)},$$

при $x=3$ и $x=5$ величина дроби неопредѣленна; а если сократить дробь на $(x-3)(x-5)$, то y дѣлается $=\frac{1}{3}$, каковъ бы ни былъ x.

Черт. 94.

Совокупность рѣшеній ур-нія $x^2-8x+15=y(3x^2-24x+45)$, или $(x^2-8x+15)(3y-1)=0$ геометрически изображается двумя параллелями оси y, отстоящими отъ начала на $0A=3$ и $0B=5$, и параллелью оси x, отстоящею отъ начала на $0I=\frac{1}{3}$.

676. Задача. — *На продолженіи стороны* AB *даннаго прямоугольника* ABCD *взять такую точку* M, *чтобы сумма площадей треугольниковъ* AMN *и* DCN *была minima.*



Черт. 95.

Когда точка M движется отъ A къ X, сумма площадей, вначалѣ равная $\frac{1}{2}$ прямоугольника, начинаетъ уменьшаться: такъ для точки M′ треуг. CAS замѣняется меньшимъ M′AS; но когда точка M займетъ положеніе F, при которомъ $AF=AB$, сумма площадей снова становится равною $\frac{1}{2}$ прямоугольника, сл. при перемѣщеніи точки M отъ A къ F эта перемѣнная сумма прошла черезъ *minimum.*

Пусть $AB=a$, $BC=b$, $AM=x$; выраженіе суммы y будетъ:

$$y=\frac{x\times AN}{2}+\frac{a\times DN}{2}.$$

Но $\frac{AN}{x}=\frac{DN}{a}=\frac{b}{a+x}$, откуда: $AN=\frac{bx}{a+x}$, $DN=\frac{ab}{a+x}$, и слѣд.

$$y=\frac{bx^2}{2(a+x)}+\frac{ba^2}{2(a+x)},\text{ или }\frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}.$$

Опредѣляемъ x такъ чтобы сумма площадей имѣла величину m. Для этого беремъ ур-ніе

$$\frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}=m, \quad \text{или} \quad bx^2-2mx+a(ab-2m)=0,$$

откуда
$$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-ab(ab-2m)}}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Чтобы сумма площадей могла имѣть величину m, необходимо и достаточно, чтобы этой величинѣ m отвѣчало дѣйствительное и положительное значеніе x. Но x будетъ дѣйств., если $m^2-ab(ab-2m)\geqq 0$,

или
$$m^2+2abm-a^2b^2\geqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

A priori видно, что корни триномъ (2) дѣйствительные, неравные и противоположнаго знака; слѣд. неравенство (2) будетъ удовлетворено такимъ положительнымъ m, которое не меньше положительнаго корня тринома; т. е. необходимо, чтобы $m\geqq ab(\sqrt{2}-1)$. Итакъ, сумма площадей не можетъ быть $< ab(\sqrt{2}-1)$; смотримъ, можетъ-ли она равняться $ab(\sqrt{2}-1)$. Когда m достигнетъ этого предѣла, тогда будетъ

$$x=\frac{m}{b}=a(\sqrt{2}-1);$$

это значеніе положительно и сл. можетъ быть взято; потому minimum $(y)=ab(\sqrt{2}-1)$, а соотвѣтствующее значеніе $x=a(\sqrt{2}-1)$.

Повѣрка. — Полагаемъ $x=a(\sqrt{2}-1)\pm h$, гдѣ h произвольно мало, и подставляемъ это значеніе x въ выраженіе функціи. Найдемъ

$$y=\frac{(2-\sqrt{2})a^2b\pm ab(\sqrt{2}-1)h+\dfrac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2}\pm h}.$$

Вопросъ приводится къ провѣркѣ неравенства:

$$\frac{(2-\sqrt{2})a^2b\pm ab(\sqrt{2}-1)h+\dfrac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2}\pm h}>ab(\sqrt{2}-1),$$

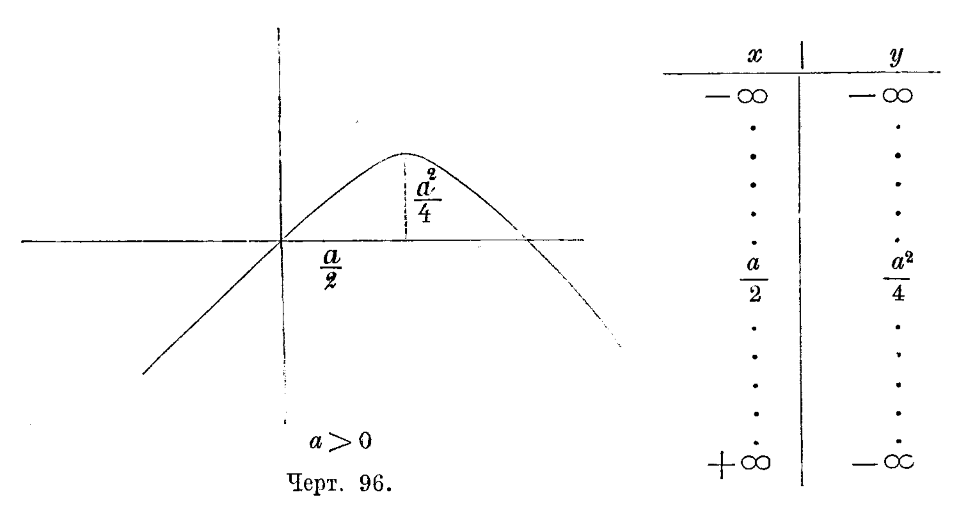
которое, по освобожденіи отъ знаменателя и по упрощеніи приводится къ $\frac{bh^2}{2}>0$, что вѣрно.

IV. Maxima и minima функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

677. Теорема. — *Произведеніе двухъ перемѣнныхъ, которыхъ сумма постоянна и равна a, имѣетъ наибольшую величину, когда оба множителя дѣлаются равными, если только они могутъ быть сдѣланы равными.*

Прямое доказательство. — Пусть одинъ множитель $=x$; другой будетъ $a-x$; произведеніе ихъ выразится формулою $y=x(a-x)$ или $-x^2+ax$. Это есть квадратный триномъ, свободный членъ котораго $=0$. Придавая и вычитая $\frac{a^2}{4}$, даемъ функціи видъ: $-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a^2}{4}$, или $y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$.

При $x = -\infty$ и функція $y = -\infty$ При увеличеніи x отъ $-\infty$ до $\frac{a}{2}$, y возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$; затѣмъ при увеличеніе x отъ $\frac{a}{2}$ до $+\infty$, y уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до $-\infty$. Получаемъ слѣдующія — таблицу и кривую измѣненій функціи:



x	y
$-\infty$	$-\infty$
. . . . .	. . . . .
$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{4}$
. . . . .	. . . . .
$+\infty$	$-\infty$

Черт. 96.

Итакъ, произведеніе сперва возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$, а затѣмъ уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до $-\infty$; слѣд. оно не имѣетъ minimum'a, но имѣетъ maximum $= \frac{a^2}{4}$. Соотвѣтствующее значеніе x есть $\frac{a}{2}$, а другаго множителя: $a - \frac{a}{2}$ или $\frac{a}{2}$, т. е. произведеніе получаетъ наибольшую величину, когда оба множителя дѣлаются равными.

Косвенное доказательство. — Вмѣсто того, чтобы изслѣдовать измѣненія произведенія $x(a-x)$, соотвѣтствующія измѣненію x отъ $-\infty$ до $+\infty$, можно предложить себѣ вопросъ: при какомъ значеніи x это произведеніе получаетъ данную величину m, изслѣдовать рѣшеніе, и такимъ образомъ найти, между какими предѣлами величина m произведенія можетъ измѣняться. Такимъ образомъ для опредѣленія x имѣемъ ур-ніе

$$x(a-x) = m, \quad \text{или} \quad x^2 - ax + m = 0,$$

откуда

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подкоренное количество не было отрицательнымъ, т. е. необходимо, чтобы $m \leqslant \frac{a^2}{4}$. Заключаемъ, что произведеніе m можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$; слѣдов. оно не имѣетъ minimum'a, но имѣетъ maximum $\frac{a^2}{4}$. Но когда $m = \frac{a^2}{4}$, радикалъ об-

ращается въ 0, и $x = \frac{a}{2}$; поэтому и другой множитель, какъ равный $a - x$, обращается въ $\frac{a}{2}$, сл. произведеніе имѣетъ maximum, когда множители равны.

Примѣры. I. — Произведеніе двухъ множителей, которыхъ сумма $= 12$, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+36$; maximum произведенія равенъ 36, а соотвѣтствующіе множители равны, каждый, 6.

II. Произведеніе двухъ множителей, которыхъ сумма $= -12$, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+36$; слѣд. maximum произведенія равенъ $+36$, а каждый производитель $= -6$.

678. Задача I. — *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ, какой имѣетъ наибольшую площадь?*

Если основаніе DE прямоугольника передвигать отъ вершины тр-ка до его основанія, то площадь прямоугольника будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, и слѣд. проходитъ чрезъ maximum. Пусть b и h будутъ — основаніе и высота даннаго треугольника (Часть I, черт. 25), x и y—основаніе и высота вписаннаго прямоугольника DEFG. Площадь прямоугольника $= xy$. Изъ подобія треугольниковъ ABC и DBE имѣемъ: $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$, откуда $y = \frac{h}{b}(b-x)$; слѣдов. площадь xy выразится произведеніемъ:

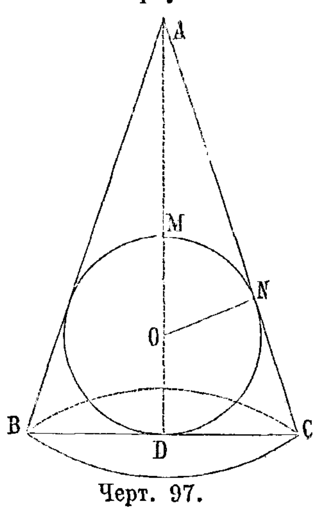
$$\frac{h}{b}x(b-x).$$

Такъ какъ постоянный множитель $\frac{h}{b}$ не вліяетъ на условія maxim., то вопросъ приводится къ опредѣленію max. произведенія $x(b-x)$. Сумма множителей x и $b-x$ равна постоянной величинѣ b, слѣд. произведеніе имѣетъ maximum, когда множители равны, т. е. когда $x = b - x$, откуда $x = \frac{b}{2}$; но въ такомъ случаѣ изъ ур-нія $y = \frac{h}{b}(b-x)$ найдемъ $x = \frac{h}{2}$, самая же макмальная площадь xy равна $\frac{bh}{4}$, т. е. половинѣ площади треугольника. Итакъ: наибольшій изъ всѣхъ прямоугольниковъ, какой можно вписать въ треугольникъ, имѣетъ основаніе и высоту вдвое меньшія основанія и высоты треугольника.

679. Задача II. — *Изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, какой имѣетъ наименьшій объемъ?*

Пусть будетъ ABC конусъ, описанный около шара ON. Если его вершина A будетъ перемѣщаться по оси DA отъ M до безконечности, объемъ конуса будетъ измѣняться отъ ∞ до ∞, и слѣд. пройдетъ чрезъ minimum. Чтобы найти этотъ minimum, обозначилъ высоту DA буквою x; объемъ будетъ: $Y = \frac{1}{3}\pi.CD^2.\,x$.

Подобные тр-ки ACD и AON даютъ: $\frac{DC}{R} = \frac{x}{AN}$; по $AN^2 = x(x-2R)$; слѣд.



Черт. 97.

$$Y = \frac{1}{3}\pi . \frac{R^2x^2}{x-2R}.$$

Постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi R^2$ не измѣняетъ условій minimum'а функціи, а потому Y имѣетъ наим. вел. при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и $\frac{x^2}{x-2R}$. Но minimum этой функціи соотвѣтствуетъ maximum'у обратной: $\frac{x-2R}{x^2}$, которую можно представить въ видѣ: $\frac{1}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$; наконецъ, мы не измѣнимъ условій maximum'а, введя постоянный множитель 2R. Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ опредѣленію max. функціи

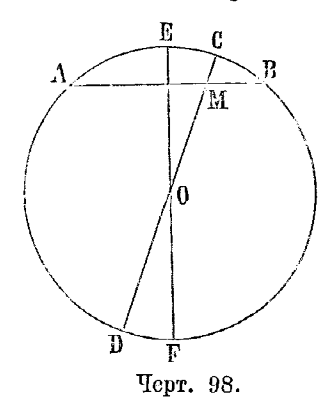
$$\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right).$$

Замѣчая, что сумма перемѣнныхъ факторовъ $\frac{2R}{x}$ и $1-\frac{2R}{x}$ равна постоянной величинѣ 1, заключаемъ, что произведеніе достигнетъ наибольшей величины, когда оба фактора сдѣлаются равными, т. е. когда $\frac{2R}{x}=1-\frac{2R}{x}$, откуда $x=4R$, что не несовмѣстно съ свойствомъ задачи. Итакъ, описанный конусъ имѣетъ наименьшій объемъ, когда высота конуса вдвое больше діаметра; самый же объемъ $=\frac{8}{3}\pi R^3$, т. е. вдвое больше шара.

680. Въ нѣкоторыхъ вопросахъ (напр. геометріи) перемѣнныя x и y, которыхъ сумма постоянна (a), по свойству самой задачи, не могутъ быть сдѣланы равными. Въ такомъ случаѣ maximum произведенія имѣетъ мѣсто тогда, когда разность между этими количествами достигаетъ наименьшей величины; въ самомъ дѣлѣ, если x и y суть два перемѣнныя, и $x+y=a$, то имѣемъ тождество

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2, \text{ откуда } xy=\frac{a^2-(x-y)^2}{4};$$

отсюда непосредственно заключаемъ, что xy достигнетъ maximum'а, когда абсолютная величина разности $x-y$ достигнетъ minimum'а.



Черт. 98.

Примѣръ. — Данъ кругъ и хорда AB; провести діаметръ такъ, чтобы произведеніе отрѣзковъ CM и MD, образуемыхъ на немъ хордою, имѣло наибольшую величину.

Сумма отрѣзковъ CM и MD, при всякомъ положеніи діаметра, постоянна; но эти отрѣзки не могутъ быть сдѣланы равными; слѣд. ихъ произведеніе достигнетъ наибольшей величины, когда разность ихъ будетъ наименьшая, а это будетъ тогда, когда діаметръ станетъ перпендикуляренъ въ хордѣ. Требуемый діаметръ есть EF.

681. Задача III. — *Найти maximum произведенія* $(3-x^2)(7+x^2)$?

Сумма факторовъ постоянна и равна 10; приравнивая ихъ, получаемъ ур-ніе $3-x^2=7+x^2$, или $x^2=-2$: равенство невозможное ни при какомъ дѣйствительномъ x. Итакъ, находимъ minimum абсолютной величины ихъ разности: $2x^2+4$. Minimum этого бинома, очевидно, есть 4, достигаемый при $x=0$; слѣд. maximum произведенія равенъ 21, при $x=0$.

682. Теорема. — *Произведеніе* n *положительныхъ факторовъ, сумма которыхъ постоянна и равна* a, *достигаетъ наибольшей величины, когда всѣ множители дѣлаются равными* (полагая, что ихъ можно сдѣлать равными).

Пусть будетъ $x.y.z.t....v$ разсматриваемое произведеніе n перемѣнныхъ множителей, связанныхъ условіемъ

$$x+y+z+t...+v=a.$$

Это произведеніе имѣетъ maximum; въ самомъ дѣлѣ, каждое слагаемое положительно, а сумма всѣхъ слагаемыхъ равна a, слѣд. каждый множитель, меньше a, и слѣд. ихъ произведеніе, необходимо, меньше a^n: значитъ, оно не можетъ увеличиваться безпредѣльно, и потому имѣетъ maximum.

Легко доказать, что оно тогда достигнетъ наибольшей величины, когда всѣ слагаемыя сдѣлаются равными, т. е. когда $x=y=z=\cdot\ \cdot\ \cdot=v$. Дѣйствительно, пусть x не равно y; такъ какъ наши положительныя слагаемыя подчинены только одному условію, чтобы сумма ихъ всегда оставалась $=a$, то мы можемъ измѣнять ихъ какъ угодно, не нарушая только этого условія; поэтому можемъ замѣнить каждый изъ множителей x и y ихъ полусуммою $\frac{x+y}{2}$, ибо отъ этого сумма первыхъ двухъ слагаемыхъ, а слѣд. и вся сумма не измѣнится. Но въ такомъ случаѣ, на основаніи, предыдущей теоремы, (когда сумма *двухъ* перемѣнныхъ остается постоянно, ихъ произведеніе получаемъ наиб. величину, когда они равны), будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}>xy \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1)$$

помножая обѣ его части на положительное количество $zt...v$, мы не измѣнимъ смыслъ неравенства, слѣд.

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot zt...v>xyzt...v \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (2)$$

Это значитъ, что пока въ произведеніи $xyzt...v$ есть множители неравные, оно не есть наибольшее, ибо новое произведеніе больше его. Слѣд. его можно будетъ увеличавать до тѣхъ поръ, пока всѣ множители не сдѣлаются равными между собою. Итакъ, *произведеніе достигнетъ своего maximum'a, когда всѣ множители сдѣлаются равными* (полагая, что они могутъ сдѣлаться равными, что не всегда бываетъ).

При $x=y=z=\cdot\ \cdot\ \cdot=v$, каждый изъ равныхъ множителей будетъ $\frac{a}{n}$, а слѣд. максимальное произведеніе $=\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

683. Задача I. — *Какой изъ всѣхъ треугольниковъ одинаковаго периметра имѣетъ наибольшую площадь?*

Пусть перемѣнныя стороны будутъ x, y, z; $2p$ — постоянный периметръ; по условію, $x+y+z=2p$.

Площадь S треугольна по тремъ сторонамъ выражается формулою

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Функція S имѣетъ maximum при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и ея квадратъ; притомъ, откинувъ постоянный множитель, мы опять не измѣнимъ условій maximum'а; такимъ обр. приводимъ вопросъ къ опредѣленію max. произведенія $(p-x)(p-y)(p-z)$ каждый множитель этого произведенія положителенъ, сумма ихъ $=(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-(x+y+z)=p$ — величинѣ постоянной; слѣд. произведеніе достигнетъ maximum'а, когда всѣ множители сдѣлаются равными, т. е. когда $p-x=p-y=p-z$, или $x=y=z$. Слѣд. искомый треугольникъ—*правильный*. Каждая сторона его $=\frac{2}{3}p$, а площадь $=\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

684. Задача II. — *Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ, имѣющихъ одинаковую полную поверхность, имѣетъ наибольшій объемъ?*

Пусть x, y и z будутъ перемѣнныя измѣренія этихъ параллелопипедовъ, S — данная полная поверхность; имѣетъ:

$$S=2xy+2xz+2yz.$$

Перемѣнный объемъ $U=xyz$. Его maximum будетъ при тѣхъ же условіяхъ, какъ maximum его квадрата: $U^2=(xy)(xz)(yz)$. Но эти три положит. множителя имѣютъ постоянную сумму $\frac{S}{2}$, слѣд. maximum имѣетъ мѣсто при $xy=xz=yz$, откуда: $x=y=z$. Это значитъ, что наибольшій объемъ имѣетъ кубъ; величина максимальнаго объема $=x.x.x=x^3=\left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

685. Задача III. — *Зная, что* $mx^\alpha+ny^\beta+pz^\gamma=q$, *найти maximum произведенія* $x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma$.

Произведеніе $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ имѣетъ maximum при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и $mnp.x^\alpha y^\beta z^\gamma$, т. е. какъ и $(mx^\alpha)(ny^\beta)(pz^\gamma)$; но сумма факторовъ этого послѣдняго произведенія постоянна (и равна q), слѣд. это произведеніе, а съ нимъ и предложенное, имѣетъ maximum, когда множители равны, т. е. когда $mx^\alpha=ny^\beta=pz^\gamma=\frac{q}{3}$. Такимъ образомъ, максимальное значеніе предложеннаго произведенія $=\frac{q^3}{27mnp}$.

Напр., найдемъ, что произведеніе xy, при условіи $3x+4y=12$, имѣетъ maximum $=3$, при $x=2$ и $y=\frac{3}{2}$. — Произведеніе x^2yz^8, при условіи $3x^2+5y+7z^8=315$, имѣетъ maximum $=35.21.15$, при $x=\sqrt{35}$, $y=21$, $z=\sqrt[8]{15}$.

686. *Примѣчаніе I.* — Въ теоремѣ (§ 682) было дано, что перемѣнныя x, y, z, . . подчиняются *только одному условію*, чтобы сумма ихъ была постоянна; если же эти перемѣнныя будутъ подчинены еще другимъ условіямъ (выражаемымъ равенствами или неравенствами), то мы уже не имѣемъ права утверждать, что если перемѣнныя x, y, z, . . могутъ принимать значенія x', y', z', . . . , то могутъ принимать и значенія $\frac{x'+y'}{2}$, $\frac{x'+y'}{2}$, z', . . . Слѣд. доказательство наше было бы неприложимо. Вообще, множители не могутъ быть равными, имѣть постоянную сумму и удовлетворять еще другимъ условіямъ; такъ-что теорема § 682, вообще, не будетъ имѣть мѣста: maximum произведенія будетъ вообще меньше той величины произведенія, какую оно имѣетъ при равенствѣ множителей.

Разсмотримъ, напр., произведеніе трехъ положительныхъ чиселъ x, y, z, сумма которыхъ постоянна и $=12$, сл. удовлетворяющихъ условію

$$x+y+z=12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Пусть, кромѣ того, числа эти связаны еще условіемъ

$$x+5y+2z=a \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ a—постоянная величина. Назовемъ перемѣнное произведеніе, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, черезъ P. Разсмотримъ также произведеніе Q трехъ положительныхъ чиселъ x, y, z, удовлетворяющихъ только условію (1). Maximum произведеніе Q будетъ имѣть при $x=y=z=4$; самый же max. $=64$. Что касается перемѣннаго произведенія P, область его значеній будетъ ограниченнѣе области значеній Q: произведеніе P не можетъ принимать всѣхъ значеній, которыя можетъ имѣть Q; въ самомъ дѣлѣ: для составленія Q, нужно отыскать всѣ системы положительныхъ рѣшеній, удовлетворяющихъ неопред. ур-нію (1). Для составленія же значеній, которыя можетъ принимать произведеніе P, нужно изъ всѣхъ сказанныхъ системъ выбрать только тѣ, которыя удовлетворяютъ и ур-нію (2). Отсюда очевидно, что во-первыхъ, maximum (P) не м. б. больше maximum'a Q, во-вторыхъ, что тольво въ исключительномъ случаѣ maximum произведенія P будетъ равенъ max. (Q), вообще же maximum P будетъ меньше maximum'a Q.

Сказанный исключительный случай—тотъ, когда ур. (2) удовлетворяется величинами $x=y=z=4$, что имѣетъ мѣсто при $a=4+5\times4+2\times4=32$: въ этомъ случаѣ 64 будетъ находиться въ числѣ значеній, которыя принимаетъ P, а такъ какъ max. (P) не м. б. больше maxim. (Q), и 64 есть max. произведенія Q, то тѣмъ болѣе 64 будетъ служить maximum'омъ и P.

Обобщая это разсужденіе, заключаемъ, что если факторы произведенія положительны, имѣютъ постоянную сумму и подчинены еще другимъ условіямъ, maximum произведемія вообще меньше той величины его, какую оно получаетъ, если всѣ множители сдѣлать равными; этой послѣдней величинѣ maximum произведенія равенъ только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда всѣ условія, которымъ факторы подчинены, удовлетворяются, когда сдѣлать эти факторы равными.

Интересный примѣръ на этотъ исключительный случай представляетъ произведеніе $x^m y^n z^p$, состоящее изъ m множителей равныхъ x, n—равныхъ y, и

p множителей равныхъ z, съ условіемъ, что сумма $mx+ny+pz$ всѣхъ множителей равна постоянному a.

На основаніи сказаннаго выше, это произведеніе будетъ имѣть max., когда всѣ множители равны, если только равенство факторовъ будетъ совмѣстно съ остальными условіями, которымъ множители подчинены.

Равенство m множителей x-су дастъ $m-1$ соотношеніе; подобно этому имѣемъ еще $n-1$ и $p-1$ условій, что составляетъ $m+n+p-3$ условія; присоединивъ еще равенство суммы всѣхъ множителей количеству a, получимъ $m+n+p-2$ соотношенія; присоединяя еще два ур-нія $x=y=z$, всего будемъ имѣть $m+n+p$ ур-ній для опредѣленія стольких же количествъ, а это вообще возможно. Слѣд. въ этомъ случаѣ, наибол. вел. произведеніемъ достигается при

$$x=y=z=\frac{a}{m+n+p}.$$

687. *Примѣчаніе II.* — При доказательствѣ теоремы (682) мы предполагали, что всѣ множители положительны; при этомъ условіи изъ неравенства (1) и было получено (2), доказывающее теорему. Но теорема, очевидно, имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда *всѣ* множители отрицательны, если только число ихъ *четное*. Въ самомъ дѣлѣ, отдѣливъ два изъ нихъ (x и y), мы изъ неравенства (1), умноженіемъ обѣихъ частей на положител. количество $z\ .\ .\ .\ ut$, опять получимъ неравенство (2). Если же всѣ множители отрицательны и число ихъ нечетное, то произведеніе будетъ minimum, когда всѣ множители равны. Въ самомъ дѣлѣ, если, взявъ произведеніе нечетнаго числа положит. множителей, перемѣнимъ у нихъ знаки, то и знакъ произведенія перемѣнится. Но если функція U имѣетъ maximum M, то функція (— U) имѣетъ minimum (— M); потому-что, если M есть max. (U), то $U<M$ для всѣхъ значеній этой функціи, близкихъ къ M; а изъ неравенства $U<M$ имѣемъ $-U>-M$, сл. $-M$ есть minimum функціи $(-U)$.

Наконецъ, если не всѣ множители отрицательны, то произведеніе не имѣло бы maximum'а, ибо при постоянной суммѣ множителей ихъ абсолютная величина могла бы увеличиваться неопредѣленно; и если число отрицат. множителей четное, произведеніе было бы положительно и могло бы быть какъ угодно велико.

688. *Примѣчаніе III.* — Для двухъ множителей теорема о max. произведенія была доказана еще *Никомахомъ* 100 лѣтъ спустя послѣ Р. Х.

689. Слѣдствіе теоремы § 682. — *Ариѳметическая средина* n *положительныхъ количествъ* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *изъ которыхъ по крайней мѣрѣ два неравны, больше ихъ геометрической средины.*

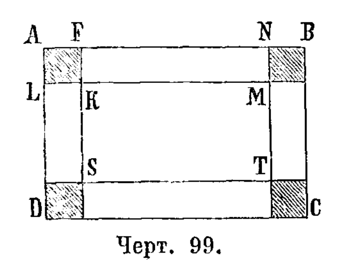
Взявъ $\left(\frac{x_1+x_2+\ .\ .\ .\ +x_n}{n}\right)^n$ и произведеніе $x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_n$, замѣчаемъ, что то и другое произведенія состоятъ изъ n множителей, сумма которыхъ одинакова $(=x_1+x_2+\ .\ .\ .\ +x_n)$; но въ первомъ произведеніи всѣ множители равны, во второмъ, по крайней мѣрѣ, два неравны, слѣд. первое произведеніе больше втораго:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ .\ .\ .\ +x_n}{n}\right)^n>x_1x_2\ .\ .\ .\ x_n,$$

откуда $$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

690. Когда множители, имѣя постоянную сумму, не могутъ быть сдѣланы равными, прямое приложеніе теоремы (682) становится невозможно. Однакоже, методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ даетъ возможность непрямаго примѣненія теоремы. Приводимъ въ поясненіи сказаннаго слѣдующую задачу.

Задача. — *Въ прямоугольномъ картонномъ листѣ, стороны котораго равны* a *и* b, *требуется вынуть по угламъ такіе равные квадраты* AFKL,.., *чтобы загнувъ всѣ четыре прямоугольника* FKMN, . . . *перпендикулярно къ плоскости* KMST, *составить коробку наибольшей вмѣстимости?*



Черт. 99.

Пусть $AF=x$, $AB=b$, $AD=a$; стороны основанія коробки выразятся формулами $a-2x$ и $b-2x$, высота $=x$. Объемъ V коробки (какъ прямоугольнаго параллелопипеда)

$$V=(a-2x)(b-2x)\,.\,x$$

Чтобы сдѣлать сумму множителей постоянною, введемъ множитель 4 (введеніе постояннаго множителя 4 не вліяетъ на условія maximum'а); получимъ:

$$4V=(a-2x)(b-2x)4x,$$

т. е. произведеніе положительныхъ перемѣнныхъ множителей, которыхъ сумма $(a-2x)+(b-2x)+4x$ равна постоянной величинѣ $a+b$; но какъ $b>a$, то ни при какомъ x нельзя сдѣлать $a-2x=b-2x$, и теорему (682) въ данномъ случаѣ нельзя примѣнить непосредственно. Чтобы найти maximum произведенія $(a-2x)(b-2x)x$, замѣтимъ, что не измѣняя условій max., мы можемъ умножить два изъ этихъ трехъ факторовъ на *произвольныя постоянныя* количества, напр. первый на α, второй на β, и искать maximum произведенія

$$V\alpha\beta=(a\alpha-2\alpha x)(b\beta-2\beta x)x.$$

Пользуясь неопредѣленностью постоянныхъ α и β, можно выбрать ихъ такъ, чтобы сумма всѣ трехъ множителей была постоянна. Представивъ эту сумму въ видѣ

$$a\alpha+b\beta-(2\alpha+2\beta-1)x,$$

находимъ, что она будетъ независима отъ x и слѣд. постоянна, когда $2\alpha+2\beta-1=0$. Такимъ образомъ α и β должны удовлетворять неопредѣленному ур-нію, и слѣд. существуетъ безчисленное множество паръ значеній α и β, дѣлающихъ нашу сумму постоянной. Но изъ этихъ паръ надо выбрать такую пару значеній α и β, при которой множители были бы равны. Итакъ, для опредѣленія α, β и x имѣемъ 3 ур-нія:

$$2\alpha+2\beta-1=0\ .\ .\ (1)\quad \alpha(a-2x)=x\ .\ .\ (2)\quad \beta(b-2x)=x\ .\ .\ (3).$$

Имѣя 3 ур-нія съ 3 неизвѣстными, мы получимъ опредѣленныя значенія для α, β и x; но намъ нѣтъ надобности опредѣлять α и β, а только x; съ этою цѣлью исключаемъ изъ ур-ній (1), (2) и (3) α и β, чтобы получить ур-ніе съ однимъ неизвѣстныхъ x. Изъ (2) и (3) имѣемъ

$$\alpha=\frac{x}{a-2x},\quad \beta=\frac{x}{b-2x};$$

подставивъ въ (1) эти значенія α и β, имѣемъ ур.

$$\frac{2x}{a-2x}+\frac{2x}{b-2x}-1=0,$$

или $$12x^2-4(a+b)x+ab=0\ \ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Это ур-ніе и даетъ такой x, при которомъ $V\alpha\beta$, а сл. и V имѣетъ maximum. Рѣшая это ур., имѣемъ

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Оба корня дѣйствительны, ибо $a^2+b^2-ab=a^2+b^2-2ab+ab=(a-b)^2+ab$ — количеству положительному; они положительны, такъ какъ произведеніе и сумма корней положительны. Но чтобы корень ур-нія (4) давалъ рѣшеніе задачи, недостаточно, чтобы онъ былъ дѣйств. и положит.; нужно еще, чтобы онъ былъ меньше половины меньшей стороны прямоугольника ABCD. Пусть $a<b$; тогда можно взять оба или одинъ корень, смотря потому, будутъ-ли оба они, или только одинъ заключаться между 0 и $\frac{a}{2}$. Подстановка въ первую часть ур-нія (4) вмѣсто x количествъ 0, $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ даетъ.

$$+ab,\quad a(a-b),\quad b(b-a):$$

первый результатъ положителенъ, сл. 0 заключается внѣ корней; второй рез. отрицателенъ (ибо $a<b$), слѣд. $\frac{a}{2}$ лежитъ между корнями; третій результатъ положителенъ, сл. $\frac{b}{2}$ — внѣ корней. Такимъ образомъ, называя x' меньшій корень, x'' большій, имѣемъ

$$0<x'<\frac{a}{2}<x''<\frac{b}{2},$$

откуда слѣдуетъ, что большій корень x'', какъ большій $\frac{a}{2}$, не можетъ служить отвѣтомъ; меньшій же корень x', будучи меньше $\frac{a}{2}$, и служить отвѣтомъ на задачу. Итакъ высота коробки наибольшаго объема равна

$$x'=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Когда $a=b$, т. е. картонъ имѣетъ форму квадрата, прямо изъ послѣдней формулы находимъ: $x=\frac{a}{6}$.

Примѣчаніе. — Если произведеніе содержитъ n перемѣнныхъ множителей, зависящихъ отъ x, то произвольныхъ постоянныхъ надо брать $n-1$; вмѣстѣ съ x они составятъ n неизвѣстныхъ. Требованіе, чтобы сумма факторовъ равнялась постоянной, даетъ 1 ур., а сравненіе n множителей дастъ $n-1$ ур-ній, всего n ур-ній, т. е. сколько неизвѣстныхъ; поэтому, метода—общая.

Приложеніе способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ вопросамъ о max. и min. принадлежитъ **Грилье**.

691. Теорема. —*Если сумма нѣсколькихъ положительныхъ перемѣнныхъ* x, y, z, *постоянна и равна* a, *то произведеніе* $x^p y^q z^r$, *гдѣ* p, q, r *данныя цѣлыя числа, имѣетъ maximum, когда перемѣнныя пропорціональны своимъ показателямъ, т. е. когда* $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$, *полагая, что* x, y *и* z *могутъ удовлетворить этимъ условіямъ.*

Замѣчая, что введеніе постоянныхъ множителей не измѣняетъ условій maximum'a, заключаемъ, что данное выраженіе будетъ имѣть max. при такихъ же x, y, z, какъ и

$$\frac{x^p y^q z^r}{p^p q^q r^r}, \text{ или } \left(\frac{x}{p}\right)^p\left(\frac{y}{q}\right)^q\left(\frac{z}{r}\right)^r, \text{ или}$$

$$\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{p}}_{p \text{ множит.}}\times\underbrace{\frac{y}{q}\cdot\frac{y}{q}\cdot\ldots\cdot\frac{y}{q}}_{q \text{ множит.}}\times\underbrace{\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdot\ldots\cdot\frac{z}{r}}_{r \text{ множит.}}$$

Произведеніе это состоитъ изъ $p+q+r$ множителей, которыхъ сумма постоянна и равна a, такъ какъ $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}+\cdot\cdot+\frac{x}{p}=\frac{x}{p}\cdot p=x$, $\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\cdot\cdot\cdot+\frac{y}{q}=\frac{y}{q}\cdot q=y$ и $\frac{z}{r}+\cdot\cdot\cdot+\frac{z}{r}=r\cdot\frac{z}{r}=z$. Примѣняя сюда теорему § 682, заключаемъ, что произведеніе достигнетъ maximum'a, когда множители сдѣлаются равными, т. е. когда

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}.$$

Пользуясь извѣстнымъ свойствомъ равныхъ отношеній и помня, что $x+y+z=a$, имѣемъ:

$$x=\frac{pa}{p+q+r},\quad y=\frac{qa}{p+q+r},\quad z=\frac{ra}{p+q+r};$$

самый же maximum =

$$p^p q^q r^r\left(\frac{a}{p+q+r}\right)^{p+q+r}.$$

692. Задача I. — *Какой изъ всѣхъ конусовъ, вписанныхъ въ данный шаръ, имѣетъ наибольшій объемъ?*

Обозначивъ радіусъ основанія конуса буквою x, разстояніе центра шара отъ этого основанія буквою y, и буквою R радіусъ шара, имѣемъ

$$x^2+y^2=R^2,\quad V=\frac{1}{3}\pi x^2(R+y);$$

или, замѣнивъ x^2 его величиною R^2-y^2, найдемъ

$$V=\frac{1}{3}\pi(R^2-y^2)(R+y)=\frac{1}{3}\pi(R+y)^2(R-y).$$

Отбросивъ постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi$, и разсматривая произведеніе $(R+y)^2$

$(R-y)$, замѣчаемъ, что сумма первыхъ степеней множителей, т. е. $(R+y)+(R-y)$ равна постоянной $2R$, слѣд. произведеніе имѣетъ maximum, когда перемѣнныя $R+y$ и $R-y$ пропорціональны своимъ показателямъ, т. е. $\frac{R+y}{2}=\frac{R-y}{1}$, откуда $y=\frac{R}{3}$.

693. Задача II. — *Описать около даннаго цилиндра конусъ наименьшаго объема.*

Если вообразимъ (черт. 77), что вершина A перемѣщается по оси AI, отъ точки H, то объемъ конуса вначалѣ безконечно-великъ, ибо основаніе его какъ угодно велико, а высота близка къ HI; по мѣрѣ удаленія точки A въ безконечность, объемъ снова приближается къ безконечности, ибо высота стремится къ безконечности, а основаніе—къ конечной величинѣ основанія цилиндра. Измѣняясь отъ ∞ до ∞, объемъ конуса проходитъ чрезъ minimum.

Пусть H и R — высота и радіусъ основанія цилиндра, x и y — высота и радіусъ основанія конуса. Объемъ конуса будетъ $V=\frac{1}{3}\pi x y^2$; но $y:R=x:(x-H)$, что слѣдуетъ изъ подобія тр-ковъ ABI и AEH; слѣд.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.\frac{x^3}{(x-H)^2}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (1).$$

Отбрасывая постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi R^2$, ищемъ minimum выраженія $\frac{x^3}{(x-H)^2}$, соотвѣтствующій maximum'у выраженія $\frac{(x-H)^2}{x^3}$, которое можно представить въ видѣ $\frac{1}{x}\left(1-\frac{H}{x}\right)^2$. Условія maximum'а этого выраженія не измѣнятся, если помножимъ его на постоянное количество H, что даетъ

$$\frac{H}{x}\left(1-\frac{H}{x}\right)^2.$$

Сумма первыхъ степеней производителей $\frac{H}{x}$ и $1-\frac{H}{x}$ есть величина постоянная 1, слѣд. по теоремѣ § 691 maximum имѣетъ мѣсто, когда

$$\frac{\frac{H}{x}}{1}=\frac{1-\frac{H}{x}}{x},$$

откуда $x=3H$.

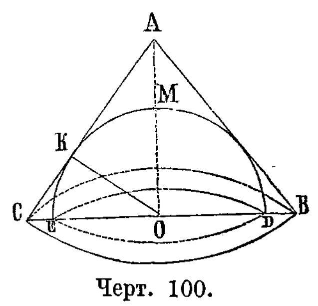
Итакъ объемъ конуса достигаетъ minimum'а, когда высота конуса дѣлается втрое больше высоты цилиндра. Подставляя 3H вмѣсто x въ (1), находимъ, что минимальный объемъ $=\frac{9}{4}\pi R^2 H$, т. е. составляетъ $\frac{9}{4}$ объема цилиндра.

694. Задача III. — *Какой изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго полушара, имѣетъ наименьшую боковую поверхность?*

Какъ и въ предыдущей задачѣ, сначала à priori убѣждаемся, что разсматриваемая поверхность имѣетъ minimum.

Пусть радіусъ шара будетъ R; x, y и S — высота, радіусъ основанія и боковая поверхность конуса; имѣемъ:

$$S = \pi y \times AC.$$



Черт. 100.

Подобные тр-ки AOC и AOK даютъ:

$$\frac{AC}{x} = \frac{y}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - R^2}},$$

откуда
$$\frac{AC \times y}{xR} = \frac{x^2}{x^2 - R^2};$$

слѣд.
$$S = \pi R \cdot \frac{x^3}{x^2 - R^2}$$

Вопросъ приводится къ отысканію minimum'а $\frac{x^3}{x^2 - R^2}$, и слѣд. maximum'а обратной функціи $\frac{x^2 - R^2}{x^3}$, которой можно дать видъ $\frac{1}{x}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)$. Возвысивъ въ квадратъ и умноживъ на R^2, что не измѣнитъ условій maximum'а, приводимъ вопросъ къ нахожденію maximum'а выраженія

$$\frac{R^2}{x^2}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)^2,$$

въ которомъ множители $\frac{R^2}{x^2}$ и $1 - \frac{R^2}{x^2}$ имѣютъ постоянную сумму, равную 1; и слѣд. произведеніе это будетъ имѣть maximum тогда, когда

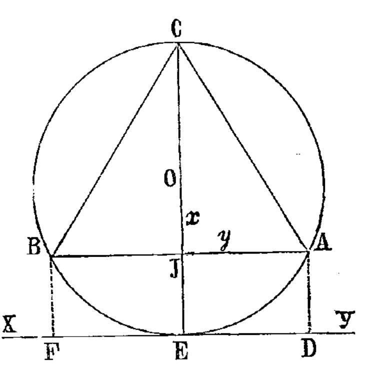
$$\frac{\frac{R^2}{x^2}}{1} = \frac{1 - \frac{R^2}{x^2}}{2},$$

откуда $x^2 = 3R^2$, и слѣд. $x = R\sqrt{3}$. Заключаемъ, что конусъ минимальной боковой поверхности имѣетъ высоту, равную сторонѣ правильнаго треуг-ка, вписаннаго въ большомъ кругѣ шара; самая же минимальная поверхность $= \frac{3}{2}\pi R^2\sqrt{3}$.

695. Задача IV. — *Равнобедренный треугольникъ* ABC, *вписанный въ данный кругъ, вращается около касательной* xy, *параллельной его основанію; каковы должны быть размѣры треугольника, чтобы объемъ, имъ описанный, имѣлъ наибольшую величину?*

Пусть $OI = x$, $IA = y$. Объемъ выразится разностью между двойнымъ объемомъ усѣченнаго конуса, описаннаго трапеціей ADEC, и цилиндромъ, описаннымъ прямоугольникомъ ABFD, т. е.

$$V = \frac{2\pi y}{3}[4R^2 + (R - x)^2 + 2R(R - x)] - \pi(R - x)^2.2y;$$



Черт. 101.

замѣнивъ y его величиною $\sqrt{R^2 - x^2}$ и упростивъ, приведемъ выраженіе къ виду

$$V = \frac{4}{3}\pi(2R - x)(R + x)\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Можемъ искать maximum квадрата этого выраженія, или, отбрасывая постоянный множитель, — выраженія

$$(R+x)^3 \, . \, (R-x) \, . \, (2R-x)^2$$

Помноживъ $R+x$ на 2, мы сдѣлаемъ сумму первыхъ степеней этихъ множителей постоянною; но примѣненіе теоремы § 692 поведетъ къ равенствамъ $\frac{2(R+x)}{3}=\frac{R-x}{1}=\frac{2R-x}{2}$, которымъ нельзя удовлетворить никакимъ значеніемъ x. Поэтому, обращаемся къ способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; помноживъ $R+x$ и $R-x$ на произвольныя постоянныя α и β, замѣчаемъ, что сумма $\alpha(R+x)+\beta(R-x)+(2R-x)$ будетъ постоянна при $\alpha-\beta-1=0$; и тогда maximum будетъ имѣть мѣсто при условіи

$$\frac{\alpha(R+x)}{3}=\frac{\beta(R-x)}{1}=\frac{2R-x}{2}.$$

Выражая отсюда α и β черезъ x, находимъ

$$\alpha=\frac{3(2R-x)}{2(R+x)}, \quad \beta=\frac{2R-x}{2(R-x)}.$$

Подстановка этихъ величина α и β въ ур-ніе $\alpha-\beta-1=0$ даетъ:

$$\frac{3(2R-x)}{2(R+x)}-\frac{2R-x}{2(R-x)}-1=0, \text{ или } 3x^2-5Rx+R^2=0.$$

Легко видѣть, что корни дѣйствительны и оба положительны; но задачѣ можетъ отвѣчать только тотъ изъ нихъ, который $<R$. Подстановка R въ первую часть ур-нія даетъ результатъ $(-R^2)$: заключаемъ, что R находится между корнями, т. е. большій корень больше, а меньшій—меньше R. Откидывая большій корень, соотвѣтствующій знаку $+$ передъ радикаломъ, находимъ:

$$x=\frac{5R-\sqrt{25R^2-12R^2}}{6}=\frac{R(5-\sqrt{13})}{6}.$$

696. Теорема.—*Сумма двухъ перемѣнныхъ, которыхъ произведеніе равно положительному постоянному, имѣетъ maximum, когда оба слагаемыя отрицательны, и minimum, когда они положительны; причемъ maximum и minimum имѣютъ мѣсто, когда оба количества равны между собою, если только они могутъ быть сдѣланы равными. Сумма же двухъ перемѣнныхъ, которыхъ произведеніе равно постоянной отрицательной величинѣ, не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а.*

Прямое доказательство.—Пусть произведеніе $=p$, а одинъ изъ множителей его $=x$; другой множитель будетъ $\frac{p}{x}$, а сумма ихъ

$$y=x+\frac{p}{x}.$$

1-й случай: $p<0$.—Назвавъ абсолютную величину произведенія p черезъ p', имѣемъ

$$y=x-\frac{p'}{x}.$$

Будемъ измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$. При $x=-\infty$, $y=-\infty+\frac{p'}{\infty}=-\infty$; по мѣрѣ приближенія x къ 0, первый членъ, оставаясь отрицательнымъ, увеличивается до 0, второй членъ $\left(-\frac{p'}{x}\right)$, оставаясь положительнымъ, увеличивается до $+\infty$; слѣд, и сумма y увеличивается отъ $-\infty$ до $+\infty$. — Продолжаемъ увеличивать x отъ 0 до $+\infty$. При x немного большемъ нуля, первый членъ суммы весьма малъ; второй членъ, будучи равенъ $-p'$, дѣленному на весьма малую положительную величину, будетъ равенъ отриц. числу съ весьма большою абсолютною величиною; слѣд. при переходѣ x чрезъ 0, функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, дѣлая скачекъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$. При дальнѣйшемъ увеличеніи x до $+\infty$, первый членъ возрастаетъ до $+\infty$, второй, оставаясь отрицательнымъ, приближается къ 0: оба члена опять увеличиваются, потому и сумма ихъ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Такимъ образомъ при увеличеніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, y претерпѣваетъ два ряда измѣненій: въ томъ и другомъ y идетъ непрерывно увеличиваясь отъ $-\infty$ до ∞; оба ряда раздѣлены разрывомъ непрерывности, имѣющимъ мѣсто при $x=0$. Функція не имѣетъ, слѣд., ни max., ни minimum'a.

Таблица измѣненій y.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
. . . . . .	возрастаетъ
$0-h$	$+\infty$
$0+h$	$-\infty$
. . . . . .	возрастаетъ
$+\infty$	$+\infty$

Кривая измѣненій.

Черт. 102.

Оба ряда изображаются ординатами кривыхъ MN и PQ, имѣющихъ ассимптоту y; ось x они пересѣкаютъ въ разстояніяхъ отъ начала, равныхъ $+\sqrt{p'}$ и $-\sqrt{p'}$: ибо изъ $y=0$ слѣдуетъ $x-\frac{p'}{x}=0$, откуда $x^2=p'$ и $x=\pm\sqrt{p'}$.

2-й случай; $p>0$.—Въ этомъ случаѣ

$$y=x+\frac{p}{x}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

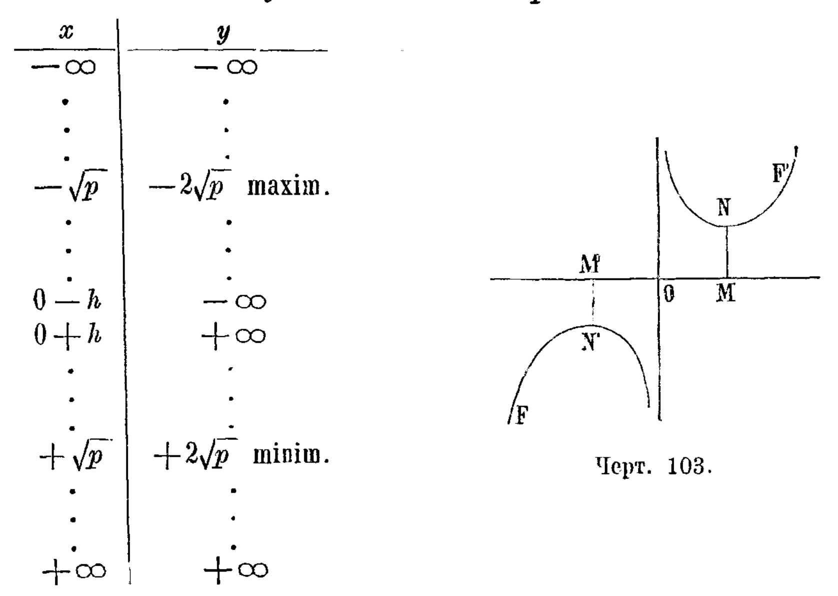
Этому равенству послѣдовательно даемъ видъ:

$$y=\sqrt{\left(x+\frac{p}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{p}{x}\right)^2-2p+4p}=\sqrt{4p+\left(x-\frac{p}{x}\right)^2}.$$

Будемъ увеличивать x отъ 0 до $+\infty$. При увеличеніи x отъ 0 до $+\sqrt{p}$, функція $x-\frac{p}{x}$, по предыдущему, увеличивается отъ $-\infty$ до 0, а слѣд. $\left(x-\frac{p}{x}\right)^2$ уменьшается отъ $+\infty$ до 0. При возрастаніи x отъ $+\sqrt{p}$ до $+\infty$, $x-\frac{p}{x}$ возрастаетъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и квадратъ этой функціи, отъ 0 до $+\infty$. Функція y, оставаясь положительною, уменьшается сначала отъ $+\infty$ до $+2\sqrt{p}$, а затѣмъ увеличивается отъ $+2\sqrt{p}$ до $+\infty$. Слѣд. y проходитъ чрезъ minimum $+2\sqrt{p}$, при $x=+\sqrt{p}$.

Изъ (1) непосредственно ясно, что при двухъ значеніяхъ x, равныхъ по величинѣ, но противоположныхъ по знаку, y имѣемъ величины равныя, отличающіяся только знаками. Слѣд. въ интервалѣ измѣненій x отъ $-\infty$ до 0, функція возрастаетъ до maximum'а $-2\sqrt{p}$, при $x=-\sqrt{p}$, а затѣмъ при увеличеніи x отъ $-\sqrt{p}$ до 0, y уменьшается отъ $-2\sqrt{p}$ до $-\infty$. При переходѣ x чрезъ 0, имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности изъ $-\infty$ въ $+\infty$.

Таблица измѣненій y. *Кривая измѣненій.*



x	y
$-\infty$	$-\infty$
.	.
.	.
.	.
$-\sqrt{p}$	$-2\sqrt{p}$ maxim.
.	.
.	.
.	.
$0-h$	$-\infty$
$0+h$	$+\infty$
.	.
.	.
.	.
$+\sqrt{p}$	$+2\sqrt{p}$ minim.
.	.
.	.
.	.
$+\infty$	$+\infty$

Черт. 103.

Непрямое доказательство. — Обозначивъ данное произведеніе перемѣнныхъ x и $\frac{p}{x}$ буквою p, а сумму ихъ S, имѣемъ ур-ніе

$$x+\frac{p}{x}=S\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Рѣшая ур-ніе (1) относительно x, имѣемъ:

$$x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-p}.$$

Чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было $\frac{S^2}{4}\geqq p$, или $S^2\geqq 4p$. Различаемъ два случая.

I. $p < 0$.—Условіе $S^2 > 4p$ всегда будетъ удовлетворено, каково бы ни было S; слѣд. сумма двухъ факторовъ, произведеніе которыхъ равно постоянной отрицат. величинѣ, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+\infty$: сумма S не имѣетъ ни max., ни min.

II. $p > 0$. Неравенству $S^2 \gtreqless 4p$ можно дать видъ

$$(S + 2\sqrt{p})(S - 2\sqrt{p}) \gtreqless 0;$$

оно будетъ удовлетворено, если оба множителя будутъ имѣть одинаковые знаки; слѣд. должно быть:

1) Или: $S \gtreqless 2\sqrt{p}$, откуда: $\min.(S) = 2\sqrt{p}$; причемъ $x = \frac{S}{2} = \sqrt{p}$; другой множитель также $= \frac{p}{x} = \sqrt{p}$.

2) Или: $S \lesseqgtr -2\sqrt{p}$, откуда: $\max.(S) = -2\sqrt{p}$; причемъ $x = \frac{S}{2} = -\sqrt{p}$; другой множитель $= \frac{p}{x} = -\sqrt{p}$.

Итакъ: minimum и maximum суммы имѣютъ мѣсто при равенствѣ слагаемыхъ.

697. Задача I. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ одинаковой площади какой имѣетъ наименьшій периметръ?*

Обозначая перемѣнныя измѣренія прямоугольника черезъ x и y, имѣемъ, по условію: $xy = a^2$, гдѣ a^2 постоянно; найти minimum периметра $2x + 2y$, или $\min.(x + y)$. Такъ какъ x м. б. сдѣлано равнымъ y, то площадь тогда получимъ наименьшій периметръ, когда будетъ $x = y = a$, т. е. когда прямоугольникъ обратится въ квадратъ: Самый minimum периметра равенъ $4a$.

698. Задача II. — *Даны двѣ параллели и точка* A *межиу ними, служащая вершиною прямаго угла прямоугольнаго треугольника, котораго другія двѣ вершины лежатъ на каждой изъ параллелей. Какое положеніе нужно дать треугольнику, чтобы площадь была minima?*

Проведемъ общій перпендикуляръ DE къ параллелямъ, и пусть: $AD = a$, $AE = b$, $EC = x$. Углы EAC и ABD равны по перпедикулярности сторонъ, слѣд. треугольники EAC, DAB подобны, и потому

$$AC : EC = AB : AD, \text{ или } AC : x = AB : a \quad \dots\dots (1)$$

Черт. 104.

Умножая оба предыдущіе члена па AC, имѣетъ: $\overline{AC}^2 : x = AB.AC : a$; слѣд. удвоенная площадь треугольника ABC, или $AB.AC = \frac{\overline{AC}^2 . a}{x}$; но $\overline{AC}^2 = b^2 + x^2$, откуда:

$$2 \text{ пл. } ABC = \frac{a}{x}(b^2 + x^2) = a\left(\frac{b^2}{x} + x\right).$$

Произведеніе положительныхъ членовъ $\frac{b^2}{x}$ и x равно постоянному b^2, слѣд. сумма $\frac{b^2}{x} + x$ имѣетъ minimum, когда $\frac{b^2}{x} = x$, или $x^2 = b^2$, откуда $x = b$. Но изъ рав. (1) видно, что при $x = b$ имѣемъ: $AB = AC$. Заключаемъ, что требуемый треугольникъ есть равнобедренный.

699. Задача III. — *Опредѣлить наивыгоднѣйшее соединенiе элементовъ гальванической баттареи при данномъ внѣшнемъ сопротивленiи.*

Пусть всѣхъ элементовъ M; электровозбудительная сила каждаго E, внутреннее сопротивленiе каждаго элемента ρ, данное внѣшнее сопротивленiе r. Раздѣлимъ элементы на m группъ по n элементовъ въ каждой: $M = m.n$; въ каждой группѣ соединимъ полюсы параллельно (цинкъ съ цинкомъ, уголь съ углемъ), и полученныя группы соединимъ послѣдовательно; составится баттарея какъ бы изъ m большихъ элементовъ. Электровозбудительная сила каждая изъ нихъ $=E$, всей баттареи — mE; сопротивленiе каждаго изъ такихъ элементовъ $= \frac{\rho}{n}$; внутр. сопр. всей баттареи $= m.\frac{\rho}{n}$. Сила тока

$$I = \frac{mE}{m.\frac{\rho}{n} + r} = \frac{ME}{\frac{M\rho}{n} + rn}.$$

Числитель ME этой дроби есть величина постоянная, знаменатель — содержитъ перемѣнное n; дробь будетъ имѣть maximum, когда знаменатель достигнетъ minimum'а. Но произведенiе положительныхъ перемѣнныхъ $\frac{M\rho}{n}$ и rn есть величина постоянная ($M\rho r$), слѣд. сумма будетъ имѣть minimum, когда

$$\frac{M\rho}{n} = rn, \text{ или } \frac{m}{n}\rho = r,$$

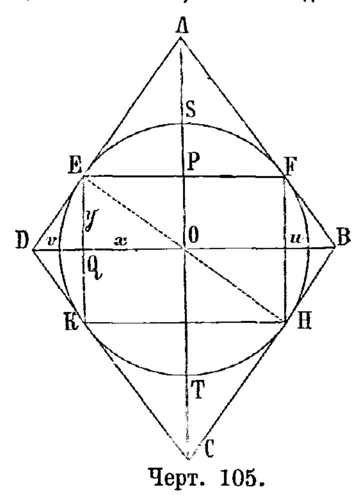
т. е. *сила тока достигаетъ maximum'а, когда внутреннее сопротивленiе баттареи равно внѣшнему.*

700. Когда положительныя слагаемыя, коихъ произведенiе постоянно, не могутъ быть сдѣланы равными, minimum ихъ суммы будетъ имѣть мѣсто тогда, когда абсолютная величина ихъ разности достигнетъ минимума.

Въ самомъ дѣлѣ, называя перемѣнныя буквами x и y, имѣемъ тождество

$$(x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2,$$

гдѣ $4xy$ — постоянно, слѣд. вторая часть достигнетъ minimum'а, когда $(x-y)^2$ будетъ minim., т. е. когда абсолютная величина разности $x-y$ будетъ minima.



Черт. 105.

701. Задача IV. — *Имѣемъ перемѣнный ромбъ, описанный около даннаго круга, и вписанный прямоугольникъ, вершины котораго находятся въ точкахъ касанiя сторонъ ромба. При какомъ положенiи прямоугольника сумма площадей обоихъ четыреугольниковъ будетъ minima.*

Когда точка A будетъ удаляться по линiи SA отъ точки S въ безконечность, площадь ромба будетъ измѣняться отъ безконечности до безконечности; слѣд. сумма обѣихъ площадей сначала уменьшается, затѣмъ начинаетъ увеличиваться, слѣд. проходитъ чрезъ minimum. Затѣмъ, легко доказать, что произведенiе площадей остается по-

стояннымъ; въ самомъ дѣлѣ, обозначая площадь ромба буквою Z, площадь прямоугольника Z', и замѣчая, что $Z = 4\Delta AOD, Z' = 8\Delta OPE$, имѣемъ: $Z':2Z = OPE:AOD = R^2:\overline{AD}^2$; но $Z = AD.2R$, слѣд. $Z':2Z = 4R^4:Z^2$, откуда $Z.Z' = 8R^4$ — величинѣ постоянной. Хотя произведеніе разсматриваемыхъ перемѣнныхъ и постоянно, но какъ мы не можемъ площади сдѣлать равными (ибо они всегда раздѣлены площадью круга), то для опредѣленія minimum'a $Z + Z'$ должны искать minimum разности $Z - Z' = 4\,(DEQ + AEP)$. Но $DEQ = \frac{1}{2} y \times DQ = \frac{1}{2} y \times \frac{y^2}{x} = \frac{y^3}{2x}$; а $AEP = \frac{x^3}{2y}$; слѣд:

$$Z - Z' = 2\left(\frac{y^3}{x} + \frac{x^3}{y}\right) = 2\left(\frac{x^4 + y^4}{xy}\right).$$

Замѣчая, что $x^2 + y^2 = R^2$, имѣемъ отсюда: $x^4 + y^4 = R^4 - 2x^2y^2$, слѣд.

$$Z - Z' = 2.\frac{R^4 - 2x^2y^2}{xy}.$$

Очевидно, это выраженіе имѣетъ minimum, когда x^2y^2 имѣетъ maximum; но сумма $x^2 + y^2$ равна постоянной R^2, слѣд. x^2y^2 имѣетъ maximum при $x = y$. Итакъ искомый минимумъ сумм $Z + Z'$ имѣетъ мѣсто тогда, когда прямоугольникъ обращается въ квадратъ: тогда и ромбъ обращается въ квадратъ, и величина min. $(Z + Z') = 6R^2$.

702. Теорема. — *Сумма* n *положительныхъ перемѣнныхъ, которыхъ произведеніе постоянно, имѣетъ minimum, когда эти* n *количествъ равны между собою* (полагая, что они могутъ быть сдѣланы равными).

Нужно доказать, что если $xyz \ldots t = a$, гдѣ a постоянно, то сумма $x + y + z + \cdot\cdot\cdot + t$ имѣетъ minimum, когда $x = y = z = \cdot\cdot\cdot = t = \sqrt[n]{a}$, а самый minimum $= n\sqrt[n]{a}$.

Во первыхъ, сумма имѣетъ minimum, ибо она всегда > 0. Докажемъ, что пока слагаемыя неравны, сумма можетъ быть уменьшена. Пусть, напр., x не равно y; мы можемъ замѣнить каждое изъ этихъ перемѣнныхъ квадратнымъ корнемъ изъ ихъ произведенія, не нарушая условія $xyz \cdot\cdot\cdot t = a$, ибо $\sqrt{xy}.\sqrt{xy} = xy$; но тогда, въ силу теоремы 696, будемъ имѣть

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} < x + y;$$

а придавъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства по $z + \cdot\cdot\cdot + t$, найдемъ

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + z + \cdot\cdot\cdot + t < x + y + z + \cdot\cdot\cdot + t.$$

Значитъ, пока въ суммѣ есть неравныя слагаемыя, сумма эта можетъ быть уменьшена; стало быть мы можемъ ее уменьшать, т. е. она не достигнетъ наименьшей величины, не будетъ minima, до тѣхъ поръ, пока всѣ ея части не сдѣлаются равными. Итакъ, minimum суммы имѣетъ мѣсто при равенствѣ слагаемыхъ; тогда условіе $xyz \cdot\cdot\cdot t = a$ обратится въ $x^n = a$, откуда $x = \sqrt[n]{a}$, и minimum суммы $= n\sqrt[n]{a}$.

Примѣчаніе I. — Эта теорема, вообще, перестаетъ быть вѣрною, если перемѣнныя подчинены инымъ условіямъ, кромѣ неизмѣнности ихъ произведенія. Но если новыя условія дозволяютъ перемѣннымъ $x, y, \cdot\cdot\cdot$ сдѣлаться равными, теорема имѣетъ мѣсто.

Примѣчаніе II. — Если всѣ слагамыя отрицательны, то при постоянствѣ ихъ произведенія, сумма ихъ имѣетъ maximum, когда всѣ они равны.

Пусть какія нибудь два слагаемыя x и y неравны; не измѣняя условія $xyz \cdot\cdot\cdot t = a$, можно каждое изъ нихъ замѣнить отрицательнымъ $\sqrt{xy}$; но извѣстно, что если произведеніе двухъ отрицательныхъ постоянно, то сумма ихъ имѣетъ maximum, когда они равны; слѣд $\sqrt{xy}+\sqrt{xy} > x+y$, откуда, придавая къ обѣимъ частямъ по $z+\cdot\cdot\cdot t$, найдемъ

$$\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+z+\cdot\cdot\cdot+t > x+y+z+\cdot\cdot\cdot t,$$

откуда видно, что если два какія нибудь слагаемыя неравны, то сумма можетъ быть увеличена; заключаемъ, что сумма достигнетъ maximum'а, когда всѣ ея слагаемыя будутъ равны.

703. Задача I. — *Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую площадь, какой имѣетъ наименьшій периметръ?*

Обозначивъ стороны черезъ x, y, z, а постоянную площадь буквою Q, имѣемъ

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=16Q^2.$$

Сумму $x+y+z$ можно представить въ видѣ:

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{x+y+z}{3}+\frac{x+y-z}{1}+\frac{x-y+z}{1}+\frac{-x+y+z}{1}\right\}.$$

Произведеніе четырехъ членовъ, заключенныхъ въ скобки, равно постоянной $\frac{16}{3}Q^2$, сл. сумма имѣетъ minimum, когда ея члены равны. Найдемъ, что они равны при $x=y=z$. Слѣд. минимальный периметръ принадлежитъ правильному треугольнику, а самый min. $=2\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{Q}$.

704. Задача II. — *Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ одинаковаго объема какой имѣетъ наименьшую полную поверхность.*

Пусть перемѣнныя измѣренія параллелопипедовъ, сохраняющихъ одинаковый объемъ a^3, будутъ x, y, z; имѣемъ:

$$xyz=a^3.$$

Ищемъ minim. полной поверхности $S=2(xy+xz+yz)$; замѣчая, что $xy.xz.yz=x^2.y^2.z^2=a^6$, находимъ, что сумма достигнетъ minimum'а при $xy=xz=yz$, или при $x=y=z=a$, т. е. когда параллелопипедъ будетъ *кубъ*; самая минимальная поверхность равна $6a^2$.

Повѣрка. Взявъ $x=a+h$, $y=a-h$, и слѣд. $z=\frac{a^3}{a^2-h^2}$, найдемъ:

$$S'=6a^2+2h^2+\frac{4h^4}{a^2-h^2}, \text{ что больше } 6a^2.$$

705. Задача III. — *Зная, что $x^\alpha y^\beta z^\gamma =$ пост. q, найти minimum суммы $mx^\alpha+ny^\beta+pz^\gamma$.*

Изъ условія $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}=q$ имѣемъ $(mx^{\alpha})(ny^{\beta})(pz^{\gamma})=mnpq$; слѣд. мы должны найти minimum суммы, зная, что произведеніе ея членовъ постоянно. Искомый minimum имѣетъ мѣсто при $mx^{\alpha}=ny^{\beta}=pz^{\gamma}=\sqrt[3]{mnpq}$, а самый minimum $=3\sqrt[3]{mnpq}$.

Напр., зная, что $xy=16$, найдемъ minimum $3x+12y$, разсуждая такъ: изъ условія $xy=16$ имѣемъ: $(3x)(12y)=16.3.12=(24)^2$; слѣд. данная сумма имѣетъ minimum при $3x=12y=24$, т. е. при $x=8$ и $y=2$; самый minimum$=2.24$ т. е. 48.

Еще примѣръ. Зная, что $xy=a^2$, найти min. x^2+xy+y^2? Изъ $xy=a^2$ заключаемъ $x^3y^3=a^6$, или $x^2.xy.y^2=a^6$; произведеніе слагаемыхъ постоянно, слѣд. minimum суммы имѣетъ мѣсто при $x^2=xy=y^2$, т. е. при $x=y=a$, ибо $xy=a^2$; самый minimum$=3a^2$.

706. Теорема.—*Если произведеніе данныхъ степеней нѣсколькихъ перемѣнныхъ* x,y,z *имѣетъ постоянную величину*: $x^py^qz^r=P$, *то сумма первыхъ степеней этихъ перемѣнныхъ*, $x+y+z$, *имѣетъ minimum, когда числа* x,y,z *пропорціональны своимъ показателямъ, т. е. когда* $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$, *если только числа эти могутъ имѣть такія значенія.*

Раздѣливъ обѣ части равенства $x^py^qz^r=P$ на постоянное количество $p^p.q^q.r^r$, найдемъ

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p\cdot\left(\frac{y}{q}\right)^q\cdot\left(\frac{z}{r}\right)^r=\frac{P}{p^p.q^q.r^r}\quad\ldots(1)$$

что можно представить въ видѣ

$$\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\frac{x}{p}}_{p\text{ разъ}}\cdot\underbrace{\frac{y}{q}\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{y}{q}}_{q\text{ разъ}}\cdot\underbrace{\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdots\frac{z}{r}}_{r\text{ разъ}}=\frac{P}{p^p.q^q.r^r}.$$

Сумма производителей первой части равна $\frac{x}{p}\cdot p+\frac{y}{q}\cdot q+\frac{z}{r}\cdot r$ или $x+y+z$, т. е искомая, произведеніе же ихъ—постоянно, $\left(\frac{P}{p^p.q^q.r^r}\right)$, слѣд., по теоремѣ § 702, эта сумма будетъ minima при равенствѣ ея частей, т. е. при

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}\quad\ldots(2)$$

Соотвѣтствующія минимальной суммѣ значенія перемѣнныхъ имѣемъ изъ ур-ній (1) и (2), именно

$$x=p.\sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p.q^q.r^r}},\qquad y=q.\sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p.q^q.r^r}},\qquad z=r.\sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p.q^q.r^r}}.$$

Самый minimum суммы$=(p+q+r).\sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p.q^q.r^r}}$.

707. Задача I.— *Зная, что* $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}=q$, *найти minimum* $mx^a+ny^b+pz^c$.—

Изъ $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}=q$ имѣемъ:

$$(x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma})^{abc}=q^{abc}, \text{ т. е. } (x^{a})^{bc\alpha}(y^{b})^{ac\beta}(z^{c})^{ab\gamma}=q^{abc},$$

$$\text{слѣд. } (mx^{a})^{bc\alpha}(ny^{b})^{ac\beta}(pz^{c})^{ab\gamma}=m^{bc\alpha}n^{ac\beta}p^{ab\gamma}q^{abc}\ldots (1)$$

Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ нахожденію minimum'а суммы $mx^{a}+ny^{b}+pz^{c}$, зная, что произведеніе различныхъ степеней ея членовъ постоянно; по теоремѣ § 706 искомый minimum имѣетъ мѣсто при

$$\frac{mx^{a}}{bc\alpha}=\frac{ny^{b}}{ac\beta}=\frac{pz^{c}}{ab\gamma};$$

соединяя эти два ур-нія съ (1), найдемъ, при какихъ x,y,z имѣетъ мѣсто minimum данной суммы, и самый minimum.

Примѣръ.—*Зная, что* $x^2y^3=a^5$, *найти minimum* $3x+2y$.

Изъ $x^2y^3=a^5$ имѣемъ: $(3x)^2(2y)^3=9\times 8\times a^5$; слѣд. по теоремѣ § 706 заключаемъ, что искомый minimum имѣетъ мѣсто при $\frac{3x}{2}=\frac{2y}{3}$; выражая отсюда x и вставляя въ условіе, имѣемъ: $\left(\frac{4y}{9}\right)^2\cdot y^3=a^5$, откуда $y=a\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$; самый minimum есть $\frac{4y}{3}+2y$, т. е. $\frac{19a}{3}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$. —

708. Задача II.—*Найти minimum полной поверхности ниши даннаго объема* $\pi\frac{a^3}{6}$.

Ниша есть тѣло, образуемое вращеніемъ на $180°$ около оси AC фигуры, состоящей изъ прямоугольника BDCO, завершающагося квадрантомъ ABO. Пусть радіусъ $OA=x$, высота OC прямоугольника равна y; поверхность ниши $=\pi\cdot\frac{x^2}{2}+\pi xy+\pi x^2$ или $\frac{\pi}{2}(3x^2+2xy)$. Но $\frac{\pi a^3}{6}=\frac{\pi}{2}x^2y+\frac{\pi x^3}{3}$, откуда $y=\frac{a^3-2x^3}{3x^2}$; слѣд. пов. $=\frac{\pi}{2}\left(3x^2+\frac{2a^3-4x^3}{3x}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{3}x^2+\frac{2a^3}{3x}\right)=\frac{\pi}{6}\left(5x^2+\frac{2a^3}{x}\right)$. Произведеніе $(5x^2)\cdot\left(\frac{2a^3}{x}\right)^2=$ пост. $20a^6$, слѣдоват. сумма $5x^2+\frac{2a^3}{x}$,

A
O B
C D

Черт. 106.

по теор. § 706, будетъ minima, когда $\frac{5x^2}{1}=\frac{\frac{2a^3}{x}}{2}$, откуда $x=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}$. Отсюда слѣдуетъ: $y=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}=x$.

709. Задача III.—*Найти minimum суммы* $mx^{a}+\frac{n}{x^{b}}$.

Всегда можно найти такія два числа α и β, чтобы $a\alpha=b\beta$; найдя ихъ, имѣемъ тождество $(x^{a})^{\alpha}=(x^{b})^{\beta}$, откуда $(mx^{a})^{\alpha}\cdot\left(\frac{n}{x^{b}}\right)^{\beta}=m^{\alpha}\cdot n^{\beta}$. Та-

кимъ образомъ вопросъ приведенъ къ нахожденію minimum'а суммы, зная, что произведеніе двухъ степеней ея членовъ — постоянно; по теор. § 706 minimum имѣетъ мѣсто при $\frac{mx^a}{\alpha}=\frac{\frac{n}{x^b}}{\beta}$, т. е. при $x^{a+b}=\frac{\alpha n}{\beta m}=\frac{bn}{am}$, откуда

$$x=\sqrt[a+b]{\frac{bn}{am}};\ \text{самый minimum}=(a+b).\sqrt[a+b]{\left(\frac{n}{a}\right)^a\left(\frac{m}{b}\right)^b}.$$

710. Теоремы 702 и 706 обратны теоремамъ 682 и 691. Этотъ результатъ встрѣчается часто и его можно формулировать такъ:

Теорема.—*Если* U *и* V *суть функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ* x, y, z,....; *если, затѣмъ, при постоянномъ значеніи* A *функціи* U *другая функція* V *имѣетъ maximum* B; *если, сверхъ того,* B *измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ и* A, *то обратно:* U *будетъ имѣть minimum равный* A, *когда* V *будетъ сохранять постоянное значеніе* B.

Въ самомъ дѣлѣ, когда U получаетъ значеніе A, то этимъ перемѣнныя x, y, z,... не опредѣляются, такъ какъ они должны удовлетворять только одному ур-нію

$$U=A;$$

слѣд. функція V можетъ принимать безчисленное множество различныхъ значеній, въ числѣ которыхъ наибольшее, по условію, есть B; отсюда ясно, что если, на оборотъ, мы дадимъ функціи V постоянное значеніе B, то въ числѣ безчисленнаго множества значеній, которыя можетъ принимать U, будетъ находиться и A. И легко показать, что U не можетъ получить никакого значенія меньшаго A; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что U можетъ принять значеніе $A'<A$, мы найдемъ, что наибольшее изъ значеній V, совмѣстное съ $U=A'$, будетъ меньше B, въ силу того условія, что B и A измѣняются въ одномъ смыслѣ. Слѣд. A есть дѣйствительно minimum функціи U, когда V сохраняетъ постоянное значеніе B.

Примѣръ.—Пусть

$$U=x+y+z+t,\quad V=xyzt$$

по теоремѣ (682), если U сохраняетъ постоянную величину A, то V получаетъ наибольшее значеніе при

$$x=y=z=t,$$

а самый этотъ maximum $B=\left(\frac{A}{4}\right)^4$. Но A и B измѣняются въ одномъ смыслѣ (ибо x, y, z, t—положительны), слѣд. когда V сохраняетъ значеніе $\left(\frac{A}{4}\right)^4$, то наим. изъ значеній, принимаемыхъ U, будетъ A; этого значенія U достигаетъ, слѣд., при

$$x=y=z=t.$$

711. Въ заключеніе приведемъ еще нѣсколько примѣровъ тѣхъ аналитическихъ уловокъ, при помощи которыхъ можно элементарно находить max. и min. функцій высшихъ степеней отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

I. *Найти minimum* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, *зная, что* $x+y=2a$.

Имѣемъ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2a}{xy}$. Очевидно, эта дробь будетъ имѣть minimum тогда, когда знаменатель ея достигаетъ maximum'a; но $x+y=2a$, сл. xy имѣетъ max. при $x=y=a$: при этихъ значеніяхъ x и y данное выраженіе и имѣетъ minimum $=\frac{2}{a}$.

II. *Найти minimum* $x+y$, *зная, что* $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

$x+y$ будетъ имѣть min., когда $(x+y)^2$ имѣетъ minimum. Но, по условію, $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{a^2}$, откуда

$$x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=\frac{x^2y^2}{a^2}+2xy=xy\left(\frac{xy}{a^2}+2\right).$$

Очевидно, это выраженіе имѣетъ minimum, когда xy имѣетъ minimum, т. е. когда $\frac{1}{xy}$, а потому и $\frac{1}{x^2y^2}$, имѣетъ max. Но $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}$ (въ виду того, что сумма этихъ производителей постоянна) имѣетъ max. при $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2a^2}$, т. е. при $x=y=a\sqrt{2}$. При этихъ значеніяхъ $x+y$ и имѣетъ minimum, равный $2a\sqrt{2}$.

III. *Найти minimum* $x^2+y^2+z^2$, *зная, что* $x+y+z=3a$.

Тождественно имѣемъ:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2}{3}=\frac{9a^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2}{3}.$$

Отсюда видно, что данное выраженіе имѣетъ minimum тогда, когда имѣетъ minimum $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2$; но эта сумма существенно положительна, слѣд. ея minimum есть ноль, и имѣетъ мѣсто при $x=y=z$. Потому и данное выраженіе имѣетъ min. при $x=y=z=a$; самый minimum $=3a^2$.

IV. *Доказать, что если* $x+y=2a$, *сумма* x^m+y^m *имѣетъ minimum при* $x=y=a$.

Во-первыхъ замѣчаемъ, что теорема справедлива для $m=2$, ибо

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4a^2-2xy,$$

откуда ясно, что какъ уменьшаемое постоянное, то разность имѣетъ min., когда вычитаемое имѣетъ maximum, т. е. при $x=y$.

Затѣмъ, допустивъ, что теорема справедлива для показателя $m-1$ и для всѣхъ предыдущихъ, докажемъ, что она справедлива и для показателя m.

Различаемъ два случая: $m=2m'$ и $m=2m''+1$.

Положивъ $m=2m'$, имѣемъ:

$$x^{2m'}+y^{2m'}=(x^{m'}+y^{m'})^2-2x^{m'}y^{m'};$$

по положенію, $x^{m'}+y^{m'}$ имѣемъ minimum при $x=y$; съ другой стороны $x^{m'}y^{m'}$ или $(xy)^{m'}$ имѣемъ maximum при $x=y$. Слѣд. $x^{2m'}+y^{2m'}$ имѣемъ minimum при $x=y$.

Положивъ $m = 2m'' + 1$, имѣемъ:

$$x^{2m''+1} + y^{2m''+1} = (x^{m''+1} + y^{m''+1})(x^{m''} + y^{m''}) - x^{m''}y^{m''}(x+y) =$$
$$(x^{m''+1} + y^{m''+1})(x^{m''} + y^{m''}) - 2a(xy)^{m''}.$$

Первая часть этой разности имѣемъ minimum при $x = y$, ибо, по положенію, оба ея множителя—minima при $x = y$; вторая часть имѣетъ при $x = y$ maximum. Слѣд. $x^{2m''+1} + y^{2m''+1}$ имѣетъ minimum при $x = y$.

На этомъ основаніи заключаемъ такъ: теорема вѣрна для $m = 2$, слѣд., по доказанному, вѣрна и для $m = 3$; будучи вѣрна для $m = 2$ и $m = 3$, вѣрна и для $m = 4$ и т. д. Слѣд. она вѣрна для всякаго m.

711. Задачи. — Упражненіями на maxima и minima могутъ служить задачи предыдущей главы. Въ дополненіе къ нимъ предлагаемъ еще слѣдующія.

1. Найти maxima и minima триномовъ:

$x^2 - 6x + 13$; $-x^2 + 6x + 7$; $3x^2 - 8x + 4$; $x^2 - 3x + 2$; $-x^2 + 3x - 2$; $x^2 - 4x - 140$; $x^2 + x + 1$; $-4x^2 + 7x + 492$; $2x^2 - 24x + 1$; $(2x-3)^2 - 8x$; $x^2 - 3 - \frac{x-3}{6}$; $x^3 + (19-x)^3 - 1843$; $(x-3)^2 + 6$; $-acx^2 + (ad - bc)x + bd$; $(a-x)(c-x) - b^2$; $-x^2 + 6ax - a^2$; $ab - x^2 - (a-b)x$; $(ax+b)^2 + (a'x+b')^2$; $x^2(n-3)(n-4) - 8ax(n-3) - 12a^2$; $(a^2+3a+3)(x^2+x) + a^2$; $3ax^2 - 3b^2x + b^3 - a^3$; $(2a-b)x^2 + bx(2b^2 - 5a) + 2ab^2$; $3x + 4(a-x)^2$; $(2-3ab)x^2 + 3b(1-ab)x - 3b - 2b^3$; $a(a-1)(x-b)^2 + a'(a'+1)x^2 - 2aa'x(x-b)$; $(a-b)(a-10b)x^2 - 2(a^2-b^2)x + a^2 + 11ab - 2b^2$; $x^4 - 2x^2 + 8$; $(x^2-1)^2 + 7$; $x^4 - 3x^2 + 7$; $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$.

2. Найти maxima и minima функцій:

$\sqrt{5-3x} + \sqrt{7x-8}$; $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$; $x - 1 + \sqrt{x+1}$: $\sqrt{5+3x} - \sqrt{7x-8}$; $5x - 3 + \sqrt{2-3x}$; $\sqrt{x} + \sqrt{a-x}$.

3. Разложить 27 на двѣ части такъ, чтобы сумма изъ учетвереннаго квадрата первой и упятереннаго квадрата второй была max. или min.

4. Раздѣлить 1225 на двѣ части такъ, чтобы утроенный квадр. корень изъ одной части + учетверенный корень изъ другой составляли бы maximum.

5. Maximum периметра прямоугольника, вписаннаго въ данный кругъ.

6. Чрезъ точку M, данную внутри или внѣ круга, провести сѣкущую AMB или MAB такъ, чтобы: 1) $AM^2 + MB^2$ (M—внутри), или $MA^2 + AB^2$ (M—внѣ) была max или min.

7. Чрезъ точку, данную внутри угла, провести прямую такъ, чтобы сумма отрѣзковъ ея между данною точкою и сторонами угла была minima.

8. Въ данный кругъ вписать равнобедренный △, сумма основанія и высоты котораго была бы maxima.

9. Около даннаго прямоугольника описать прямоугольникъ наибольшей площади.

10. Въ данный квадратъ вписать квадратъ наим. площади.

11. Называя гипотенузу буквою a, катеты буквами b и c, и полагая, что периметръ треугольника сохраняетъ постоянную величину, найти: 1) min. и max. гипотенузы или $b + c$; 2) max. площади; 3) max. $b - c$; 4) max. или min. $b : c$; 5) max. или min. $a : (b + c)$, $a : (b - c)$, $a^2 + b^2 + c^2$; 6) min. и max. высоты.

12. Min. периметра прямоуг. △., имѣющаго данную площадь.

13. Гипотенуза сохраняетъ постоянную величину; найти: 1) max. площади; 2) max. периметра; 3) max. $b - c$; 4) min. или max. $b + c + h$.

14. Найти min. площади, или периметра, или гипотенузы, а также min. или max. $a^2 + b^2 + c^2$ прямоуг. △-ка, описаннаго около даннаго круга.

15. По двумъ даннымъ сторонамъ построить △ наиб. площади.

16. Въ данный полукругъ вписать трапецію наибольшаго периметра; описать около него трапецію наим. площади.

17. На данной прямой AB $= a$ найти такую точку C, что если на отрѣзкѣ AC построить правильны △ ADC, а на отрѣзкѣ BC квадратъ CEFB и соединить D съ E, то чтобы площадь пятіугольника ADEFB была max. или min. (Черт. 75).

18. Даны высоты h и h' двухъ цилиндровъ. Опредѣлить радіусы ихъ основаній такъ, чтобы сумма боковыхъ поверхностей равнялась поверхности даннаго шара, а сумма объемовъ была бы minima.

19. Найти max. или min. полной поверхности прямоугольнаго параллелопипеда, вписаннаго въ данную правильную пирамиду съ квадратнымъ основаніемъ.

20. Даны три точки A, B, C не на одной прямой; на неограниченной прямой, проходящей чрезъ B и C, найти такую точку M, сумма квадратовъ разстояній которой отъ A, B и C была бы minima.

21. Два тѣла двигаются по сторонамъ прямаго угла съ постоянными скоростями v и v', по направленію къ вершинѣ, отъ которой въ началѣ движенія находятся — первое въ разстояніи a, второе b. Въ какой моментъ разстояніе между ними будетъ minimum.

22. Внутри круга даны 2 точки P и P′ на одномъ и томъ же діаметрѣ и въ равномъ разстояніи отъ центра. Провести черезъ эти точки двѣ параллели PQ и P′Q′ до окружности, такъ чтобы трапеція PQP′Q′ была maxima.

23. Найти min. объема усѣченнаго конуса, описаннаго около даннаго полушара.

24. Въ данный секторъ вписать прямоугольникъ, такъ чтобы одна его вершина лежала на дугѣ, двѣ на одномъ радіусѣ и одна на другомъ, и чтобы: 1) периметръ, 2) площадь его была бы max.

25. Съ какой высоты нужно пустить совершенно упругій шаръ, чтобы, отскочивъ отъ горизонтальной плоскости, онъ поднялся до данной точки первоначальнаго пути въ кратчайшее время?

26. Желѣзная дорога, AC, выходящая изъ города A, проходитъ въ разстояніи d отъ другаго города B. Въ какомъ пунктѣ линіи AC должна быть построена станція, чтобы соединивъ ее съ B посредствомъ шоссе, пришлось употреблять на путешествіе изъ A въ B кратчайшее время? Скорость поѣзда $= V$, скорость дилижанса $= v$.

27. На каждой сторонѣ прямоугольника, какъ на гипотенузѣ, построены внѣ прямоугольника равнобедренные прямоуг. △-ки. Найти max. и min. площади всей фигуры, полагая, что стороны прямоугольника измѣняются, діагональ же его сохраняетъ постоянную величину.

28. Тотъ же вопросъ, но прямоугольникъ замѣнить квадратомъ, прямоугольные тр ки—равнобедренными равными, а діагональ—периметромъ $8p$ всей фигуры.

29. Найти max. и min. объема тѣла, образуемаго сферическимъ сегментомъ и вписаннымъ цилиндромъ, имѣющимъ общее основаніе съ сегментомъ, зная радіусъ шара.

30. Найти maxima и minima функцій:

$x^3 - 12x + 16$; $x^3 + 3x^2 - 4$; $8x^3 - 11x^2 - 4x + 1$; $-4x^3 - x^2 + 5x - 8$.

31. Найти maxima и minima и изслѣдовать измѣненія функцій:

$\frac{x^2+1}{x}$; $\frac{2x-3}{x^2+4}$, $\frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$; $\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$, $\frac{12x^2-66x+57}{8x^2-14x+23}$, $\frac{8x^2-6x+1}{12x^2-4x}$;

$\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x+3}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$; $\frac{4x^2+4x+3}{x^2-3x+2}$; $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+2}$; $\frac{3-2x}{x^2-2x+7}$; $\frac{x^2+1}{3-4x}$;

$\frac{x^2-1}{2x+1}$, $\frac{2x^2-8x+8}{x^2-5x+4}$; $\frac{3x^2-5x+1}{6x^2-10x+3}$; $\frac{x^2-2x+10}{4x^2-8x+21}$.

32. Найти max. и min. дроби $\frac{2ax+b}{x^2+1}$. Опредѣлить a и b подъ условіемъ, чтобы maximum дроби равнялся $+4$, а minimum $= -1$.

33. Опредѣлить предѣлы, между которыми измѣняется $\frac{x^2+2ax+1}{x^2-2ax+1}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$. При какомъ a max. и min. дѣлаются равными?

34. Опредѣлить алгебраическую дробь вида $\frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$, въ которой a—данное положительное число, зная, что эта дробь имѣетъ max. $4a$ при $x=3$, и minimum $5a$ при $x=1$.

35. Изслѣдовать измѣненія дроби $\frac{max}{a^2-(1+m)x^2}$, гдѣ a и m положительны.

36. α и β суть два данныя числа, положительныя или отрицательныя; опредѣлить a и b такъ, чтобы α и β представляли соотвѣтственно maximum и min. дроби $\frac{ax^2+2x+b}{x^2+1}$, когда x измѣнять отъ $-\infty$ до $+\infty$. Всегда-ли задача возможна?

37. Дано равенство

$$y^2 = \frac{4a^2x^2+b^2(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2};$$

изслѣдовать измѣненія y при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Полагая $a > b$, доказать: 1) что a есть max. y; 2) что b есть min. y; 3) что если дадимъ y значеніе, заключающееся между a и b, то биквадратное ур., изъ котораго опредѣляется x, имѣетъ всѣ 4 корня дѣйствительные, и что если чрезъ x' назовемъ одинъ изъ этихъ корней, то три остальные опредѣляются равенствами:

$$x^{\text{I}} + x^{\text{II}} = 0; \quad x^{\text{I}}\, x^{\text{III}} + 1 = 0; \quad x^{\text{I}}\, x^{\text{IV}} - 1 = 0.$$

38. Дана дробь $\frac{x^2+px+a}{x^2+p'x+b}$, въ которой a и b предполагаются извѣстными; опредѣлить p и p' такъ, чтобы эта дробь была maxima при $x=\alpha$, и minima при $x=\beta$. — Приложеніе: $\frac{x^2+px+5}{x^2+p'x+3}$.

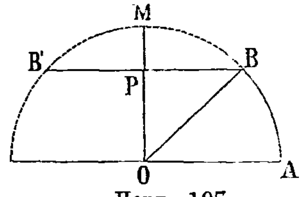
39. Дана дробь $\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$; опредѣлить p,q,p' и q' такъ, чтобы при $x=\alpha$ maximum дроби былъ A, и чтобы при $x=\beta$ minimum дроби былъ B. — Приложеніе: опредѣлить коэффиціенты дроби $\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$ такъ, чтобы при $x=3$ она достигала max. 4, и чтобы при $x=1$ достигала minimum'a 5.

40. Доказать, что дроби $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, и $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}$ имѣютъ maxima и minima при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ x, если

$$\frac{ab'-ba'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}+\frac{ac'-ca'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}=\frac{bc'-cb'}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}.$$

41. Найти maximum и minimum выраженія $\frac{b}{x}+\frac{c}{a-x}$.

42. Найти max. и min. отношенія суммы объемовъ двухъ конусовъ, имѣющихъ общую вершину въ центрѣ даннаго шара, а основаніями — параллельные малые круги этого шара, къ объему сферическаго слоя, содержащагося между этими основаніями; приэтомъ, дано, что разстояніе между основаніями постоянно и равно h.



Черт. 107.

43. Найти maximum и minimum отношенія объемовъ, образуемыхъ криволинейной трапеціей OABP и треугольникомъ OBP при обращеніи около OP; данъ радіусъ OA $=$ R круга.

44. Найти minimum отношенія суммы объемовъ, образуемыхъ прямоугольнымъ треуг-мъ, вращающимся поочередно около каждаго изъ катетовъ, къ объему, образуемому тѣмъ же $\triangle$-мъ при обращеніи около гипотенузы, полагая, что периметръ треуг-ка постояненъ, а стороны перемѣнны.

45. Прямоугольный $\triangle$ ABC (A — прямой уг.) вращается около оси, проходящей чрезъ точку B параллельно катету AC. Найти maximum полученнаго объема, зная, что периметръ постояненъ и $=2p$.

46. На линіи центровъ двухъ шаровъ, лежащихъ одинъ внѣ другаго, найти точку, изъ которой видна наибольшая сумма поверхностей сегментовъ.

47. Центры двухъ шаровъ находятся въ концахъ прямой CC' $=2d$. На CC' какъ на діаметрѣ описываютъ окружность; опредѣлить на этой окружности такую точку, изъ которой видна наибольшая часть суммы поверхностей обоихъ шаровъ.

48. Найти minimum $\frac{(a-x)(b+x)}{x}$.

49. Найти max. и min. дроби $\frac{x^2-2x+a^2}{x^2+2x+a^2}$, въ которой $a>1$.

50. Даны двѣ параллели AB и CD, разстояніе между которыми равно b; и двѣ точки: M на AB и N на CD. На AB наносятъ отъ точки M отрѣзокъ ME $=a$. Какую точку I прямой MN нужно соединить съ точкой E, чтобы, полагая, что EI пересѣкаетъ CD въ F, сумма площадей треуг-въ MEI и MFI была minima.

51. Данъ прямоугольный $\triangle$ ABC, котораго катеты суть b и c. Отрѣзать отъ него другой прямоуг. $\triangle$ ADE, который составлялъ бы m-ую часть перваго. Какъ провести линію DE, чтобы ея длина была minima? Построить, полагая $m=2$.

52. Даны: толщина e сферической оболочки и ея объемъ; вычислить внутренній радіусъ x. Полагая, что толщина постоянна, найти minimum объема.

53. Данъ правильный $\triangle$ ABC стороны $2a$ и точка D въ срединѣ основанія BC. Въ какомъ разстояніи x отъ этого основанія провести ему параллельную линію EF, чтобы периметръ тр-ка DEF былъ наименьшій.

54. Дана точка A въ разстояніи AB $=d$ отъ прямой XY и на этой прямой отрѣзокъ CD $=2a$. Гдѣ на прямой долженъ быть взятъ этотъ отрѣзокъ, чтобы периметръ $\triangle$-ка ACD былъ наименьшій.

55. Дана прямая XУ и внѣ ея двѣ точки A и B; разстоянія AA′ и BB′ этихъ точекъ отъ XУ равны соотвѣтственно $2a$ и $2b$; разстояніе A′B′ между основаніями этихъ перпендикуляровъ равно $2d$. Найти на XУ такую точку M, чтобы: 1) сумма AM + MB была minima; 2) отношеніе AM:BM было max. или min.

56. Даны два концентрическіе круга радіусовъ R и r, вписать между ними прямоугольникъ наиб. площади. Одно измѣреніе прямоугольника должно быть параллельно діаметру, а стороны перпендикулярныя къ нему—хордами большаго и малаго круговъ.

57. Зная, что $3x^2+5y+7z^8=315$, найти max. x^2yz^8.
» » $ax+by^2+cz^3=3a^6b^3c^4$, » » xy^2z^3.
» » $\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}=a$ » » x^3y^5.
» » $2x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}=a$, » » $y^3z^2\cdot\sqrt{x}$.
» » $3x^2y+xy^2=a^3$, » » x^3y^4.
» » $mx^\alpha+ny^\beta+pz^\gamma=q$ » » $x^a y^b z^c$.

58. Найти maximum выраженій:
$(ax+b)^2(c-dx)$; $(ax+by)(cx+dy)$, зная, что $mx+ny=p$;
$(x+a)(x+b)(c-x)$; mx^p-nx^q полагая $p<q$;
$(mx+n)^a.\ (p-qx)^b$; $(a+mx)(b+nx)(c+px)$, полагая, что коэффиціенты m, n, p не всѣ одного знака.

59. Найти minimum выраженій:
$$\frac{a^4+x^4}{x^2};\ \frac{a^8+b^2x^6}{x^2};\ \frac{x^8+a^8}{3x^2};\ \frac{2x^3+5a^3}{\sqrt{x}};\ \frac{x^m}{(x-a)^n};\ \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

60. Зная, что $xyz=abc$, найти minimum $abx+bcy+caz$.
» » $x^2y^2z^2t^2=a^8$, » » $xyz+xyu+xzu+yzu$.
» » $xyz=a^3$, » » $x^2+5y^3+4z^4$.
» » $x\sqrt{yz}=ab$, » » $a\sqrt{x}+by+z$.
» » $x+y=a$ » » $\frac{x^3+y^3}{xy}$ и $m^2x^2+n^2y^2$.
» » $2x+y=a$ » » $\frac{1}{x^3}+\frac{8}{y^3}$.
» » $a^2y^2+b^2x^2=x^2y^2$ » » xy.

61. Опредѣлить a такъ, чтобы сумма квадратовъ корней урнія $x^2+(2-a)x-a-3=0$ была minima.

62. Показать, что 1) дробь $\frac{x^m}{(x+d)^{m+p}}$ имѣетъ max. при $x=d.\ \frac{m}{p}$; 2) дробь $\frac{x^{m+p}}{(x-d)^m}$ имѣетъ minimum при $x=d.\ \frac{m+p}{p}$.

63. Основываясь на второй задачѣ n 62, найти minimum $x^p+\frac{1}{x^q}$.

64. Опредѣлить радіусъ такого шара, котораго сегментъ, при постоянной поверхности, имѣлъ бы наибольшій объемъ.

65. На продолженіи основанія BC треугольника ABC взята точка P. Провести изъ нея сѣкущую, встрѣчающую AB въ R и AC въ Q, такъ, чтобы произведеніе AR. CQ было minimum.

66. Даны двѣ окружности, касательныя къ прямой AB; третья окружность, того же радіуса какъ и двѣ первыя, къ нимъ касательна. При какомъ положеніи этихъ окружностей площадь пятиугольника, имѣющаго вершины въ центрахъ и въ точкахъ касанія съ прямой, будетъ maxima?

67. Дана точка M на основаніи AB треуг. ABC; въ какомъ разстояніи отъ этого основанія провести ему параллельную DE, чтобы Δ MDE имѣлъ наибольшую площадь.

68. Изъ всѣхъ шаровъ, имѣющихъ центръ на поверхности даннаго шара радіуса R, найти такой, на которомъ отсѣкаемая поверхность сегмента была бы maxima.

69. Изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, какой имѣетъ наименьшую: a) боковую; b) полную поверхность; c) объемъ.

70. Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный кругъ, какой имѣетъ наибольшую площадь.

71. Изъ всѣхъ цилиндровъ одинаковой полной поверхности какой имѣетъ наибольшій объемъ, а изъ всѣхъ цилиндровъ одинаковаго объема какой имѣетъ наим. пол. поверхность?

72. Данъ прямоугольникъ ABCD, въ которомъ $AB = a$, $AD = b$; изъ вершины A провести сѣкущую AEF (E — встрѣча съ BC, F — съ продолженіемъ DC) такъ, чтобы суммаа $BE + DF$ была minima.

73. Изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго полушара, какой имѣетъ наименьшій объемъ.

74. Изъ всѣхъ правильныхъ пирамидъ съ квадратнымъ основаніемъ, имѣющихъ данное боковое ребро l, какая имѣетъ наиб. объемъ?

75. Данъ $\triangle$ ABC; провести параллель MN сторонѣ BC такъ, чтобы сумма площадей: прямоугольника BMNC и треуг-ка DPQ (D — основаніе высоты на сторону BC, P и Q — точки пересѣченія линіи MN съ AB и AC) была maxima.

76. Дана окружность и въ ней перпендикулярные діаметры AD и BC; провести перпендикуляръ MNN′ къ BC (P — встрѣча его съ BC) такъ, чтобы сумма объемовъ, образуемыхъ прямоугольникомъ OAMP и треугольникомъ ONP, при обращеніи около BC, была maxima.

77. Какой изъ сферическихъ сегментовъ даннаго объема имѣетъ наименьшую выпуклую поверхность?

78. Опредѣлить стороны прямоугольника, имѣющаго данный периметръ, такъ, чтобы цилиндръ, полученный обращеніемъ фигуры около одной изъ стороны, имѣлъ наиб. объемъ.

79. Вписать въ данный шаръ — цилиндръ наиб. объема.

80. Данъ полукругъ діаметра MN, къ которому проведены касательныя MK, NH; взявъ $MK = a$, проводятъ третью касательную KH. При какомъ a объемъ, образуемый четыреугольникомъ MKHN при обращеніи около MN, получаетъ наим. величину?

81. Вписать въ данный шаръ правильную треугольную призму наибольшаго объема.

82. Данъ прямоугольникъ и внѣ его плоскости параллель двумъ его сторонамъ; средина параллели пролагается въ центръ прямоугольника. Чрезъ эту прямую и параллельныя ей стороны прямоугольника проводятъ двѣ плоскости, а чрезъ концы прямой и двѣ другія стороны прямоугольника — двѣ другія плоскости: получается

тѣло, ограниченное 5-ю гранями и имѣющее форму клина. Опредѣлить max. или min. объема этого тѣла, когда даны: высота, длина сказанной параллели и периметръ прямоугольника.

83. Каковъ долженъ быть уголъ сектора радіуса R, чтобы, свернувъ этотъ секторъ въ конусъ, получить тѣло наибольшаго объема.

84. Изъ всѣхъ конусовъ, имѣющихъ одинаковую боковую поверхность, какой имѣетъ наиб. объемъ; а изъ всѣхъ конусовъ одинаковаго объема какой имѣетъ наим. боковую поверхность?

85. Maximum объема правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, имѣющей данную боковую поверхность.

86. Max. объема тѣла, вписаннаго въ данный шаръ и состоящаго изъ цилиндра и двухъ конусовъ, построенныхъ извнѣ на основаніяхъ цилиндра.

87. Въ полушаръ вписать усѣченный конусъ, котораго полная поверхность была бы maxima.

88. Изъ всѣхъ усѣченныхъ конусовъ одинаковой высоты и одинаковаго объема найти такой, около котораго можно описать наименьшій шаръ.

89. Около шара описанъ цилиндръ и чрезъ точки A и A′, взятыя на его оси въ равномъ разстояніи отъ центра шара, описаны два конуса, пересѣкающіе цилиндръ по кругамъ BC и B′C′. Найти minimum полной поверхности, составленной изъ боковыхъ поверхностей конусовъ и содержащейся между ними цилиндрич. поверхности.

90. Дана неравнобочная трапеція ABCD и діагональ BD. Чрезъ точку I высоты BH проводятъ параллель EON основаніямъ: пусть она встрѣчаетъ стороны въ E и N, діагональ въ O. Найти I такъ, чтобы $EO^2 + ON^2$ была max.

91. Дано меньшее основаніе $2a$ равнобочной трапеціи и общая длина b непараллельныхъ сторонъ. Опредѣлить большее основаніе такъ, чтобы площадь трапеціи была maxima.

92. Найти max. полной поверхности конуса, вписаннаго въ данный шаръ.

93. Изъ данной точки P въ плоскость круга проводятъ къ нему сѣкущую; изъ точекъ пересѣченія A и B этой прямой съ окружностью опускаютъ перпендикуляры AC и BD на діаметръ, проходящій чрезъ точку P. Найти maximum площади трапеціи ACDB, когда сѣкущая вращается около точки P.

94. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ, имѣющихъ одинаковую полную поверхность, а одно измѣненіе которыхъ если среднее гармоническое между двумя другими, найти такой, который имѣетъ наим. діагональ.

95. Даны бока равнобочной трапеціи и одно изъ основаній; каково должно быть другое основаніе, чтобы объемъ, произведенный фигурою при обращеніи около перваго основанія, былъ наибольшій.

96. Данъ кругъ радіуса R; центръ правильнаго перемѣннаго треугольника совпадаетъ съ центромъ круга; на сторонахъ $\triangle$-ка строятъ равнобедренные тр-ки, вершины которыхъ лежали бы на окружности даннаго круга. Затѣмъ составляютъ изъ этихъ четырехъ треугольниковъ тетраэдръ. Найти maximum объема этого тетраэдра.

97. Изъ всѣхъ сферическихъ слоевъ даннаго шара, имѣющихъ одинаковую высоту, найти такой, который имѣетъ наибольшій объемъ.

98. Изъ всѣхъ описуемыхъ равнобедренныхъ трапецій, вписанныхъ въ данный кругъ, найти такую, которая имѣетъ наибольшую площадь.

99. Изъ всѣхъ трапецій одинаковой высоты, вписанныхъ въ данный кругъ, у какой сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ minima?

100. Пересѣкаютъ данный шаръ двумя параллельными плоскостями, разстояніе между которыми равно данной величинѣ, и въ каждый изъ полученныхъ сегментовъ вписываютъ конусъ. Найти maximum суммы объемовъ этихъ конусовъ и заключающагося между ними слоя.

101. Замѣняютъ конусы предыдущей задачи описанными конусами, касающимися шара по кругамъ сѣченія. Minimum суммы боковыхъ поверхностей обоихъ конусовъ.

102. Данъ кругъ и касательная AC въ концѣ діаметра AB. Провести хорду BD такъ, чтобы △ ABD, вращаясь около касательной, образовалъ наиб. объемъ.

103. Найти max. площади круговаго сектора, имѣющаго данный периметръ.

104. Въ концахъ діаметра AB даннаго полукруга проводятъ касательныя AC и BD и параллель CD къ діаметру, точки встрѣчи которой съ окружностью суть E и F. Опредѣлить положеніе сѣкущей EF такъ; 1) чтобы сумма или разность площадей ABDC, OEF была maxima или minima; 2) чтобы сумма объемовъ, описанныхъ этими площадями при обращеніи фигуры около AB, была maxima.

105. Maximum объема ниши, имѣющей данную полную поверхность.

106. Minimum и maximum объема ареометра, имѣющаго данную полную поверхность и данный радіусъ.

107. Maximum объема цилиндрическаго котла, оканчивающагося двумя полусферами, если: 1) периметръ сѣченія тѣла плоскостью, проходящею чрезъ ось, постояненъ; 2) полная поверхность тѣла постоянна; 3) длина оси постоянна.

108. Maximum полной поверхности сферич. сектора даннаго объема.

109. Max. или min. объема сферическаго слоя, имѣющаго данную полную поверхность, πS, если данъ радіусъ шара R.

110. Разложить данное число a на n множителей x, y, z, . . . такихъ, чтобы сумма $x^m + y^p + z^q + \ldots$ была minima.

111. Внутри прямаго угла дана точка M; провести чрезъ нее сѣкущую такъ, чтобы отрѣзокъ ея внутри угла имѣлъ наименьшую величину.

112. На прямой, соединяющей два источника свѣта, найти точку, всего сильнѣе освѣщаемую ими, если разстояніе между источниками $= l$, а напряженности ихъ a и b.

113. Изъ даннаго цилиндрическаго бревна вырѣзать прямоугольный брусъ наибольшаго сопротивленія. Сопротивленіе бруса пропорціонально произведенію его ширины на квадратъ толщины.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

АНАЛИЗЪ СОЕДИНЕНІИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНІЯ.

ГЛАВА XLII.

Размѣщенія, перестановки и сочетанія безъ повтореній и съ повтореніями.—Задачи.

712. Опредѣленія. — Если изъ m данныхъ предметовъ, напр. изъ m буквъ $a, b, c, d, \ldots, i, l$ взять k буквъ, гдѣ $k \lesseqgtr m$, и написать ихъ другъ за другомъ въ какомъ-нибудь порядкѣ, то получится соединеніе, называемое *размѣщеніемъ изъ m буквъ по k*, или *размѣщеніемъ изъ m буквъ $k^{\text{го}}$ порядка.* Такимъ образомъ одно размѣщеніе отличается отъ другаго или самыми буквами, или только порядкомъ ихъ. Изъ данныхъ m буквъ можно составить нѣсколько размѣщеній $k^{\text{го}}$ порядка; число ихъ обозначаютъ символомъ A_m^k, гдѣ нижній указатель m означаетъ число всѣхъ предметовъ (элементовъ), верхній k—число элементовъ, входящихъ въ каждое размѣщеніе.

Если въ составъ каждаго соединенія мы возьмимъ всѣ данныя буквы, то одно соединеніе будетъ отличаться отъ другаго уже не буквами, а только порядкомъ, въ которомъ они написаны. Такія соединенія называются *перестановками.* Число перестановокъ изъ m элементовъ обозначаютъ символомъ P_m. Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что $P_m = A_m^m$.

Если, взявъ m различныхъ буквъ, мы составимъ изъ нихъ соединенія по k буквъ въ каждомъ, такъ чтобы одно соединеніе отличалось отъ другаго *по крайней мѣрѣ одною буквою*, то получимъ такъ—называемыя *сочетанія* изъ m буквъ $k^{\text{го}}$ порядка. Число ихъ обознаютъ символомъ C_m^k.

Займемся указаніемъ способа составленія и опредѣленія числа соединеній каждаго рода.

Размѣщенія (arrangements).

713. Способъ составленія и опредѣленіе числа размѣщеній.—Пусть будутъ $a, b, c, d, \ldots h, i, l$ данные m элементовъ. Число размѣщеній изъ этихъ

m буквъ, по одному элементу въ каждомъ, очевидно, равно числу элементовъ. Слѣд. $A^1_m = m$.

Составимъ размѣщенія втораго порядка, т. е. содержащія по два элемента: для этого нужно взять поочередно каждую изъ m буквъ и приписать къ ней справа каждую изъ остальныхъ $m - 1$ буквъ; такимъ образомъ получимъ таблицу:

ab	*bı*	*ca*	. . .	*la*
ac	*bc*	*cb*	. . .	*lb*
ad	*bd*	*cd*	. . .	*l*
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.			.
ai	*bi*	*ci*	. .	*lh*
al	*bl*	*cl*	. . .	*li*

Чтобы доказать, что такимъ образомъ получатся всѣ размѣщенія 2-го порядка, надо доказать, что ни одно размѣщеніе не было опущено, ни одно не повторено два раза. И въ самомъ дѣлѣ: 1) возьмемъ какое ниб. размѣщеніе, напр. *cd*; для составленія вертикальныхъ колоннъ мы ставили по очереди каждую букву на первомъ мѣстѣ; слѣд. въ частности была взята и буква *c*; справа отъ этой буквы ставили каждую изъ остальныхъ буквъ, слѣд., въ частности, и букву *d*; что и дало размѣщеніе *cd*. Слѣд. ни одно размѣщеніе не было пропущено. 2) Сравнимъ два какія нибудь размѣщенія таблицы: они будутъ находиться или въ одной и той же вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ будутъ различаться послѣдними буквами, или же будутъ содержаться въ двухъ различныхъ вертикальныхъ колоннахъ, — и въ такомъ случаѣ будутъ различаться первыми буквами. Убѣждаемся, что всѣ размѣщенія различны, т. е. что таблица не содержитъ повтореній. Итакъ, послѣдняя содержитъ всѣ размѣщенія 2-го порядка.

Опредѣлимъ ихъ число. Очевидно, всѣхъ вертикальныхъ колоннъ столько, сколько всѣхъ размѣщеній 1-го порядка, т. е. сколько всѣхъ буквъ, слѣд. m; въ каждой колоннѣ $m - 1$ размѣщеній; слѣд. всѣхъ двойныхъ размѣщеній $m(m-1)$. Итакъ $A^2_m = m(m-1)$.

Составимъ тройныя размѣщенія изъ m буквъ. Для это нужно взять поочередно каждое двойное размѣщеніе, и приписать къ нему послѣдовательно каждую изъ $m - 2$ остальныхъ буквъ; такимъ образомъ составимъ таблицу:

abc	*acb*	. .	*bca*	.	*lia*
abd	*acd*	. .	*bcd*	. .	*lib*
abe	*ace*	.	*bce*	.	*lic*
.	.		. . .	.	.
.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	. .	.	
abi	*aci*	.	*bci*	.	
abl	*acl*	. .	*bcl*	. .	*lih*

Докажемъ, что ни одно тройное размѣщеніе не было пропущено и ни одно не повторено лишній разъ. И въ самомъ дѣлѣ: 1) возьмемъ какое нибудь размѣщеніе *lif*. Для составленія вертикальныхъ колоннъ мы брали поочередно каждое двойное размѣщеніе; сл. между прочимъ было взято и *li*. Къ нему приписывали послѣдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, сл. въ частности была приписана и буква *f*, что и даетъ *lif*. Слѣд. таблица не содержитъ пропусковъ. 2) Сравнимъ два какія нибудь размѣщенія таблицы. Или они находятся въ одной вертикальной колоннѣ, и тогда различаются послѣдними буквами; или—въ двухъ различныхъ колоннахъ, и въ такомъ случаѣ различаются, по крайней мѣрѣ, порядкомъ двухъ первыхъ буквъ, какъ *aci* и *cai*. Заключаемъ, что всѣ размѣщенія таблицы различны. Итакъ, она содержитъ всѣ размѣщенія 3-го порядка.

Опредѣлимъ ихъ число. Всѣхъ вертикальныхъ колоннъ столько, сколько

двойныхъ размѣщеній изъ m буквъ, т. е. A^2_m или $m(m-1)$; въ каждой колоннѣ содержится $m-2$ размѣщенія; слѣд. всѣхъ тройныхъ размѣщеній $m(m-1)(m-2)$. Итакъ $A^3_m = m(m-1)(m-2)$.

Разсматривая формулы A^1_m, A^2_m, A^3_m, замѣчаемъ, что всѣ они составлены по одному и тому же закону: каждая представляетъ произведеніе чиселъ, послѣдовательно уменьшающихся на 1, начиная съ m и кончая множителемъ, равнымъ числу элементовъ, минусъ порядокъ размѣщеній, плюсъ 1; число же множителей равно порядку размѣщеній. Докажемъ общность этого закона, и для этого выведемъ формулу, выражающую зависимость между числами размѣщеній двухъ смежныхъ порядковъ, напр. связь между A^{k-1}_m и A^k_m. Вообразимъ, что мы составили всѣ размѣщенія $k-1$-го порядка, число которыхъ выражается символомъ A^{k-1}_m, и желаемъ составить размѣщенія k-го порядка. Для этого беремъ поочередно каждое размѣщеніе $k-1$-го порядка и приписываемъ къ нему поочередно каждую изъ остальныхъ буквъ, число которыхъ $= m-(k-1)$, или $m-k+1$. Такимъ образомъ составимъ столько вертикальныхъ колоннъ, сколько размѣщеній $k-1$-го порядка, а въ каждой колоннѣ $m-k+1$ размѣщеній. Докажемъ, что ни одно размѣщеніе k-го порядка не повторено два раза, и что ни одно не пропущено. Въ самомъ дѣлѣ: 1) сравнивая два какія нибудь размѣщенія, найдемъ, что они или находятся въ одной и той же вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ разнятся послѣдними буквами, или же принадлежатъ двумъ различнымъ колоннамъ, и въ такомъ случаѣ разнятся, по крайней мѣрѣ, порядкомъ $k-1$ первыхъ буквъ, какъ $abc....ih$ и $ci....bah$. 2) Ни одно размѣщеніе k-го порядка не будетъ пропущено; въ самомъ дѣлѣ, пусть взято размѣщеніе k го порядка $abc....ih$. Для составленія этихъ размѣщеній мы брали поочередно каждое размѣщеніе $k-1$-го порядка, слѣд. въ частности было взято и размѣщеніе $abc....i$; къ нему приписывали послѣдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, слѣд. приписали, между прочимъ, и букву h, что и даетъ $abc....ih$. Итакъ, указаннымъ способомъ составлены всѣ размѣщенія k-го пор. изъ m буквъ.

Для опредѣленія ихъ числа, очевидно, нужно помножить число колоннъ, т. е. число размѣщеній $k-1$-го пор. или A^{k-1}_m на число размѣщеній въ каждой колоннѣ, т. е. на $m-k+1$. Имѣемъ:

$$A^k_m = A^{k-1}_m \,.\, (m-k+1).$$

Это и есть формула, связывающая числа A^k_m и A^{k-1}_m. Такъ какъ формула эта — общая, то можемъ давать въ ней k всѣ цѣлыя значенія отъ 2 до k. Получимъ:

$$A^2_m = A^1_m(m-1)$$
$$A^3_m = A^2_m(m-2)$$
$$A^4_m = A^3_m(m-3)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$A^k_m = A^{k-1}_m(m-k+1).$$

Перемноживъ почленно эти равенства, сокративъ въ обѣихъ частяхъ общаго множителя $A_m^2 \cdot A_m^3 \ldots A_m^{k-1}$ и замѣнивъ A_m^1 его значеніемъ m, найдемъ:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots (m-k+1) \quad \ldots \quad (I)$$

Отсюда

Теорема. *Число размѣщеній изъ m буквъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, уменьшающихся послѣдовательно на 1, изъ которыхъ первое равно m.*

714. Примѣръ I. *Сколько можно составить трехзначныхъ чиселъ изъ нечетныхъ цифръ 1, 3, 5, 7, 9?*

Искомое число, очевидно, есть число размѣщеній изъ 5 элементовъ по 3; слѣд. оно равно $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Примѣръ II. *Сколько можно бы было составить словъ изъ 20 согласныхъ и 6 гласныхъ, если каждое слово должно заключать 3 согласныхъ и 2 гласныхъ, причемъ послѣднія могутъ занимать только второе и четвертое мѣста?*

20 согласныхъ дадутъ размѣщеній по 3 буквы въ каждомъ: A_{20}^3; въ каждомъ изъ этихъ размѣщеній, 6 гласныхъ, помѣщаемыя по парно на второмъ и четвертомъ мѣстѣ, могутъ быть размѣщены A_6^2 способами; слѣд. число искомыхъ словъ $= A_{20}^3 \times A_6^2 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \times 6 \cdot 5 = 205200$.

Перестановки (permutations).

715. Способъ составленія и опредѣленіе числа перестановокъ.—Перестановки различаются отъ размѣщеній только тѣмъ, что берутся всѣ буквы. Изъ этого прямо слѣдуетъ, что для составленія перестановокъ изъ m буквъ, надо изъ этихъ буквъ составить всѣ размѣщенія по 2, изъ нихъ размѣщенія по 3 и т. д., пока не дойдемъ до размѣщеній по m. Отсюда также слѣдуетъ, что для опредѣленія числа перестановокъ изъ m буквъ нужно только въ формулѣ $A_m^k = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+2)(m-k+1)$ положить $k=m$. Такимъ образомъ найдемъ

$$P_m = A_m^m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)m.$$

Отсюда теорема: *Число перемѣщеній изъ m элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m.*

Можно доказать эту теорему независимо отъ формулы числа размѣщеній. Въ самомъ дѣлѣ, пусть составлены перемѣщенія изъ $m-1$ буквъ $a, b, c, d, \ldots, h, i, k$, и пусть число перемѣщеній будетъ P_{m-1}. Чтобы составить перемѣщенія изъ m буквъ, беремъ каждое перемѣщеніе изъ $m-1$ буквъ и вводимъ въ него m-ую букву l, помѣщая послѣдовательно слѣва и справа этого перемѣщенія и во всѣ промежутки между его буквами. Такимъ образомъ мы составимъ всѣ перемѣщенія изъ m буквъ, безъ повтореній и безъ пропусковъ. Безъ повторе-

ній — потому, что одно перемѣщеніе будетъ отличаться отъ другаго или порядкомъ $m-1$ первоначально взятыхъ буквъ, или мѣстомъ, которое занимаетъ новая буква l. Безъ пропусковъ, ибо взявъ перемѣщеніе $ablc...k$, напр., замѣчаемъ, что оно произошло изъ перемѣщенія $abc...k$, составленнаго изъ $m-1$ первоначальныхъ элементовъ, въ которое буква l введена на 3-е мѣсто; слѣд. такая перестановка была получена.

Итакъ: указаннымъ способомъ получимъ всѣ перестановки изъ m буквъ. Опредѣлимъ ихъ число. Каждая перестановка изъ $m-1$ буквъ даетъ m перестановокъ изъ m буквъ, ибо буква l можетъ занять въ первой m различныхъ мѣстъ; слѣд.

$$P_m = mP_{m-1}:$$

такова связь между P_{m-1} и P_m. Формула эта справедлива для всякаго m, будучи совершенно общею; давая въ ней m послѣдовательно всѣ значенія отъ 2 до m, находимъ:

$$P_2 = P_1 \,.\, 2; \quad P_3 = P_2 \,.\, 3; \quad P_4 = P_3 \,.\, 4; \quad \ldots\ldots ; \quad P_m = P_{m-1} \,.\, m.$$

Перемноживъ эти равенства, уничтоживъ общіе множители въ обѣихъ частяхъ, и замѣчая, что $P_1 = 1$, находимъ:

$$P_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, (m-1) \,.\, m \,.\, \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Такое произведеніе m первыхъ натуральныхъ чиселъ часто встрѣчается въ формулахъ анализа; ему дано особое названіе — *факторіала* m.

716. Примѣръ. *Сколькими способами 5 лошадей могутъ быть запряжены въ дилижансъ?*

Очевидно, искомое число есть число перестановокъ изъ 5 предметовъ; слѣд. оно равно 1 . 2 . 3 . 4 . 5, или 120.

Примѣчаніе. Помощію перестановокъ въ прежнее время отыскивались *анаграммы* фразъ и словъ. Такъ, изъ имени Генриха III Валуа, Henri de Valois, выходитъ: Vilain Herode, s; изъ имени убійцы Генриха III, Frère Jacques Clément выходитъ: c'est l'enfer qui m'a créé; изъ словъ Domus Lescinia (домъ Лещинскихъ) Яблонскій составилъ слѣдующія фразы: Ades incolumis, omnis es lucida, mane sidus loci, sis columna Dei, I scande solium; въ послѣдней анаграммѣ было предсказаніе: Станиславъ сдѣлался королемъ польскимъ. Нахожденіе подобныхъ анаграммъ весьма затруднительно, такъ какъ число перестановокъ изъ довольно значительнаго числа буквъ бываетъ чрезвычайно велико; напр. число перемѣщеній изъ 12 предметовъ будетъ 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12; это число представляетъ, напр., сколькими способами могутъ 12 лицъ размѣститься на 12 мѣстахъ; положивъ, что 1 перемѣщеніе они успѣваютъ сдѣлать въ 1 минуту, что въ сутки они употребляютъ на это 12 часовъ и въ годъ 360 дней; найдемъ, что всѣ перемѣщенія могутъ быть окончены чрезъ 1848 лѣтъ.

Сочетанія (combinaisons).

717. Способъ составленія и опредѣленіе числа сочитаній.—Пусть дано m буквъ: $a, b, c, d, \ldots\ldots, h, i, l$: это будутъ сочетанія изъ m буквъ по

одной. Для составленія двойныхъ сочетаній беремъ каждую букву, кромѣ послѣдней, и приписываемъ къ ней послѣдовательно каждую изъ слѣдующихъ за нею. Получимъ таблицу двойныхъ сочетаній:

$$\begin{array}{r} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots\ldots,\ ah,\ ai,\ al \\ bc,\ bd,\ \ldots\ldots,\ bh,\ bi,\ bl \\ cd,\ \ldots\ldots,\ ch,\ ci,\ cl \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ il. \end{array}$$

Чтобы составить тройныя сочетанія беремъ каждое изъ двойныхъ, кромѣ тѣхъ, которыя содержатъ послѣднюю букву (al, bl, ..., il) и приписываемъ послѣдовательно каждую слѣдующую букву; получимъ

$$\begin{array}{r} abc,\ abd,\ abe,\ \ldots\ldots,\ abh,\ abi,\ abl \\ acd,\ ace,\ \ldots\ldots,\ ach,\ aci,\ acl \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$ и т. д.

Этимъ мы изъ размѣщеній выдѣляемъ такія, которыя отъ имѣющихся уже отличаются только мѣстами буквъ, и сл. получаемъ сочетанія. Но изъ способа составленія сочетаній трудно опредѣлить ихъ число; легче это сдѣлать при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. *Число размѣщеній изъ* m *буквъ по* k *равно числу сочетаній изъ* m *буквъ по* k, *помноженному на число перестановокъ изъ* k *буквъ, т. е.* $A_m^k = C_m^k \cdot P_k$.

Вообразимъ, что мы составили таблицу сочетаній изъ m буквъ k-го порядка; число ихъ выражается символомъ C_m^k. Взявъ каждое изъ этихъ сочетаній (содержащее k буквъ), сдѣлаемъ въ немъ всевозможныя перестановки, число которыхъ (изъ одного сочетанія) будетъ P_k. Докажемъ, что такимъ образомъ мы составимъ всѣ размѣщенія изъ m по k, безъ пропусковъ и безъ повтореній. Въ самомъ дѣлѣ, если взять изъ составленной таблицы два члена, то: или они происходятъ отъ двухъ разныхъ сочетаній, и въ такомъ случаѣ различаются буквами; или же происходятъ изъ одного и того же сочетанія, — и въ такомъ случаѣ разнятся порядкомъ буквъ. Слѣд. таблица не содержитъ повтореній. Въ ней нѣтъ и пропусковъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторый членъ z группы A_m^k, не обращая вниманія на порядокъ буквъ въ немъ; этотъ членъ представляетъ нѣкоторое сочетаніе изъ m буквъ по k, и слѣд., если не обращать вниманія на порядокъ его буквъ, онъ находится въ группѣ C_m^k; такъ какъ буквы этого сочетанія были перемѣщены всѣми возможными способами, то z необходимо содержится въ числѣ полученныхъ размѣщеній. Зная это, замѣтимъ, что одно сочетаніе порядка k даетъ P_k перестановокъ, слѣд.

$$A_m^k = C_m^k \cdot P_k,$$

откуда $$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k} \quad \ldots\ldots \quad (III)$$

Итакъ, имѣемъ теорему: *число сочетаній изъ m буквъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательно убывающихъ на 1, первое изъ которыхъ $= m$, дѣленному на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до k.*

718. Примѣры — I. *Въ обществѣ изъ 12 лицъ выбираютъ коммиссію изъ 5 членовъ, для разработки нѣкотораго вопроса; сколькими способами эта коммиссія можетъ быть составлена?*

Такъ какъ одинъ составъ коммисіи долженъ отличаться отъ другаго, и не содержать всѣхъ тѣхъ же лицъ, то, очевидно, искомое число есть число сочетаній изъ 12 элементовъ по 5; слѣд. оно $= C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$.

II. *Сколько различныхъ діагоналей можно провести въ десятиугольникѣ?*

Искомое число есть число сочетаній изъ 10 элементовъ по 2, уменьшенное 10-ью (10 стр. мног.), и сл. $= C_{10}^2 - 10 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} - 10 = 35$.

719. Число C_m^k есть необходимо число цѣлое; поэтому изъ формулы (III) прямо получается

Теорема. *Произведеніе* k *послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе первыхъ* k *цѣлыхъ чиселъ.*

720. Формула (III) можетъ быть представлена въ другомъ видѣ. Помноживъ ея числителя и знаменателя на $(m-k)(m-k-1)(m-k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ или, что тоже, на $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-k)$, найдемъ

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)(m-k)(m-k-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-k)}.$$

Прочитавъ числителя въ обратномъ порядкѣ, находимъ, что онъ представляетъ произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m; слѣд. можно написать:

$$C_m^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-k)}, \text{ или еще } C_m^k = \frac{P_m}{P_k \times P_{m-k}} \ldots\ldots (IV).$$

Замѣчая, что C_m^k есть число цѣлое, изъ послѣднихъ формулъ прямо находимъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Произведеніе ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до* m *всегда дѣлится на произведеніе 1 . 2 . 3 . . . .* k, *на произведеніе 1 . 2 . 3 . . . .* (m — k) *и на произведеніе этихъ двухъ произведеній*, полагая k < m.

721. Свойства сочетаній. I. — *Число сочетаній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ m буквъ по $m-k$, т. е.* $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ IV имѣемъ:

$$C_m^k = \frac{P_m}{P_k \cdot P_{m-k}} \quad \text{и} \quad C_m^{m-k} = \frac{P_m}{P_{m-k} \cdot P_{m-(m-k)}} = \frac{P_m}{P_{m-k} \cdot P_k},$$

откуда прямо слѣдуетъ равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Можно доказать эту теорему еще такъ. Выбравъ изъ m буквъ какія нибудь k буквъ, мы составимъ изъ нихъ одно сочетаніе группы C_m^k; но остальныя $m-k$

буквъ дадутъ, своей совокупностью, одно сочетаніе группы C_m^{m-k}; такимъ образомъ всякому члену группы C_m^k соотвѣтствуетъ одинъ членъ группы C_m^{m-k}, и обратно: слѣд. число членовъ обѣихъ группъ одинаково.

II. *Число сочетаній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ m — 1 буквъ по k, сложенному съ числомъ сочетаній изъ m — 1 буквъ по k—1; т. е.* $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ IV' можемъ написать:

$$C_{m-1}^k = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2....k.1.2....(m-k-1)} \quad \text{и} \quad C_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2....(k-1).1.2....(m-k)}.$$

Складывая, находимъ:

$$C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot(m-1)}{1\cdot2\cdot\cdot\cdot(k-1)\cdot1\cdot2\cdot\cdot\cdot(m-k-1)}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m-k}\right);$$

но
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m-k}=\frac{m}{k\cdot(m-k)},$$

слѣд. $C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot(m-1)\cdot m}{1\cdot2\cdot\cdot\cdot(k-1)\cdot k\times1\cdot2\cdot\cdot\cdot(m-k-1)(m-k)} = C_m^k$.

Теорема эта можетъ быть доказана иначе. Члены группы C_m^k могутъ быть разбиты на двѣ части: пусть первая содержитъ всѣ тѣ сочетанія, въ которыя не входитъ буква a; ихъ число будетъ C_{m-1}^k. Другая группа будетъ содержать сочетанія съ буквою a. Вынеся въ нихъ за скобки букву a, получимъ въ скобкахъ, безъ пропусковъ и безъ повтореній, всѣ члены группы C_{m-1}^{k-1}, составленные изъ буквъ $b,c,d,\ldots h,i,l$. Итакъ, дѣйствительно, число C_m^k есть сумма чиселъ C_{m-1}^k и C_{m-1}^{k-1}.

722. Задача I. — *Въ числѣ сочетаній изъ 12 буквъ* a,b,c,d .... *по 5 сколько такихъ сочетаній, каждое изъ которыхъ содержало бы 3 опредѣленныя буквы, напр.* a,b,c?

Для рѣшенія вопроса напишемъ подрядъ буквы a,b,c; къ этимъ буквамъ нужно послѣдовательно приписывать парныя сочетанія изъ остальныхъ 9 буквъ. Искомое число и будетъ число парныхъ сочетаній изъ 9 буквъ, т. е. $\frac{9\cdot8}{1\cdot2}$ или 36.

Задача II. — *Въ числѣ сочетаній изъ* m *буквъ* a,b,c, ... *по* k, *сколько такихъ, которыя не содержатъ ни одной изъ* p *опредѣленныхъ буквъ* a,b,c,...?

Отдѣливъ эти p буквъ, которыя не должны входить въ составъ требуемыхъ сочетаній, изъ остальныхъ $m-p$ буквъ составимъ сочетанія k-го порядка: ихъ число и будетъ искомое, т. е.

$$\frac{(m-p)(m-p-1)\cdot\cdot\cdot(m-p-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot k}.$$

Задача III.—*Въ числѣ сочетаній изъ m буквъ* a,b,c, ... *по* k, *сколько такихъ, которыя содержатъ, по крайней мѣрѣ, одну изъ опредѣленныхъ* p *буквъ* a,b,c, ...?

Очевидно, искомое число есть разность между полнымъ числомъ сочетаній изъ m буквъ по k и числомъ сочетаній, не содержащихъ ни одной изъ p опредѣленныхъ буквъ, т. е. равно

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}-\frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}.$$

Соединенія съ повтореніями.

723. Размѣщенія съ повтореніями. — Размѣщенія называютъ *полными* или *съ повтореніями,* когда буквы въ размѣщеніяхъ могутъ *повторяться* нѣсколько разъ.

Пусть дано m буквъ: $a,b,c,d,\ldots,h,i,l$. Чтобы составить изъ нихъ двойныя размѣщенія съ повтореніями нужно къ каждой изъ буквъ приписать послѣдовательно каждую изъ данныхъ буквъ безъ исключенія; такимъ образомъ получимъ двойныя размѣщенія:

съ буквою a въ началѣ: $aa,ab,ac,\ \ldots\ldots,ah,ai,al$;
съ буквою b въ началѣ: $ba,bb,bc,\ \ldots\ldots,bh,bi,bl$;
съ буквою c въ началѣ: $ca,cb,cc,\ \ldots\ldots,ch,ci,cl$; и т. д.

Обыкновеннымъ разсужденіемъ докажемъ, что полученныя этимъ способомъ размѣщенія всѣ различны и не содержатъ пропусковъ. Легко найти число ихъ. Съ каждою буквою въ началѣ имѣемъ m размѣщеній, и какъ каждая изъ m буквъ поочередно ставится въ началѣ, то всѣхъ размѣщеній будетъ $m\cdot m$ или m^2.

Для составленія тройныхъ размѣщеній беремъ одно двойное напр. aa и приписываемъ къ нему каждый изъ данныхъ элементовъ *безъ исключенія*; двойное размѣщеніе aa дастъ тройныя:

$aaa,aab,aac,\ \ldots\ldots\ldots,aah,aai,aal$;

двойное размѣщеніе ab дастъ тройныя:

$aba,abb,abc,\ \ldots\ldots\ldots,abh,abi,abl$; и т. д.

Извѣстнымъ образомъ докажемъ, что поступая такъ, ни одного тройнаго разм. мы не пропустимъ, и ни одного не повторимъ лишній разъ. Число ихъ опредѣлить легко. Одно двойное размѣщеніе даетъ m тройныхъ; слѣд. m^2 двойныхъ размѣщеній дадутъ $m\times m^2$ или m^3 тройныхъ.

Вообще число размѣщеній r-го порядка, обозначаемое символомъ AA_m^r, будетъ m^r. Доказать это значитъ доказать, что если число размѣщеній r—1-го пор. есть m^{r-1}, то число размѣщеній порядка r есть m^r. Въ самомъ дѣлѣ, послѣднія мы получаемъ, приписывая къ каждому размѣщенію $r-1$-го пор. каждую изъ m буквъ; такимъ обр. одно размѣщеніе $r-1$-го пор. даетъ m размѣщеній порядка r, слѣд. m^{r-1} размѣщеній $r-1$-го пор. дадутъ $m\times m^{r-1}$ или m^r размѣщеній порядка r.

Примѣры. I. — *Сколько можно написать трехзначныхъ чиселъ изъ девяти цифръ 1,2, . . . , 9?*

Очевидно, столько, сколько можно сдѣлать тройныхъ размѣщеній съ повтореніями изъ 9 элементовъ, т. е. 9^3 или 729.

II. *Сколькими способами могутъ вскрыться 3 игральныя кости* (костяные кубики съ номерованными гранями)?

Очевидно, 6^3 или 216 способами.

724. Перестановки съ повтореніями. — Вообразимъ m буквъ, въ числѣ которыхъ буква a повторяется α разъ, b — β разъ, c — γ разъ и т. д., причемъ $\alpha+\beta+$

$\gamma + \dots$ равно или меньше m, т. е. что каждая буква повторяется, или что есть и неповторяющіяся буквы. Группы, получаемыя отъ всевозможныхъ перестановокъ этихъ m буквъ, называются *перестановками съ повтореніями*; число ихъ обозначаютъ такъ: PP_m.

Обозначимъ число ихъ буквою x и опредѣлимъ его. Въ каждой группѣ поставимъ у α буквъ, равныхъ a, значки 1, 2, 2, ..., α. Переставимъ эти значки всевозможными способами; такъ какъ изъ α элементовъ можно сдѣлать P_α перестановокъ, то получится новая таблица, въ которой будетъ $x \,.\, P_\alpha$ групъ. Эта таблица содержитъ всѣ перестановки изъ m буквъ, въ числѣ которыхъ β буквъ равны b, γ буквъ равны c, ..., а другія различны. Въ самомъ дѣлѣ: 1) каждыя двѣ группы этой таблицы различны, ибо если они получаются изъ одной и той же группы первоначальной таблицы, то разнятся порядкомъ значковъ 1, 2, ..., α; а если происходятъ отъ двухъ различныхъ группъ, то отличаются порядкомъ буквъ. 2) Какое угодно перемѣщеніе изъ m буквъ, въ которомъ β буквъ равны b, γ равны c, ..., остальныя же буквы различны, находится въ этой второй таблицѣ; ибо если въ этомъ перемѣщеніи уничтожить значки 1, 2, ..., α, то получимъ группу первой таблицы; а, по предположенію, буквы a въ этой группѣ были снабжены индексами 1, 2, ..., α и послѣдніе перемѣщены всевозможными способами.

Затѣмъ въ каждой группѣ 2-ой таблицы поставимъ у буквы b значки 1, 2, 3, ..., β и перемѣстимъ эти значки всевозможными способами; получится 3-ья таблица, число членовъ которой равно $x \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta$. Какъ и выше, докажемъ, что эти члены суть перемѣщенія изъ m буквъ, въ числѣ которыхъ γ буквъ равны c и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, получимъ перемѣщенія изъ m буквъ числомъ $x \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \dots$ Но когда всѣ равныя буквы замѣнятся неравными, то образуются перемѣщенія изъ m буквъ, безъ повтореній; число такихъ перемѣщеній равно P_m. Итакъ:

$$x \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \dots = P_m, \quad \text{откуда } x = \frac{P_m}{P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \dots}, \text{ или}$$

$$x = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 4 \dots m}{1 \,.\, 2 \dots \alpha \times 1 \,.\, 2 \dots \beta \times 1 \,.\, 2 \dots \gamma \times \dots}.$$

Примѣры: I. *Сколько можно составить пятизначныхъ чиселъ цифрами 3 и 5, изъ которыхъ первая повторяется 2 раза, вторая 3 раза?*

Искомое число, очевидно, есть $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, т. е. 10.

II. *Какъ велика сумма цифръ во всѣхъ перемѣщеніяхъ изъ цифръ* 122334?

Число всѣхъ перемѣщеній $= \frac{P_6}{P_2 \,.\, P_2} = 180$; въ каждомъ перемѣщеніи сумма цифръ $= 15$, слѣд. во всѣхъ перемѣщеніяхъ она $= 15 \times 180 = 2700$.

III. *Въ урнѣ 10 шаровъ: 3 бѣлыхъ, 4 красныхъ, 2 черныхъ и 1 синій. Сколько можетъ быть перемѣщеній изъ этихъ шаровъ?*

Число искомыхъ перемѣщеній $= \frac{P_{10}}{P_3 \,.\, P_4 \,.\, P_2} = 12600$.

725. Сочетанія съ повтореніями. Имѣя m данныхъ буквъ a, b, c, d, . . . , h, i, l, и взявъ букву a, присоединимъ къ ней поочередно всѣ буквы, не исключая и буквы a; затѣмъ къ b присоединимъ послѣдовательно всѣ слѣдующія за ней буквы и самую букву b; къ c— всѣ за ней слѣдующія и c, и т. д. Получимъ группы, различающіяся, по крайней мѣрѣ, однимъ элементомъ и называемыя *сочетаніями изъ m буквъ 2-го порядка съ повтореніями.*

aa	*bb*	*cc*	.	.	*ii*	*ll*
ab	*bc*	*cd*	.	.	*il*	
ac	*bd*	.	.	.		
.	.		.	.		
.	.	*ci*				
.	*bi*	*cl*				
ai	*bl*					
al						

Затѣмъ, взявъ каждое сочетаніе 2-го порядка, припишемъ къ нему букву, которою оно оканчивается и каждую изъ слѣдующихъ буквъ; составимъ группы, разнящіяся, по крайней мѣрѣ, однимъ элементомъ и образующія *сочетанія изъ m элементовъ 3-го порядка съ повтореніями*, и т. д.

aaa	abb	.	.	.	iii	ill	lll
aab	abc	.	.	.	iil		
aac	.	.	.	.			
.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.			
aal	abc	.	.	.			

Въ простыхъ сочетаніяхъ порядокъ k былъ необходимо $\leqslant m$; въ случаѣ сочетаній съ повтореніями порядокъ ихъ м. б. какой угодно, т. е. k можетъ быть $\geqslant m$. Напр. изъ двухъ буквъ a и b сочетанія съ повтореніями могутъ быть и 3-го, и 4-го и т. д. порядковъ; такъ полныя сочетанія 3-го пор, изъ двухъ буква a и b будутъ: aaa, aab, abb, bbb.

Пусть требуется найти число сочетаній съ повтореніями изъ m буквъ $a, b, c, \ldots, l$ порядка k. Всякое такое сочетаніе м. б. изображено одночленомъ $a^\alpha\ b^\beta\ \ldots\ l^\lambda$, гдѣ α, β, . . ., λ суть m цѣлыхъ, положительныхъ или равныхъ нулю, чиселъ, которыхъ сумма $= k$. Всѣхъ сочетаній будетъ столько, сколькими способами можно распредѣлить k единицъ между m числами, нульными или положительными. Чтобы представить одно изъ такихъ распредѣленій, расположимъ въ рядъ $m-1$ какихъ либо знаковъ, напр. 0; затѣмъ напишемъ единицы числа α передъ первымъ 0, единицы β въ первомъ промежуткѣ и т. д., наконецъ, единицы числа λ за послѣднимъ 0; не ставя ничего, если показатель есть ноль. Такимъ образомъ получатся группы въ родѣ: 0 . 110 . . . . 01, состоящія изъ k единицъ и $m-1$ раздѣлительныхъ знаковъ. Сочетаній столько, сколько группъ этого рода, а число этихъ группъ есть число перемѣщеній изъ $m+k-1$ буквъ, въ числѣ которыхъ находится k единицъ и $m-1$ значковъ 0. Такимъ образомъ, назвавъ искомое число сочетаній чрезъ CC_m^k, получимъ:

$$CC_m^k = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,(m+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,(m-1)\times 1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,k} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Эту формулу можно представить въ другомъ видѣ, сокративъ на $1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,(m-1)$; найдемъ

$$CC_m^k = \frac{m(m+1)(m+2)\,.\,.\,.\,.\,(m+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,k} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Напр., число тройныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 4 элементовъ будетъ: $CC_4^3 = \frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3} = 20$.

726. Иногда можно упрощать опредѣленіе числа сочетаній съ повтореніями при помощи соотношенія:

$$CC_m^k = CC_{k+1}^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы (1) имѣемъ:

$$CC_m^k = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m+k-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,(m-1)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,k} \text{ и } CC_{k+1}^{m-1} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m+k-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-1)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,k}$$

а эти дроби равны.

Напр., $CC_3^{10} = CC_{11}^2 = \frac{11\,.\,12}{1\,.\,2} = 66$.

727. Примѣръ. *На сколько способовъ могутъ вскрыться 2, 3,... игральныя кости?*

На столько, сколько существуетъ парныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 6 элементовъ, т. е. на $CC_6^2 = \frac{6\,.\,7}{1\,.\,2} = 21$ способъ.

Три кости могутъ вскрыться на $CC_6^3 = \frac{6 . 7 . 8}{1 . 2 . 3} = 56$ способовъ.

728. Задачи.

1. Сколькими способами могутъ размѣститься 30 учениковъ въ классѣ?

2. Сколько различныхъ чиселъ можно составить изъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 0, полагая, что каждая цифра должна находиться въ каждомъ числѣ, но только 1 разъ? Числа, начинающіяся нулемъ, не считаются.

3. Сколько перемѣщеній можно составить изъ словъ: *Филиппъ*, *Caracas*, *Mississipi*, *inconstitutionnellement?*

4. Сколько перемѣщеній можно сдѣлать въ произведеніи $a^3b^7c^2$?

5. Изъ 7 буквъ, въ числѣ которыхъ есть нѣсколько a, можно сдѣлать 210 различныхъ словъ. Сколько разъ входитъ буква a?

6. Число размѣщеній изъ n предметовъ по 3 относится къ числу размѣщеній изъ тѣхъ же предметовъ по 4 какъ 1 : 20. Найти n?

7. Опредѣлить m изъ соотношенія $m : A_m^3 = 1 : 240$.

8. Сколько четырехзначныхъ чиселъ можно составить: 1) изъ цифръ 1, 2, 3, 4; 2) изъ цифръ 1, 2, . . . , 9? Въ томъ и другомъ случаѣ цифры могутъ повторяться.

9. Опредѣлить полное число размѣщеній безъ повтореній изъ 16 предметовъ по одному, по два, . . . , по 16?

10. Доказать, что полное число размѣщеній съ повтореніями изъ m предметовъ по 1, по 2, . . , по m равно $m . \frac{m^m-1}{m-1}$.

11. Найти n изъ соотношенія $AA_n^8 : AA_n^3 = 537824$.

12. Полное число размѣщеній изъ p предметовъ всѣхъ порядковъ отъ 1-го до 8, съ повтореніями, относится къ полному числу размѣщеній 1-го, . . . , 4-го пор., съ повтореніями же, какъ 1297 : 1. Найти p.

13. Сколько различныхъ произведеній можно составить изъ натур. чиселъ отъ 2 до 13, перемножая эти числа по 3?

14. Купецъ, имѣя 8 сортовъ кофе, хочетъ сдѣлать изъ нихъ смѣси, соединяя эти сорта по-ровну, употребляя по 3 сорта на каждую смѣсь. Сколько различныхъ смѣсей можетъ онъ составить?

15. Нѣкто имѣетъ 5 брюкъ, 8 жилетовъ и 7 сюртуковъ. Въ сколькихъ различныхъ костюмахъ можетъ онъ являться?

16. Имѣется m различныхъ предметовъ. Какого порядка число сочетаній изъ нихъ будетъ наибольшее?

97. $C_{n+2}^4 : C_n^2 = 11 : 1$; найти n?

18. Акціонерное общество, состоящее изъ 40 купцовъ, 20 адвокатовъ, 30 промышленниковъ, и 10 врачей желаетъ выбрать изъ своей среды коммиссію, въ составъ которой вошли бы 4 купца, 3 промышл., 1 медикъ и 2 адвоката. Сколькими способами можетъ быть составлена коммиссія?

19. Доказать, что $CC_m^p = CC_{m-1}^p + CC_m^{p-1}$. Затѣмъ, вывести отсюда формулу

$$CC_1^p + CC_2^p + CC_3^p + \ldots + CC_m^p = CC_m^{p+1}, \quad \text{или}$$

$$1.2.3\ldots p + 2.3\ldots(p+1) + \ldots + m(m+1)\ldots(m+p-1) = \frac{m(m+1)\ldots(m+p)}{p+1}.$$

ГЛАВА XLIII.

Биномъ Ньютона.

Выводъ формулы бинома Ньютона для цѣлаго положительнаго показателя.—Свойства этой формулы.—Степень полинома.—Ариѳметическій треугольникъ Паскаля.—Задачи.

729. Произведеніе биномовъ $(x+a)(x+b)\ldots(x+h)(x+i)$. **Прямымъ умноженіемъ находимъ:**

1. $$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{array}{l}a\\+b\end{array}\right|x+ab;$$

2 $$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{array}{l}a\\+b\\+c\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}ab\\+ac\\+bc\end{array}\right|x+abc;$$

3. $$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{array}{l}a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{l}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right|x+abcd.$$

и т. д.

Внимательное разсмотрѣніе этихъ произведеній обнаруживаетъ слѣдующіе законы ихъ состава:

1) Число членовъ каждаго произведенія единицею больше числа перемножаемыхъ биномовъ.

2) Каждое произведеніе расположено по убывающимъ степенямъ общей буквы x биномовъ, причемъ: показатель буквы x въ первомъ членѣ равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; затѣмъ показатели x идутъ постепенно уменьшаясь на 1, до послѣдняго члена, который не содержитъ буквы x, или, что тоже, содержитъ x въ *нулевой* степени.

3) Коэффиціентъ перваго члена равенъ 1; коэф. 2-го члена ревенъ суммѣ вторыхъ членовъ биномовъ, или, что тоже, суммѣ сочетаній перваго порядка изъ вторыхъ членовъ; коэф. третьяго члена равенъ суммѣ двойныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ; коэф. четвертаго члена — суммѣ тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ, и т. д. Наконецъ, послѣдній членъ равенъ произведенію вторыхъ членовъ всѣхъ биномовъ.

Докажемъ общность этого закона. Для этого, допустивъ, что законъ вѣренъ для $m-1$ бинома, докажемъ, что онъ останется вѣренъ и для произведенія, содержащаго однимъ биномомъ больше, т. е. для m биномовъ.

Итакъ, пусть будутъ $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... , $x+h$, $x+i$ тѣ $m-1$ биномовъ, для которыхъ, *по допущенію*, вышеуказанный законъ вѣренъ. Обозначимъ символами: S_1 — сумму вторыхъ членовъ этихъ биномовъ, S_2 – сумму двойныхъ сочетаній изъ нихъ, S_3 – сумму тройныхъ сочетаній,

вообще, S_k — сумму сочетаній k го порядка, и S_{m-1} — произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ. По допущенію, произведеніе этихъ $m-1$ биномовъ дастъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+h)(x+i)=x^{m-1}+S_1x^{m-2}+S_2x^{m-3}+S_3x^{m-4}+\dots$$
$$\dots+S_{k-1}x^{m-k}+S_k x^{m-k-1}+\dots+S_{m-1}.$$

Введя m-го множителя $x+l$, найдемъ отсюда:

$$(x+a)(x+b)\dots(x+i)(x+l)=x^m+\left.\begin{matrix}S_1\\+l\end{matrix}\right|x^{m-1}+\left.\begin{matrix}S_2\\+S_1l\end{matrix}\right|x^{m-2}+\left.\begin{matrix}S_3\\+S_2l\end{matrix}\right|x^{m-3}\dots$$
$$\dots+\left.\begin{matrix}S_k\\+S_{k-1}l\end{matrix}\right|x^{m-k}+\dots+S_{m-1}l.$$

1. Видимъ, что показатель буквы x въ первомъ числѣ равенъ числу m перемножаемыхъ биномовъ, что въ слѣдующихъ членахъ показатели буквы x идутъ, послѣдовательно уменьшаясь на 1, до послѣдняго члена, гдѣ этотъ показатель есть *ноль*, т. е. гдѣ x не входитъ.

2. Изъ закона показателей прямо слѣдуетъ, что число членовъ произведенія равно $m+1$, т. е. на единицу больше числа биномовъ.

3. Коэффиціентъ перваго члена есть 1.

Коэф. втораго члена составленъ изъ суммы S_1 вторыхъ членовъ первыхъ $m-1$ биномовъ, сложенной со вторымъ членомъ l m-го бинома; слѣд. онъ равенъ суммѣ вторыхъ членовъ всѣхъ m биномовъ.

Коэф. третьяго члена составляется изъ суммы S_2 двойныхъ сочетаній вторыхъ членовъ $m-1$ первыхъ биномовъ, сложенной съ произведеніемъ S_1l суммы вторыхъ членовъ этихъ же $m-1$ биномовъ на второй членъ l послѣдняго m-го бинома; другими словами, этотъ коэф. составленъ изъ суммы такихъ тройныхъ сочетаній m буквъ, въ которыя не входитъ l, + сумма тройныхъ сочетаній m буквъ, въ которыя входитъ l; а это даетъ полную сумму тройныхъ сочетаній изъ m буквъ.

Коэф. четвертаго члена равенъ суммѣ S_3 тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ первыхъ $m-1$ биномовъ, сложенной съ произведеніемъ S_2l суммы двойныхъ сочетаній тѣхъ же буквъ на новую букву l введеннаго бинома; другими словами, этотъ коэф. составленъ изъ суммы тройныхъ сочетаній вторыхъ буквъ m биномовъ, сочетаній, не содержащихъ l, + сумма тройныхъ сочетаній изъ тѣхъ же буквъ, но содержащихъ l; это даетъ полную сумму тройныхъ сочетаній m буквъ.

Вообще, коэф. при x^{m-k} или коэф. $(k+1)$-го члена составляется изъ суммы S_k сочетаній k-го порядка вторыхъ членовъ первыхъ $m-1$ биномовъ, + произведеніе $S_{k-1}.\,l$ суммы сочетаній $(k-1)$-го порядка изъ тѣхъ же членовъ на второй членъ l новаго бинома; т. е. этотъ коэф. слагается изъ суммы сочетаній k-го пор. вторыхъ буквъ m биномовъ, сочетаній, не содержащихъ l, + сумма сочетаній k-го порядка изъ тѣхъ же буквъ, но содержащихъ l; это даетъ полную сумму k-хъ сочетаній m буквъ.

Наконецъ, такъ какъ S_{m-1} есть произведеніе вторыхъ членовъ $m-1$ первыхъ биномовъ, то $S_{m-1}.\,l$ есть произведеніе вторыхъ членовъ m биномовъ.

Итакъ, законъ, допущенный для $m-1$ биномовъ, оказывается вѣрнымъ и для произведенія, содержащаго однимъ биномомъ больше. Но мы непосред-

ственно доказали его для четырехъ биномовъ; слѣд. онъ вѣренъ и для 5; будучи вѣрнымъ для 5, вѣренъ и для 6 биномовъ, и т. д.; слѣд. онъ вѣренъ для какого угодно числа биномовъ.

730. Формула бинома. Итакъ, имѣемъ тождество:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+i)(x+l)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\dots$$
$$\dots+S_k\,x^{m-k}+\dots+S_m\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(1)$$

полагая, что число биномовъ есть m. Приэтомъ:

$S_1=a+b+c\,.\,.\,.\,.\,.\,.+l;$
$S_2=ab+ac+\,.\,.\,.\,.\,.+il;$
$S_3=abc+abd+\,.\,.\,.\,.+hil;$
. . . .
. . . .
$S_k=abc\,\dots\,i+abc\,\dots\,l+\dots$
. . . .
$S_m=abcd\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,il.$

Для вывода изъ этого тождества формулы бинома, т. е. $(x+a)^m$, стоитъ только положить, что во всѣхъ m биномахъ вторые члены равны, т. е. что $a=b=c=\dots=i=l$. Первая часть тождества обратится въ $(x+a)^m$.

Затѣмъ, найдемъ, что:

$S_1=a+a+a+\,.\,.\,.\,.+a;$ а какъ всѣхъ слагаемыхъ здѣсь m, то $S_1=ma$.

$S_2=a^2+a^2+a^2+\,.\,.\,.\,.+a^2$; причемъ слагаемыхъ здѣсь столько, сколько двойныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т. е. $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$; слѣд. $S_2=\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,a^2$.

$S_3=a^3+a^3+\,.\,.\,.\,.+a^3$; причемъ a^3 повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько есть тройныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т. е. $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$; такъ что $S_3=\frac{m\,(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3$.

Вообще, $S_k=a^k+a^k+\,.\,.\,.\,.+a^k$; причемъ слагаемымъ a^k берется столько разъ, сколько есть сочетаній k-го порядка изъ m элементовъ, т. е. $\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m-k+1)}{1\,.\,2\,\,3\,.\,.\,.\,.\,k}$; и слѣд. $S_k=\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,k}\,.\,a^k$.

Наконецъ, $S_m=a\,.\,a\,.\,a\,.\,.\,.\,.\,.\,a$, гдѣ a повторяется множителемъ m разъ; слѣд. $S_m=a^m$.

Такимъ образомъ, тождество (1) беретъ видъ:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3x^{m-3}+\,.\,.\,.\,.$$
$$.\,.\,.+\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m-k+1)}{1\,\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,k}\,a^k\,x^{m-k}+\,.\,.\,.\,.+a^m.$$

Это и есть знаменитая *Ньютонова формула бинома*; пока она доказана нами для случая возвышенія бинома въ какую угодно степень *цѣлаго положительнаго* порядка. Вторая часть ея называется *разложеніемъ* первой.

731. Свойства формулы бинома. Формула бинома обладаетъ слѣдующими замѣчательными свойствами:

I. Члены ея расположены по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ буквы a, причемъ показатели буквы x идутъ послѣдовательно

уменьшаясь на 1, начиная отъ m и до нуля (въ послѣднемъ членѣ), а показатели буквы a идутъ, послѣдовательно увеличиваясь на 1, отъ 0 (въ первомъ членѣ) до m; сумма же показателей при x и a постоянна и равна, въ каждомъ членѣ, показателю m степени бинома.

II. *Число членовъ равно* $m+1$, т. е. единицею больше показателя бинома: это непосредственно видно изъ закона показателей.

III. Коэффиціенты бинома суть:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \ldots\ldots,\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,k},\ldots,m,\ 1,$$

т. е. *коэффиціентъ перваго члена равенъ 1, а коэффиціенты членовъ, начиная со втораго, суть числа сочетаній изъ m элементовъ порядка, равнаго числу предшествующихъ членовъ.*

IV. Обыкновенно $(k+1)$-ый членъ, формула котораго есть

$$T_{k+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(k-1)k}a^kx^{m-k},$$

называется *общимъ членомъ* разложенія, потому-что изъ него можно получить всѣ члены разложенія, начиная со 2-го, полагая k равнымъ послѣдовательно $1,2,3,4,\ldots,m$. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$k=1$, находимъ $T_2=\frac{m}{1}ax^{m-1}$, а это есть второй членъ;

$k=2$, « $T_3=\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}$, т. е. третій членъ;

$k=3$, « $T_4=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}$, т. е. четвертый членъ;

. . . .

$k=m$, « $T_{m+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-1)\,.\,m}a^mx^0=a^m$, а это — последній членъ.

Такимъ образомъ для полученія изъ общаго члена — какого угодно члена разложенія нужно только положить $k=$ числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

V. *Коэффиціенты членовъ крайнихъ и равно—удаленныхъ отъ крайнихъ равны между собою.*—Въ самомъ дѣлѣ, коэф-ты 1-го и послѣдняго члена равны 1. Затѣмъ, возьмемъ члены: $k+1$-й отъ начала и $k+1$-й отъ конца. По свойству III, коэффиціентъ перваго изъ этихъ членовъ равенъ числу сочетаній k го порядка изъ m элементовъ, т. е. C_m^k. Замѣтивъ, что отъ послѣдняго до $k+1$-го члена отъ конца, включительно, имѣется $k+1$ членъ, а всѣхъ членовъ $m+1$, заключаемъ, что $(k+1)$ му члену отъ конца предшествуетъ $(m+1)-(k+1)$ или $m-k$ членовъ, а потому его коэф., по пунк. III, равенъ C_m^{m-k}. Но мы знаемъ, что $C_m^k=C_m^{m-k}$ (§ 721, I).

VI. Если показатель m есть число четное и $=2p$, то число членовъ разложенія будетъ нечетное $2p+1$, а потому въ срединѣ разложенія будетъ коэффиціентъ не повторяющійся, съ обѣихъ сторонъ котораго коэффиціенты равны

и расположены въ обратномъ порядкѣ. Очевидно, въ этомъ случаѣ придется вычислить $p+1$ коэффиціентъ.

Если же показатель m есть число нечетное, напр. $2p+1$, то число членовъ будетъ четное и $=2p+2$; коэффиціенты второй половины будутъ тѣже, что и въ первой, но расположены въ обратномъ порядкѣ, а въ срединѣ разложенія находятся рядомъ два равныхъ коэффиціента. Вычислить придется половину, $(p+1)$, всѣхъ коэффиціентовъ.

VII. Вычисленіе членовъ разложенія слѣдуетъ вести по слѣдующему правилу. Подставивъ въ формулу $k+1$-го члена

$$T_{k+1}=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-k+2)(m-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\;(k-1)\cdot k}a^kx^{m-k}\;\ldots\ldots(1)$$

$k-1$ вмѣсто k, на основаніи п. IV, найдемъ к-ый членъ

$$T_k=\frac{m(m-1)\ldots\;(m-k+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(k-1)}a^{k-1}x^{m-k+1}\ldots\ldots\ldots(2)$$

Раздѣливъ (1) на (2), получимъ

$$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{m-k+1}{k}\times\frac{a}{x},\ \text{откуда}\ T_{k+1}=T_k\times\frac{m-k+1}{k}\times\frac{a}{x}\;\ldots(3)$$

Итакъ: *чтобы изъ k-го члена вывести $(k+1)$-й членъ, надо коэффиціентъ k-го помножить на показателя $m-k+1$ буквы x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число k членовъ, предшествующихъ опредѣляемому; затѣмъ показателя буквы a увеличить на 1, а показателя буквы x уменьшить на 1.*

Примѣры. 1) *Разложить* $(x+a)^7$.

Число членовъ $=7+1=8$; поэтому, вычисляемъ 4 коэффиціента, а для другой половины разложенія ставимъ тѣ-же коэф-ты въ обратномъ порядкѣ. Найдемъ, примѣняя правило VII, первые четыре члена: $x^7+7ax^6+\frac{7\,.\,6}{2}a^2x^5+\frac{7\quad6\,.\,5}{2\,.\,3}a^3x^4$, или $x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4$. Все разложеніе будетъ:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

2) *Разложить* $(x+a)^8$.

Всѣхъ членовъ 9; вычисляемъ 5 первыхъ: $x^8+8ax^7+\frac{8\,.\,7}{2}a^2x^6+\frac{8\,.\,7\,.\,6}{2\,.\,3}a^3x^5+\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{2\,.\,3\,.\,4}a^4x^4$, или $x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4$. Все разложеніе будетъ.

$$(x+a)^8=x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4+56a^5x^3+28a^6x^2+8a^7x+a^8.$$

VIII. — *Коэффиціенты идутъ увеличиваясь до средины разложенія, а затѣмъ уменьшаются.*

Соотношеніе (3) пунк. VII показываетъ, что коэффиціентъ $k+1$-го члена получается изъ коэф-та k-го члена умноженіемъ на дробь $\frac{m-k+1}{k}$. Слѣд., когда этотъ множитель >1, коэффиціентъ $(k+1)$-й будетъ больше k-го; когда $\frac{m-k+1}{k}$ будетъ $=1$, оба коэф-та будутъ равны; наконецъ, при $\frac{m-k+1}{k}<1$,

послѣдующій коэф-тъ будетъ $<$ предшествующаго. Опредѣленіе, при какихъ k множитель $\frac{m-k+1}{k}$ будетъ >1, приводится къ рѣшенію, относительно k, неравенства

$$\frac{m-k+1}{k}>1, \text{ откуда, замѣчая, что } k>0, \text{ имѣемъ: } k<\frac{m+1}{2} \dots (1)$$

Различаемъ два случая: m — число четное, m — нечетное.

Первый случай. — Пусть m число четное и $=2p$. Всѣхъ членовъ въ разложеніи будетъ $2p+1$; одинъ изъ нихъ занимаетъ среднее мѣсто: тотъ, передъ которымъ находится p членовъ, и за которымъ слѣдуетъ p членовъ, т. е. $p+1$-й. Подставивъ въ нер. (1) $2p$ вмѣсто m, найдемъ

$$k<p+\frac{1}{2}.$$

k есть число *цѣлое*, и оно должно быть меньше $p+\frac{1}{2}$; это можетъ быть при $k=0,1,2,3, \dots, p$: т. е. коэффиціенты возрастаютъ отъ начала до $p+1$-го включительно, т. е. до *средняго*, который и будетъ *наибольшій*. Изъ п. V заключаемъ, что дальнѣйшіе коэф-ты будутъ идти уменьшаясь до конца разложенія. Итакъ, въ срединѣ разложенія находится *одинъ* членъ съ *наибольшимъ* коэффиціентомъ.

Второй случай. — Пусть m — число нечетное и $=2p+1$. Число членовъ разложенія будетъ $2p+2$, такъ что оно распадается на двѣ половины по $p+1$ коэффиціенту въ каждой. Неравенство (1) даетъ

$$k<p+1,$$

откуда слѣдуетъ, что для полученія возрастающихъ коэффиціентовъ надо давать k значенія $0,1,2, \dots, p$; т. е. коэффиціенты идутъ возрастая въ первой половинѣ строки. Если затѣмъ дадимъ k значеніе $p+1$, для вычисленія перваго коэф-та второй половины разложенія, то множитель $\frac{m-k+1}{k}$ обратится въ 1; слѣд. $(p+2)$-й коэф. $=(p+1)$-му (что слѣдуетъ и изъ пун. V).

Итакъ, при m нечетномъ, въ срединѣ разложенія находятся *два равные коэффиціента рядомъ, большіе остальныхъ.*

IX. *Сумма всѣхъ коэффиціентовъ разложенія* $(x+a)^m$ *всегда* $=2^m$. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ формулѣ бинома $x=a=1$, замѣтимъ, что первая часть обратится въ 2^m; а во второй части всѣ степени буквъ a и x обратятся въ 1, такъ-что въ этой части останется сумма коэффиціентовъ; именно:

$$2^m=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\dots+1.$$

Примѣчаніе. Замѣтивъ, что коэффиціенты, начиная со втораго, суть числа сочетаній изъ m элементовъ порядковъ 1-го, 2-го, ..., m-го, и перенеся 1 въ первую часть, можемъ предыдущее равенство написать въ видѣ:

$$2^m-1=C_m^1+C_m^2+C_m^3+\dots+C_m^m.$$

Это значитъ, что полное число сочетаній изъ m элементовъ, порядковъ отъ 1-го до m-го, равно 2^m-1.

X. Разложеніе $(x-a)^m$ получается изъ $(x+a)^m$ подстановкою $(-a)$ вмѣсто a; такимъ образомъ

$$(x-a)^m=[x+(-a)]^m=x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(-a)^2x^{m-2}+\ldots+(-a)^m$$
$$=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}-\ldots\pm a^m \ldots (\alpha).$$

Очевидно, всѣ члены съ четными степенями $(-a)$ дадутъ знакъ $+$, съ нечетными же знакъ $-$; поэтому знаки разложенія чередуются. Послѣднему члену при m четномъ предшествуетъ $(+)$, при m нечетномъ $(-)$. Общій членъ будетъ

$$T_{k+1}=\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}a^kx^{m-k},$$

гдѣ нужно брать знакъ $+$ при k четномъ, и $-$ при k нечетномъ. Но если замѣтимъ, что $-a=-1.a$, откуда $(-a)^k=(-1)^k.a^k$, и что это произведеніе само собою принимаетъ знакъ $(+)$ при k четномъ и $(-)$ при нечетномъ k, то, очевидно, цѣлесообразнѣе дать общему члену видъ

$$T_{k+1}=+(-1)^k\,.\,\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\,.\,a^kx^{m-k},$$

подъ которымъ онъ самъ собою принимаетъ надлежащій знакъ соотвѣтственно всякому частному значенію k. — Подобно этому и послѣднему члену $\pm a^m$ цѣлесообразнѣе дать видъ: $+(-1)^m.a^m$.

Такъ, общій членъ разложенія $(1-x)^9$ будетъ

$$T_{k+1}=(-1)^k\,.\,\frac{9\,.\,8\ldots(10-k)}{1\,.\,2\ldots k}x^k.$$

XI. Если въ формулѣ (α) положить $x=a=1$, то она дастъ

$$0=1-m+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

или, собравъ положительные члены въ одной части, а отриц. въ другой:

$$1+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots=m+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

т. е. *сумма коэффиціентовъ нечетныхъ мѣстъ равна суммѣ коэффиціентовъ четныхъ мѣстъ.*

Примѣчаніе. Написавъ послѣднее равенство въ видѣ

$$1+C_m^2+C_m^4+C_m^6+\ldots=C_m^1+C_m^3+C_m^5+\ldots$$

заключаемъ: если изъ m предметовъ составить сочетанія всѣхъ порядковъ отъ 1-го до m-го включительно, то число сочетаній, въ составъ которыхъ входитъ нечетное число предметовъ, единицею больше числа сочетаній четнаго порядка.

732. Примѣръ. — *Разложить* $(7a^2b-3ab^2)^5$.

Положивъ $7a^2b=u$, $3ab^2=v$, имѣемъ:

$$(u-v)^5=u^5-5vu^4+\frac{5\,.\,4}{2}v^2u^3-\frac{5\,.\,4}{2}v^3u^2+5v^4u-v^5.$$

Подставивъ вмѣсто u и v ихъ величины и выполнивъ всѣ вычисленія, найдемъ:

$$(7a^2b-3ab^2)^5=16807a^{10}b^5-36015a^9b^6+30870a^8b^7-13230a^7b^8+2835a^6b^9-243a^5b^{10}.$$

733. Степень полинома. Практическій пріемъ для разложенія степени полинома заключается въ томъ, что въ выраженіи $(a+b+c\ldots.)^m$ разсматриваютъ $b+c+\ldots.$ какъ одну букву, и по формулѣ бинома разлагаютъ $[a+(b+c+\ldots.)]^m$. Въ разложеніе войдутъ различныя степени $(b+c+\ldots.)$; надъ этимъ выраженіемъ оперируютъ такимъ же точно образомъ, разсматривая $(c+d+\ldots.)$ какъ одну букву; продолжая такимъ образомъ, получаютъ требуемое разложеніе.

Отыщемъ общій членъ разложенія $(a+b+c+d+\ldots.)^m$. Положивъ $b+c+d+\ldots.=x$, имѣемъ $(a+b+c+d+\ldots.)^m=(a+x)^m=(x+a)^m$. Обозначивъ этотъ общій членъ буквою X, имѣемъ:

$$X=\frac{m(m-1)\ldots.(m-r+1)}{1.2.3\ldots.r}a^rx^{m-r}, \text{ или } X=\frac{1.2.3\ldots.m}{1.2\ldots.r.1.2\ldots.(m-r)}a^rx^{m-r}. \quad (1)$$

Здѣсь $x^{m-r}=(b+c+d\ldots.)^{m-r}=(b+y)^{m-r}=(y+b)^{m-r}$, полагая $c+d+\ldots.=y$.

Разложеніе $(y+b)^{m-r}$ содержитъ $m-r+1$ членовъ; назвавъ общій членъ его, содержащій $a^{r'}$, буквою У, можемъ этому члену, согласно (1), дать видъ

$$У=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.(m-r)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.r'\,.\,1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,(m-r-r')}\cdot b^{r'}y^{m-r-r'}.$$

Подставивъ въ (1) на мѣсто x^{m-r} общій членъ У этого выраженія, найдемъ

$$X=\frac{1.2\ldots.m\,.\,1.2\ldots.(m-r)}{1.2\ldots.r\,.\,1.2\ldots.(m-r)\,.\,1.2\ldots.r'\,.\,1.2\ldots.(m-r-r')}\cdot a^rb^{r'}y^{m-r-r'},$$

или, сокративъ коэффиціентъ на $1\,.\,2\,.\,\ldots\,.(m-r)$:

$$X=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,m}{1.2\ldots.r\,.\,1.2\ldots.r'\,.\,1.2\ldots.(m-r-r')}\cdot a^rb^{r'}y^{m-r-r'}\ldots\ldots(2)$$

Выраженіе это представляетъ всѣ тѣ члены искомаго разложенія, которыя содержатъ a^r и $b^{r'}$. Въ немъ $y^{m-r-r'}=(c+d+e+\ldots.)^{m-r-r'}=(z+c)^{m-r-r'}$, полагая $z=d+e+\ldots.$

Разложеніе $(z+c)^{m-r-r'}$ имѣетъ $m-r-r'+1$ членовъ; назвавъ общій его членъ, тотъ, передъ которымъ находится r'' членовъ, буквою Z, получимъ

$$Z=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.(m-r-r')}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.r''\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.(m-r-r'-r'')}a^rb^{r'}z^{m-r-r'-r''}.$$

Замѣнивъ во (2) выраженіе $y^{m-r-r'}$ его общимъ членомъ Z, имѣемъ

$$X=\frac{1.2\ldots.m\,.\,1.2\ldots.(m-r-r')}{1.2\ldots.r.1.2\ldots.r'.1.2\ldots.(m-r-r').1.2\ldots.r''.\,1.2\ldots.(m-r-r'-r'')}\cdot a^rb^{r'}c^{r''}z^{m-r-r'-r''}$$

или, по сокращеніи:

$$X=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}{1.2\ldots.r\,.\,1.2\ldots.r'\,.\,1.2\ldots.r''\,.\,1.2\ldots.(m-r-r'-r'')}a^rb^{r'}c^{r''}z^{m-r-r'-r''}$$

и т. д.

Если бы полиномъ имѣлъ только 4 члена, то былъ бы $z=d$, и если обозначить $m-r-r'-r''$ буквою r''', то общій членъ разложенія $(a+b+c+d)^m$ былъ бы

$$X=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,m}{1.2\ldots.r\,.\,1.2\ldots.r'\,.\,1.2\ldots.r''\,.\,1.2\ldots.r'''}a^rb^{r'}c^{r''}d^{r'''},$$

гдѣ $r'''=m-r-r'-r''$, или $r+r'+r''+r'''=m$.

Условившись произведеніе $1 . 2 . . . . k$ принимать $= 1$, когда $k = 0$, можемъ изъ X получить всѣ члены разложенія $(a + b + c + d)^m$, подставляя вмѣсто r, r', r'', r''' послѣдовательно всѣ положительныя цѣлыя числа, удовлетворяющія условію $r + r' + r'' + r''' = m$.

Для полученія перваго члена, полагаемъ $r = m$, и слѣд. $r' = r'' = r''' = 0$, вслѣдствіе чего всѣ произведенія $1 . 2 . . . . r'$, $1 . 2 . . . . r''$ и $1 . 2 . . . r'''$ обратятся въ 1; найдемъ

$$X = \frac{1 . 2 . 3 . . . . m}{1 . 2 . 3 . . . . m . 1 . 1 . 1} a^m b^0 c^0 d^0 = a^m.$$

Желая найти члены, содержащіе a^{m-1}, нужно положить $r = m - 1$ и слѣд. $r' + r'' + r''' = 1$. Приэтомъ получится столько членовъ, сколькими способами можно удовлетворить ур-нію $r' + r'' + r''' = 1$ цѣлыми положительными числами, со включеніемъ нуля. Очевидно этому ур-нію удовлетворимъ, полагая поочередно каждое слагаемое $= 1$, и приэтомъ каждое изъ остальныхъ двухъ равнымъ 0. Такимъ образомъ

1. При $r = m - 1$ беремъ $r' = 1$ и $r'' = r''' = 0$, что дастъ

$$X = \frac{1 . 2 . . . m}{1 . 2 . . . (m - 1) . 1 . 1} a^{m-1} b^1 c^0 d^0 = m a^{m-1} b;$$

2. При $r = m - 1$ беремъ $r'' = 1$ и $r' = r''' = 0$, откуда,

$$X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-1) . 1 . 1 . 1} a^{m-1} b^0 c^1 d^0 = m a^{m-1} c;$$

3. Наконецъ, при $r = m - 1$, взявъ $r''' = 1$ и $r' = r'' = 0$, имѣемъ

$$X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-1) . 1 . 1 . 1} a^{m-1} b^0 c^0 d^1 = m a^{m-1} d.$$

Желая найти члены, содержащіе a^{m-2}, должны въ общемъ членѣ положить $r = m - 2$, и слѣд. $r' + r'' + r''' = 2$. Послѣднему ур-нію можно удовлетворить 6 способами:

1. $r' = 2$ и $r'' = r''' = 0$;
2. $r'' = 2$ и $r' = r''' = 0$.
3. $r''' = 2$ и $r' = r'' = 0$.
4. $r' = 1$, $r'' = 1$ и $r''' = 0$.
5. $r' = r''' = 1$ и $r'' = 0$.
6. $r'' = r''' = 1$ и $r' = 0$.

Такимъ образомъ найдемъ члены:

1. $X = \frac{1 . 2 . 3 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-2) . 1 . 2 . 1 . 1} a^{m-2} b^2 c^0 d^0 = \frac{m(m - 1)}{1 . 2} a^{m-2} b^2.$

2. $X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-2) . 1 . 1 . 2 . 1} a^{m-2} b^0 c^2 d^0 = \frac{m(m - 1)}{1 . 2} a^{m-2} c^2.$

3. $X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-2) . 1 . 1 . 1 . 2} a^{m-2} b^0 c^0 d^2 = \frac{m(m - 1)}{1 . 2} a^{m-2} d^2.$

4. $X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-2) . 1 . 1 . 1} a^{m-2} b^1 c^1 d^0 = m(m-1) a^{m-2} bc.$

5. $X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-2) . 1 . 1 . 1} a^{m-1} b^1 c^0 d^1 = m(m-1) a^{m-2} bd.$

6. $X = \frac{1 . 2 . . . . m}{1 . 2 . . . . (m-2) . 1 . 1 . 1} a^{m-2} b^0 c^1 d^1 = m(m-1) a^{m-2} cd.$

Ариѳметическій треугольникъ Паскаля.

734. Возвысивъ биномъ $a+b$ послѣдовательно въ степени нулевую, первую, въ квадратъ, въ кубъ, ... , въ p-го степень, выпишемъ коэффиціенты этихъ разложеній въ горизонтальныя строки. Получится таблица, содержащая въ строкѣ нумера $(p+1)$ коеффиціенты разложенія (p)-й степени бинома.

1.	$(a+b)^0$	1
2.	$(a+b)^1$	1 . 1
3.	$(a+b)^2$	1 . 2 . 1
4.	$(a+b)^3$	1 . 3 . 3 . 1
5.	$(a+b)^4$	1 . 4 . 6 . 4 . 1
6.	$(a+b)^5$	1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1
.	. . . .	. . . .
.	. . . .	. . . .
.	. . . .	. . . .
.	. . . .	. . . .
$(p+1)$	$(a+b)^p$	$1 . C_p^1 . C_p^2 . C_p^3 . \quad . . C_p^{p-1} . 1.$

Числа этой таблицы составляютъ *ариѳметическій треугольникъ Паскаля;* они обладаютъ различными замѣчательными свойствами, изъ которыхъ укажемъ наиболѣе выдающіяся.

I. Первое свойство: *Число, находящееся въ m-й горизонтальной строкѣ и въ k-й вертикальной колоннѣ, равно*

$$\frac{(m-1)(m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m-k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ (k-1)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по самому построенію Паскалева треугольника, числа m-й строки суть числа сочетаній изъ $m-1$ элементовъ всѣхъ порядковъ отъ 1 до $m-1$-го, причемъ въ k-й колоннѣ этой строки стоитъ число сочетаній $k-1$-го порядка; слѣд. разсматриваемо число есть C_{m-1}^{k-1} или $\dfrac{(m-1)(m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m-k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ (k-1)}$.

Примѣчаніе. Когда $k>m$, формула C_m^k не имѣетъ смысла; но можно условиться, что въ этомъ случаѣ $C_m^k=0$.

II. Второе свойство. *Если взять въ Паскалевомъ треугольникѣ три числа* A, B, H, *расположенныя такъ,*

$$\begin{matrix} A & . & B \\ & & H \end{matrix}$$

что A *находится непосредственно влѣво отъ* B, *а* H *непосредственно внизъ отъ* B, *то* $H=A+B$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $A=C_p^q$, то $B=C_p^{q+1}$, $H=C_{p+1}^{q+1}$; но мы знаемъ(§721,II), что $C_{p+1}^{q+1}=C_p^q+C_p^{q+1}$; слѣд. $H=A+B$.

III. Третье свойство. *Если взять двѣ послѣдовательныя колонны Паскалева треугольника*

I	
A	I
B	B′
C	C′
.	.
.	.
.	.
K	K′
L	L′
.	U
.	.
.	.

то $U=1+A+B+C+\ldots+K+L$, *т. е. сумма* **n** *первыхъ чиселъ порядка* p *равна* n*-му числу порядка* $p+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, по второму свойству имѣемъ:

$$U=L+L',\quad L'=K'+K,\ \ldots,\quad C'=B'+B,\quad B'=1+A;$$

складывая и упрощая, находимъ

$$U=1+A+B+\ldots K+L.$$

Примѣчаніе. Числа одной и той же колонны Паскалева треугольника встрѣчаются въ нѣкоторыхъ вопросахъ анализа. Ихъ называютъ *фигурными числами*. Числа $n+1$-й колоны называются *фигурными числами n-го порядка*. Такимъ образомъ числа 2-й колонны: 1, 2, 3, ... суть фигурныя числа 1-го порядка; ихъ называютъ также *натуральными*. Числа 3-й колонны 1, 3, 6, 10 . . . . т. е. фигурныя числа 2-го порядка называютъ *треугольными*, такъ какъ ихъ числа единицъ можно расположить треугольниками:

и т. д.

Числа четвертой колонны 1, 4, 10, ... или 3-го порядка называютъ *пирамидальными*, ибо они выражаютъ числа точекъ, которыя можно расположить въ трегранномъ углѣ на параллельныхъ плоскостяхъ. Числа пятой колонны или 4-го порядка называются *треугольно-треугольными*.

735. Приложеніе. *Найти число сочетаній съ повтореніями изъ* m *буквъ* p*-го порядка.*

$$\begin{array}{rrrrl}
a+b & +c & + & d+\ldots\ldots & \\
a+b & +c & + & d+\ldots\ldots & \\
\hline
aa+bb & +cc & + & dd+\ldots & \\
+ab & +bc & + & cd+\ldots & \text{Соч. 2-го пор.}\\
 & +ac & + & bd+\ldots & \\
 & & + & ad+\ldots & \\
\hline
aaa+bbb & +ccc & + & ddd+\ldots & \\
+abb & +bcc & + & cdd+\ldots & \\
+aab & +acc & + & bdd+\ldots & \\
 & +bbc & + & add & \\
 & +abc & + & ccd & \text{Соч. 3-го пор.}\\
 & +aac & + & bcd & \\
 & & + & acd & \\
 & & + & bbd & \\
 & & + & abd & \\
 & & + & aad &
\end{array}$$

Для составленія сочетаній множимъ $a+b+c+\ldots$ самого на себя нѣсколько разъ, причемъ за множимое принимаемъ только члены, находящіеся надъ членомъ множителя и лѣвѣе его. Такимъ образомъ, въ послѣдовательныхъ произведеніяхъ получимъ сочетанія съ повтореніями 2-го, 3-го, и т. д. порядковъ.

Каждый столбецъ любаго произведенія содержитъ столько членовъ, сколько ихъ находится въ верхнемъ столбцѣ и въ столбцахъ съ лѣвой стороны предыдущаго произведенія. Такимъ образомъ изъ способа составленія произведеній видно, что если 1, α, β, γ, ... суть числа членовъ въ столбцахъ какого-либо произведенія, то числа членовъ въ столбцахъ слѣдующаго

произведенія будутъ $1, 1+\alpha, 1+\alpha+\beta, 1+\alpha+\beta+\gamma, \ldots$; а это есть рядъ чиселъ, выводимыхъ изъ предыдущаго по закону фигурныхъ чиселъ. Такъ для сочетаній 2-го порядка послѣдовательные столбцы содержатъ 1, 2, 3, ... членовъ, или рядъ фигурныхъ чиселъ перваго порядка; для сочетаній по 3 столбцы содержатъ 1, 3, 6, 10, ... членовъ, или рядъ фигурныхъ чиселъ втораго порядка. Вообще для сочетаній по p числа членовъ въ столбцахъ представляютъ рядъ фигурныхъ чиселъ $p-1$-го порядка. Полное число сочетаній или членовъ всего произведенія есть сумма ряда, доведеннаго до стольких столбцовъ, сколько дано буквъ. Поэтому, чтобы найти число сочетаній изъ m буквъ по p., нужно взять сумму m фигурныхъ чиселъ $p-1$-го порядка, или, по свойству III, m-ое фигурное число p-го порядка. Фигурныя числа p-го порядка находятся въ $(p+1)$-мъ столбцѣ, который начинается съ $(p+1)$-й строки. Начиная съ этой строки надо спуститься на m строкъ, получимъ $(p+m)$-ю строку, въ которой беремъ $p+1$-й членъ. Этотъ членъ будетъ (§ 734, Св. I).

$$\frac{(m+p-1)(m+p-2)\ldots m}{1.2.3\ldots p}.$$

Такимъ образомъ находимъ прежде доказанную формулу для числа сочетаній съ повтореніями.

736. *Примѣчаніе.* Теоріей соединеній занимались уже индійскіе математики; въ алгебрѣ Баскары даны правильныя формулы для опредѣленія числа различныхъ соединеній. Ариѳметическій треугольникъ былъ извѣстенъ уже китайскимъ математикомъ XI столѣтія, а затѣмъ вновь найденъ былъ Паскалемъ въ XVII столѣтіи. Формула бинома дана Ньютономъ въ 1676 году. Она вырѣзана на гробницѣ Ньютона въ Вестминстерскомъ аббатствѣ.

737. Задачи.

1. Найти пятый членъ разложенія $(a^5-2b^4)^{12}$.

2. Найти восьмой и девятый члены разложенія $\left(\frac{2x^2}{y^3}+\frac{y^2z}{4}\right)^{13}$.

3. Разложить $(2-i)^6$.

4. Найти шестой членъ разложенія $(a+bi)^{16}$.

5. Найти коэффиціентъ при ab^3c^5 въ разложеніи $(a+b+c)^9$.

6. Найти средніе члены разложенія $(5a-2b)^{19}$.

7. Показать, что средній членъ разложенія $(1+x)^{2n}$ равенъ

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\cdot 2^n x^n.$$

8. Найти коэффиціентъ при x^{2r+1} въ разложеніи $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

9. Найти r-й членъ отъ начала, r-й членъ отъ конца и средній членъ разложенія $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

10. Доказать, что разность между коэффиціентами при x^{r+1} и x^r въ разложеніи $(1+x)^{n+1}$ равна разности между коэффиціентами при x^{r+1} и x^{r-1} въ разложеніи $(1+x)^n$.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

ТЕОРІЯ РЯДОВЪ И ЛОГАРИѲМОВЪ.

ГЛАВА XLIV.

Прогрессія ариѳметическая.—Общій членъ.—Сумма членовъ.—Вставка среднихъ ариѳметическихъ. — Безконечная прогрессія. — Опредѣленіе суммы одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи. — Задачи.

738. Опредѣленіе. *Ариѳметической прогрессіей* наз. рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предыдущаго прибавленіемъ постояннаго, положительнаго или отрицательнаго, количества, называемаго *разностью* прогрессіи. Очевидно, что когда разность положительна, члены будутъ возрастать, и прогрессія наз. *возрастающею*; когда разность отрицательна, члены идутъ уменьшаясь, и прогрессія наз. *убывающею*. Слово прогрессія обозначается знакомъ $\div$; члены прогрессіи отдѣляются одинъ отъ другаго точкою. Такъ:

$\div 5 . 8 . 11 . 14 . 17 \ldots\ldots$ есть прогрессія возрастающая; разность ея $= 3$.

$\div 5 . 2 . -1 . -4 . -7 \ldots.$ есть прогр. убывающая; разность ея $= -3$.

Для полученія разности надо изъ какого-ниб. члена вычесть предшествующій.

Когда число членовъ прогрессіи ограниченное, она наз. *конечною*; при неограниченномъ числѣ членовъ—*безконечною*.

739. Каждые три смежные члена ариѳм. прогрессіи составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію. Пусть дана прогрессія въ общемъ видѣ

$\div a . b . c . d . e \ldots\ldots$, а разность ея r.

По опредѣленію прогрессіи: $c - b = r$ и $d - c = r$, откуда

$$d - c = c - b:$$

смежные члены b, c, d составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію.

740. Теорема. *Общій членъ.*—n-й членъ прогрессіи называется общимъ членомъ. Пусть дана прогрессія

$$\div a . b . c . d \ldots\ldots r . s . t . u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

въ которой u есть n-й членъ, а разность$=\delta$. По опредѣленію прогрессіи имѣемъ: $b=a+\delta$, $c=b+\delta$, $d=c+\delta$, ... , $s=r+\delta$, $t=s+\delta$, $u=t+\delta$. Складывая эти равенства, находимъ:

$$b+c+d+ \ldots +s+t+u=a+b+c+ \ldots +r+s+t+(n-1)\delta;$$

а отнявъ отъ обѣихъ частей по $b+c+ \ldots +s+t$, получаемъ:

$$u=a+(n-1)\delta.$$

Итакъ: *общій членъ прогрессіи равенъ первому, сложенному съ разностью, помноженною на число предшествующихъ членовъ.*

Примѣры: 1. *Найти двадцатый членъ прогрессіи.*

$$\div\ 7\ .\ 3\ .\ -1\ .\ .\ .\ .$$

Здѣсь $a=7$, $\delta=-4$, $n=20$. Слѣд.

$$u=7+(20-1)\ .\ (-4)=7+19\ .\ (-4)=-69.$$

2. *Найти величину n-го нечётнаго числа.*

Нечетныя числа образуютъ ариѳм. прогрессію, въ которой $a=1$, $\delta=2$; слѣд. n-е нечетное число$=1+(n-1)\ .\ 2=2n-1$.

3. *Пространства, проходимыя свободно-падающимъ тѣломъ въ первую, вторую, ... секунду, образуютъ ариѳметич. прогр., первый членъ которой* $=\frac{1}{2}g$, *а разность* $=g$. *Найти пространство, пробѣгаемое въ n-ю секунду?*

Это пространство$=\frac{1}{2}g+(n-1)g=(2n-1)\cdot\frac{g}{2}$.

741. Теорема. *Во всякой конечной ариѳметической прогрессіи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ двухъ другихъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ.*

Пусть имѣемъ прогрессію объ n членахъ:

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ .\ .\ .\ x\ .\ .\ .\ .\ y\ .\ .\ .\ .\ k\ .\ r\ .\ t\ .\ u,$$

разность которой$=\delta$; пусть, кромѣ того, членъ x имѣетъ передъ собою p членовъ, и пусть p членовъ слѣдуютъ за y. По формулѣ общаго члена имѣемъ:

$$x=a+p\ .\ \delta \ldots \ldots (1)$$

Написавъ прогрессію въ обратномъ порядкѣ:

$$\div\ u\ .\ t\ .\ r\ .\ k\ .\ .\ .\ .\ y\ .\ .\ .\ .\ x\ .\ .\ .\ .\ d\ .\ c\ .\ b\ .\ a,$$

замѣчаемъ, что ея разность будетъ $(-\delta)$; въ ней передъ членомъ y находится p членовъ, и потому

$$y=u+p\ .\ (-\delta) \ldots \ldots (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаемъ:

$$x+y=a+u.$$

Примѣчаніе. Можно бы было членъ y выразить и изъ начальной прогрессіи, принявъ въ ней y за первый членъ; въ такомъ случаѣ члену u пред-

шествовало бы p членовъ, и потому $u = y + p\delta$, откуда: $y = u - p\delta$, выраженіе, одинаковое съ (2).

742. Теорема. *Сумма членовъ конечной ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ, помноженной на число членовъ.*

Взявъ прогрессію $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, h \,.\, k \,.\, i \,.\, u$ объ n членахъ, и назвавъ ея сумму буквою S, имѣемъ

$$S = a + b + c + d + \ldots + h + k + i + u \ldots\ldots (1)$$

Написавъ слагаемыя въ обратномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$S = u + i + k + h + \ldots + d + c + b + a \ldots\ldots (2)$$

Складывая (1) съ (2), получаемъ:

$$2S = (a + u) + (b + i) + (c + k) + (d + h) + \ldots$$
$$\ldots + (h + d) + (k + c) + (i + b) + (u + a).$$

Во вторыхъ, третьихъ и т. д. скобкахъ имѣемъ суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ; по предыдущей теоремѣ, каждая такая сумма $= (a + u)$, слѣд. вторая часть равенства содержитъ слагаемое $(a + u)$, повторенное n разъ, а потому

$$2S = (a + u) \,.\, n, \quad \text{откуда} \quad S = \frac{(a+u) \,.\, n}{2}.$$

Примѣчаніе. Подставивъ вмѣсто u выраженіе $a + (n - 1)\delta$, можемъ этой формулѣ дать видъ

$$S = \frac{2a + (n - 1) \,.\, \delta}{2} \cdot n.$$

Примѣры: I. *Найти сумму n первыхъ натуральныхъ чиселъ.* Эти числа образуютъ прогрессію $\div 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (n - 1) \,.\, n$, въ которой первый членъ $= 1$, разность $= 1$, число членовъ $= n$; а потому

$$S = \frac{(1 + n) \,.\, n}{2}.$$

II. *Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.*

Выше мы видѣли, что n-ое нечетное число $= 2n - 1$; потому вопросъ приводится къ нахожденію суммы членовъ прогрессіи

$$\div 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (2n - 1),$$

въ которой первый членъ $= 1$, разность $= 2$, послѣдній членъ $= 2n - 1$, число членовъ $= n$. Такимъ образомъ

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

Итакъ: *сумма n первыхъ нечетныхъ чиселъ равна квадрату числа этихъ чиселъ.*

Докажемъ, что *обратно*: *если сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равна квадрату числа этихъ членовъ, каково бы оно ни было, то прогрессія есть рядъ нечетныхъ чиселъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, *каково бы ни было n*, должно быть

$$\frac{2a+(n-1)\delta}{2}\cdot n=n^2,$$

или, располагая по степенямъ n:

$$(2-\delta)n^2+(\delta-2a)n=0.$$

Такъ какъ полиномъ первой части долженъ быть *тождественно* равенъ нулю, то должны имѣть:

$$2-\delta=0 \text{ и } \delta-2a=0, \quad \text{откуда } \delta=2,\ 2a=\delta;$$

или: $a=1$ и $\delta=2$, т. е. рядъ будетъ $\div\ 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.\,.\,.$

743. Вставка среднихъ ариѳметическихъ между двумя данными числами.

Между двумя данными числами a и b вставить m среднихъ ариѳметическихъ значитъ составить ариѳметическую прогрессію объ $m+2$ членахъ, которой a и b были бы крайними членами. Очевидно, вопросъ приводится къ нахожденію разности δ прогрессіи. Такъ какъ члену b предшествуетъ $m+1$ членовъ, то

$$b=a+(m+1)\,.\,\delta, \quad \text{откуда } \delta=\frac{b-a}{m+1}\,.$$

Такимъ образомъ прогрессія будетъ

$$\div\ a\cdot\left(a+\frac{b-a}{m+1}\right)\cdot\left(a+2\cdot\frac{b-a}{m+1}\right)\cdot\left(a+3\cdot\frac{b-a}{m+1}\right)\cdots\cdot\left(a+m\frac{b-a}{m+1}\right)\cdot b.$$

Примѣръ. *Между 5 и 32 вставить 8 среднихъ ариѳметическихъ.*

Разность будетъ $\frac{32-5}{9}$, или 3; слѣд. имѣемъ прогрессію:

$$\div\ 5\,.\,8\,.\,11\,.\,14\,.\,17\,.\,20\,.\,23\,.\,26\,.\,29\,.\,32.$$

744. Теорема.—*Если въ прогрессіи* $\div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,.\,.\,.\,r\,.\,t\,.\,u$ *между каждымъ членомъ и слѣдующимъ вставить одинаковое число* m *среднихъ ариѳметическихъ, то данные члены вмѣстѣ съ вставленными составятъ одну сплошную прогрессію*

$$\div\ a.\alpha.\beta\ldots\lambda.b.\alpha'.\beta'\ldots\lambda'.c.\alpha''.\beta''\ldots\lambda''.d\ldots t.\alpha^{(n)}.\beta^{(n)}\ldots\lambda^{(n)}.u.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ частныя прогрессія, такимъ образомъ составленныя

$$\div\ a.\alpha.\beta\ldots\lambda.b;\quad \div\ b.\alpha'.\beta'\ldots\lambda'.c;\quad \ldots\ldots\ \div\ t.\alpha^{(n)}.\beta^{(n)}\ldots\lambda^{(n)}.u$$

послѣдовательно имѣютъ разности

$$\frac{b-a}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1},\ \ldots\ldots\ \frac{u-t}{m+1};$$

но $b-a=c-b=d-c=\ldots\ldots=u-t$, по опредѣленію прогрессіи, слѣд. всѣ эти отдѣльныя прогрессіи имѣютъ одинаковую разность. А какъ, приэтомъ, послѣдній членъ одной служитъ первымъ членомъ слѣдующей, то совокупность всѣхъ прогрессій составляетъ одну сплошную прогрессію.

745. Теорема.—*Во всякой безконечной возрастающей ариѳметической прогрессіи члены приближаются къ* $+\infty$, *а въ убывающей къ* $-\infty$.

1. Если буквою u обозначимъ n-й членъ, то требуется доказать, что всегда можно найти такое цѣлое число n, что u будетъ больше всякаго произвольно взятаго количества M, т. е. что для n всегда можно найти цѣлое значеніе, удовлетворяющее неравенству: $a+\delta(n-1)>M$ . . . (1). Въ самомъ дѣлѣ, перенеся a во вторую часть и дѣля на положит. число δ, имѣемъ

$$n-1>\frac{M-a}{\delta},\ \text{откуда}\ n>1+\frac{M-a}{\delta}.$$

Каково бы ни было M, всегда $\frac{M-a}{\delta}$ можно выразить цѣлымъ или дробнымъ числомъ; найдя цѣлую часть формулы $1+\frac{M-a}{\delta}$ и взявъ для n цѣлое число, большее ея, тѣмъ самымъ удовлетворимъ неравенству (1).

Примѣръ.— *Съ какого мѣста члены прогрессіи* $\div$ *5 . 8 . 11 . . . . становятся больше 10000?*

По предыдущему должно быть $n>1+\frac{10000-5}{3}$, или $n>3332\frac{2}{3}$; слѣд. члены становятся больше 10000, начиная съ 3333-го.

2. Если прогрессія будетъ убывающая, т. е. $\delta<0$, то всегда можно найти въ прогрессіи такой членъ u, который былъ бы меньше произвольно взятой величины M, т. е, всегда можно найти цѣлое число n, удовлетворяющее неравенству $a+(n-1)\delta<M$. Въ самомъ дѣлѣ, неравенство даетъ $(n-1)\delta<M-a$, откуда, раздѣливъ на δ и перемѣнивъ смыслъ неравенства, имѣемъ

$$n-1>\frac{M-a}{\delta},\ \text{а отсюда}\ n>1+\frac{M-a}{\delta}.$$

Взявъ для n цѣлое число, большее $1+\frac{M-a}{\delta}$, удовлетворимъ неравенству.

746. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ ариѳметическимъ прогрессіямъ.

Во всякой ариѳметической прогрессіи фигурируетъ 5 количествъ a, u, δ, n, s, связанныхъ двумя уравненіями:

$$u=a+(n-1)\,.\,\delta\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)\qquad s=\frac{(a+u)n}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Слѣдовательно, всегда можно найти два изъ этихъ количествъ, когда остальныя три будутъ даны; а потому можно предложить столько различныхъ задачъ, сколько существуетъ сочетаній изъ пяти элементовъ по два, т. е. C_5^2 или 10 задачъ. Эти сочетанія суть: au, $a\delta$, an, as, $u\delta$, un, us, δn, δs, ns; а слѣд. задачи таковы:

	Данныя.	Искомыя.
1.	a, δ, n	u, s
2.	u, δ, n	a, s
3.	a, u, n	δ, s
4.	a, u, δ	n, s
5.	s, δ, n	a, u
6.	s, u, n	a, δ

7.	s, a, n	u, δ
8.	s, u, δ	a, n
9.	s, a, δ	u, n
10.	s, a, u	δ, n.

Изъ числа этихъ задачъ только 8-я и 9-я приводятъ къ квадратному ур-нію, остальныя рѣшаются ур-ми 1-й степени.

747. Задача I. *Сколько нужно взять членовъ въ ариѳметической прогрессіи, которой 1-й членъ есть 16, а разность 8, чтобы сумма членовъ составила 1840?*

Имѣемъ ур-нія

$$u = 16 + (n-1) \,.\, 8 \text{ и } 1840 = \frac{(16+u)\,n}{2}.$$

Исключая изъ этихъ ур-ній u, находимъ ур-ніе

$$(1)\qquad 1840 = \frac{[2\,.\,16 + (n-1)\,.\,8]n}{2}, \quad \text{или} \quad n^2 + 3n - 460 = 0.$$

Рѣшая это ур-ніе, находимъ корни: $n' = 20$, $n'' = -23$. Заключаемъ, что нужно взять 20 членовъ. Прогрессія будетъ

$$\div\ 16.24.32.40.48.56.64.72.80.88.96.104.112.120.128.136.144.152.160.168.$$

Отрицательный корень. — Подставивъ въ ур. (1) — n вмѣсто n, получимъ:

$$1840 = \frac{[2\,.\,16 - (n+1)8]\,.\,-n}{2}, \quad \text{или} \quad 1840 = \frac{[2\,.\,(-16) + (n+1)\,.\,8]n}{2}, \quad \text{или}$$

$$1840 = \frac{[2\,.\,(-8) + (n-1)\,.\,8]n}{2},$$

ур-ніе, положительный корень котораго $= 23$. Заключаемъ, что, взявъ первымъ членомъ прогрессіи (-8) вмѣсто 16, разность сохранивъ ту-же, а число членовъ увеличивъ на 3, получимъ сумму, равную 1840. И дѣйствительно, сумма 23 членовъ прогрессіи

$$\div\ -8\,.\,0\,.\,8\,.\,16\,.\,24\,.\,.\,.\,.\,.\,168$$

равна 1840, ибо эта прогрессія сравнительно съ предъидущей имѣетъ три лишнихъ члена: $-8, 0$ и $+8$, дающихъ въ суммѣ 0, а остальные члены—тѣже, что и въ предъидущемъ рядѣ.

748. Задача II.—*Изъ* A *выѣзжаетъ курьеръ и проѣзжаетъ въ первый день 10 миль, а въ каждый слѣдующій $\frac{1}{4}$-ью мили больше. Спустя 3 дня, другой курьеръ, ѣдущій по тому же пути какъ и первый, выѣзжаетъ изъ города* B, *расположеннаго передъ городомъ* A, *въ 40 миляхъ отъ послѣдняго. Онъ проѣзжаетъ въ первый день 7 миль, а въ каждый слѣдующій день $\frac{2}{3}$ мили болѣе. Черезъ сколько дней послѣ выѣзда перваго оба курьера встрѣтятся?*

Рѣшеніе Штурма.—Пусть искомое число дней будетъ x. Путь, пройденный 1-мъ курьеромъ, есть сумма членовъ ариѳм. прогр., которой крайніе

члены суть 10 и $10+\frac{x-1}{4}$, т. е. $\left(20+\frac{x-1}{4}\right)\cdot\frac{x}{2}$, или $\frac{(79+x)x}{8}$. Второй курьеръ находится въ дорогѣ, до встрѣчи съ первымъ, $x-3$ дня, и проѣзжаетъ $\left[14+\frac{(x-4)\cdot 2}{3}\right]\cdot\frac{x-3}{2}$, или $\frac{(17+x)(x-3)}{3}$ миль.

Ур-ніе задачи есть

(1) $\frac{(79+x)x}{8}-\frac{(17+x)(x-3)}{3}-40=0$, или (2) $5x^2-125x+552=0$.

Рѣшивъ ур-ніе, найдемъ: $x'=5{,}72\ldots\ldots$, $x''=19{,}27\ldots\ldots$

Но, приводя задачу къ ур-нію, мы предполагали, что x — число цѣлое; сл. найденныя рѣшенія не отвѣчаютъ на предложенный вопросъ. Тѣмъ не менѣе, можно показать, что цѣлыя части 5 и 19 корней означаютъ, что были двѣ встрѣчи, первая по истеченіи 5, вторая 19-ти дней.

Во-первыхъ замѣтимъ, что если буквою α обозначить путь, сдѣланный первымъ курьеромъ, и буквою β — пусть, пройденный вторымъ, увеличенный на 40 миль, полагая, что первый курьеръ находится въ пути цѣлое число x, а второй—цѣлое число $x-3$ дней, то имѣемъ тождественно

$$(3)\qquad 5x^2-125x+552=24(\beta-\alpha).$$

Это, очевидно, слѣдуетъ изъ того, что ур. (2) было выведено изъ (1) перемѣною знаковъ у всѣхъ членовъ и умноженіемъ ихъ на 24.

Подставимъ теперь въ 1-ую часть ур. (2) вмѣсто x сперва 5, потомъ 6; такъ какъ меньшій корень 5,72 . . . . содержится между этими числами, то результатъ первой подстановки будетъ положительный, второй—отрицательный. Но въ силу тождества (3), разность $\beta-\alpha$ всегда имѣетъ одинаковый знакъ съ триномомъ $5x^2-125x+552$; слѣд. въ концѣ пятаго дня $\alpha<\beta$, а въ концѣ шестаго $\beta<\alpha$. Итакъ, первая встрѣча, какъ и было сказано, имѣла мѣсто между пятымъ и шестымъ днемъ. Подобнымъ образомъ докажемъ, что вторая встрѣча имѣла мѣсто черезъ 19 дней. Возможность этой второй встрѣчи легко понять, ибо второй курьеръ, увеличивая свою скорость болѣе перваго, встрѣтитъ его, будучи сначала перегнанъ первымъ. Это подтверждается изслѣдованіемъ, въ концѣ сколькихъ дней оба курьера имѣютъ одинаковую скорость: найдемъ число дней 13, содержащееся между 5 и 19.

Можно, далѣе, опредѣлить дроби, которыя слѣдуетъ придать къ числамъ 5 и 19, для нахожденія точнаго времени встрѣчъ, предполагая, что скорость курьеровъ не измѣняется въ теченіи цѣлаго дня. Опредѣлимъ, напр., время второй встрѣчи.

Чтобы найти промежутокъ, раздѣляющій курьеровъ по истеченіи 19 дней, достаточно, въ силу тождества (3), подставить въ первую часть ур. (2) 19 вмѣсто x и раздѣлить результатъ на 24. Найдемъ $\left(-\frac{3}{4}\right)$; знакъ (—) показываетъ, что въ началѣ 19-го дня курьеръ B не догналъ еще курьера A. Но скорости A и B въ теченіи 19 го дня суть $10+\frac{18}{4}$ и $7+\frac{15\times 2}{3}$, или $\frac{29}{2}$ и 17; слѣд. если обозначимъ буквою y искомую часть дня, то для опредѣленія y получимъ

ур-ніе $17y = \frac{3}{4} + \frac{29}{2}y$, откуда $y = 0{,}3$; слѣд. вторая встрѣча имѣла мѣсто въ концѣ $19^{\text{ч}}{,}3$.

749. Задача III. — *Въ двухъ ариѳметическихъ прогрессіяхъ*

$$\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, \ldots \quad \text{и} \quad \div 3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 15 \,.\, \ldots$$

заключающихъ, каждая, по 100 членовъ, сколько находится общихъ членовъ?

Членъ порядка x въ первой прогрессіи есть $2 + 3(x - 1)$, или $3x - 1$; членъ порядка y во второй равенъ $3 + 4(y - 1)$, или $4y - 1$; чтобы эти члены были равны, необходимо, чтобы было $3x = 4y$. Вопросъ приводится къ нахожденію цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, меньшихъ 100, удовлетворяющихъ неопредѣленному ур-нію $3x = 4y$. Выводя изъ него x, находимъ $x = y + \frac{1}{3}y$; слѣд. $\frac{y}{3}$ должно равняться нѣкоторому цѣлому k, откуда $y = 3k$, и слѣд. $x = 4k$. Но какъ x должно быть не болѣе 100, то k можетъ получать только значенія: $1, 2, 3, \ldots, 25$. Заключаемъ, что обѣ прогрессіи содержатъ 25 общихъ членовъ.

750. Задача IV. — *Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы три данныя числа* A, B, C *были членами порядка* m, p, q *одной и той же ариѳметической прогрессіи.*

Обозначая буквами x и y первый членъ и разность прогрессіи, о которой говорится въ условіи, необходимо и достаточно, чтобы ур-нія

$$A = x + (m - 1)y, \quad B = x + (p - 1)y, \quad C = x + (q - 1)y$$

удовлетворялись одними и тѣми же значеніями x и y; другими словами, искомое условіе есть результатъ исключенія x и y изъ этихъ трехъ ур-ній. Имѣемъ

$$A - B = (m - p)y, \quad B - C = (p - q)y,$$

а исключивъ y, найдемъ

$$(A - B)(p - q) = (B - C)(m - p), \text{ или } (p - q)A + (q - m)B + (m - p)C = 0:$$

это и есть искомое условіе.

751. Задача V. — *Найти сумму одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи.*

Пусть имѣемъ прогрессію $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, k \,.\, l$, разность которой $= \delta$, а число членовъ $n + 1$, и пусть требуется найти сумму m-хъ степеней ея членовъ. — По свойству прогрессіи имѣемъ:

$$b = a + \delta, \quad c = b + \delta, \quad d = c + \delta, \ \ldots\ldots, \ l = k + \delta.$$

Возвышая всѣ эти равенства въ $m + 1$-ю степень, по формулѣ бинома Ньютона имѣемъ:

$$b^{m+1} = (a + \delta)^{m+1} = a^{m+1} + (m + 1)a^m\delta + \frac{(m+1) \,.\, m}{1 \,.\, 2}a^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}a^{m-2}\delta^3 + \ldots\ldots + \delta^{m+1}$$

$$c^{m+1} = (b + \delta)^{m+1} = b^{m+1} + (m + 1)b^m\delta + \frac{(m+1) \,.\, m}{1 \,.\, 2}b^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}b^{m-2}\delta^3 + \ldots\ldots + \delta^{m+1}$$

$$d^{m+1} = (c + \delta)^{m+1} = c^{m+1} + (m + 1)c^m\delta + \frac{(m+1) \,.\, m}{1 \,.\, 2}c^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}c^{m-2}\delta^3 + \ldots\ldots + \delta^{m+1}$$

. . . .

$$l^{m+1}=(k+\delta)^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)k^m\delta+\frac{(m+1)\,.\,m}{1\,.\,2}k^{m-1}\delta^2+\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}k^{m-2}\delta^3+\,.....\,+\delta^{m+1}$$

Складывая эти равенства, замѣчая при этомъ, что члены b^{m+1}, c^{m+1}, $d^{m+1},\ldots,$ k^{m+1} общіе обѣимъ частямъ, взаимно уничтожаются, и полагая для краткости

$a^m+b^m+c^m+\,.\,.\,.\,.+k^m=S_m$; $a^{m-1}+b^{m-1}+\,.\,.\,.\,.+k^{m-1}=S_{m-1}$;

$a^{m-2}+b^{m-2}+\,.\,.\,.+k^{m-2}=S_{m-2};\ldots;$ $a+b+c+\,.\,.\,.+k=S_1$, найдемъ

$$l^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)\delta.S_m+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}\delta^2.S_{m-1}+\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\delta^3.S_{m-2}+\ldots+(m+1)\delta.S_1+n\delta^{m+1}\,.(1)$$

Выражая отсюда S_m, находимъ:

$$S_m=\frac{l^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)\delta}-\frac{m}{2}.\delta.S_{m-1}-\frac{m(m-1)}{2\,.\,3}\delta^2.S_{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3\,.\,4}\delta^3.S_{m-3}-\ldots-S_1-\frac{n}{m+1}\delta\;..(2)$$

Помощію этой формулы можно найти S_m, если будутъ извѣстны суммы S_{m-1}, $S_{m-2},\,.\,.\,.\,.\,,S_1$. Прилагая эту формулу, нужно помнить, что число членовъ второй части равно $m+2$.

S_1 есть сумма членовъ самой прогрессіи и выраженіе ея извѣстно. Зная S_1 и полагая $m=2$, найдемъ S_2. Зная S_1 и S_2, и полагая $m=3$, найдемъ S_3, и т. д.

Сумма одинаковыхъ степеней натуральнаго ряда. — Положивъ $a=1$, $\delta=1$, $l=n+1$, обратимъ нашу прогрессію въ рядъ первыхъ $n+1$ натуральныхъ чиселъ: $\div 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,n\,.\,(n+1)$. Въ этомъ рядѣ будетъ:

$S_m=1^m+2^m+3^m+\,.\,.\,.\,.+n^m$; $S_{m-1}=1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\,.\,.\,.\,.+n^{m-1}$;

. . . .

$S_2=1^2+2^2+\,.\,.\,.\,.+n^2$; $S_1=1+2+3+\,.\,.\,.\,.+n$.

Формула (2) приметъ видъ

$$S_m=\frac{(n+1)^{m+1}-1}{(m+1)}-\frac{m}{2}.S_{m-1}-\frac{m(m-1)}{2\,.\,3}.S_{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3\,.\,4}S_{m-3}-\ldots-S_1-\frac{n}{m+1}\ldots(3).$$

1. Положивъ $m=1$, и замѣтивъ, что рядъ будетъ имѣть 3 члена, получимъ:

$S_1=\frac{(n+1)^2-1}{2}-\frac{1}{2}.S_0$. Но $S_0=1^0+2^0+3^0+\ldots..+n^0=1+1+1+\ldots..+1=n$; сл.

$$S_1=\frac{(n+1)^2-1}{2}-\frac{n}{2}=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+1-1)}{2}=\frac{(n+1).n}{2}\ldots(A)$$

результатъ, найденный нами въ § 742.

2. Положивъ $m=2$, находимъ:

$S_2=\frac{(n+1)^3-1}{3}-S_1-\frac{1}{3}\,S_0$. Подставляя величины, найденныя для S_0 и S_1, получимъ:

$$S_2=\frac{(n+1)^3-1}{3}-\frac{(n+1)n}{2}-\frac{n}{3}=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}-\frac{(n+1)n}{2}=\frac{(n+1)[(n+1)^2-1]}{3}$$

$$-\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{(n+1)n}{2}=\frac{2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)}{6}=$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(B)$$

Такова формула суммы квадратовъ первыхъ n натуральныхъ чиселъ.

3. Положивъ $m=3$, найдемъ:

$S_3=\frac{(n+1)^4-1}{4}-\frac{3}{2}S_2-S_1-\frac{1}{4}S_0$. Подставляя выраженія, найденныя для S_2, S_1, S_0, получимъ:

$$S_3=\frac{(n+1)^4-1}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}-\frac{2n(n+1)}{4}-\frac{n}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^4-(n+1)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)}{4}=\frac{(n+1)[(n+1)^3-1-n(2n+1)-2n]}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)[(n+1)^3-(2n+1)(n+1)]}{4}=\frac{(n+1)(n+1)[n^2+2n+1-2n-1]}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=S_1^2 \dots\dots\dots\dots\dots (C)$$

Такимъ образомъ: *сумма кубовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ равна квадрату суммы тѣхъ же чиселъ*

4. Подобнымъ образомъ нашли бы

$$S_4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \dots\dots\dots (D)$$

$$S_5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \dots\dots\dots (E)$$

и т. д.

752. Предѣлъ $\frac{S^m}{n^{m+1}}$. — Положивъ въ равенствѣ (1) $a=1$, $\delta=1$, $l=n$, имѣемъ

$$n^{m+1}=1+(m+1)S_m+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}.S_{m-1}+\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}S_{m-2}+\dots+(m+1)S_1+n$$

Если бы перенесли всѣ члены, исключая втораго, въ первую часть, то нашли-бы въ ней полиномъ $m+1$-й степени относительно n, такъ-что сумма S_m m-хъ степеней первыхъ n чиселъ есть цѣлая функція $m+1$-й степени относительно n, разсматриваемаго, какъ перемѣнное. Такимъ образомъ, полиномы S_{m-1}, S_{m-2}, ... суть функціи отъ n степени m-й, $m-1$-й, ... Слѣд., раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на n^{m+1}, замѣтимъ, что всѣ дроби

$$\frac{S_{m-1}}{n^{m+1}},\ \frac{S_{m-2}}{n^{m+1}},\ \frac{S_{m-3}}{n^{m+1}},\ \dots\dots$$

обратятся въ ноль при $n=\infty$, ибо степень числителя отн. n каждой изъ нихъ ниже степени знаменателя.

Значитъ, въ предѣлѣ, при $n=\infty$, равенство дастъ

$$1=(m+1)\ .\ lim\ \frac{S_m}{n^{m+1}},\ \text{откуда}\ lim\ \frac{S_m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}.$$

Напр., по этой теоремѣ имѣемъ: $lim\ \frac{S_2}{n^3}=\frac{1}{3}$, $lim\ \frac{S_4}{n^5}=\frac{1}{5}$, и т. д.

753. *Приложеніе I. — Вычисленіе кучъ ядеръ.* Въ настоящее время въ артиллеріи употребляются ядра двухъ родовъ: сферическія—для гладкихъ орудій, и цилиндро—коническія—для нарѣзныхъ. Тѣ и другія складываютъ въ арсеналахъ въ кучи различныхъ формъ; займемся вычисленіемъ числа ядеръ, заключающихся въ такихъ кучахъ.

I. *Опредѣлить число ядеръ пирамидальной кучи съ квадратнымъ основаніемъ.* — Сферическія ядра въ этого рода кучахъ складываютъ слѣдующимъ образомъ. На землѣ кладутъ ядра рядами, образующими квадратный слой, въ каждой сторонѣ котораго n

ядеръ; на немъ помѣщаютъ въ промежуткахъ между ядрами другой квадратный слой, содержащій $n-1$ ядеръ въ каждой своей сторонѣ; и т. д. до верхняго слоя, въ которомъ находится одно ядро. Такимъ образомъ число ядеръ въ кучѣ будетъ =

$$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots\ldots+2^2+1^2,$$

т. е. суммѣ квадратовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ, или, по формулѣ (B):

$$X=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Усѣченная квадратная пирамида. — Если съ этой кучи снять нѣсколько ядеръ, взявъ сперва верхнее ядро, затѣмъ ядра (4) слѣдующаго слоя и т. д., то если снято будетъ p слоевъ, получится квадратная усѣченная пирамида, въ основаніи которой n^2 ядеръ, а въ верхнемъ слоѣ $(p+1)^2$. Число снятыхъ ядеръ получится изъ (α), гдѣ надо n замѣнить буквою p. Число ядеръ оставшихся

$$X'=\frac{n(n+1)(2n+1)-p(p+1)(2p+1)}{6}=\frac{(n-p)[2p^2+p(2n+3)+(n+1)(2n+1)]}{6}.$$

Положивъ $p=0$, найдемъ формулу (α).

II. *Найти число ядеръ пирамиды съ треугольнымъ основаніемъ.* — Основаніемъ кучи служитъ равносторонній △; въ промежутки его положены ядра, образующія другой равносторонній △, котораго каждая сторона содержитъ однимъ ядромъ менѣе; и т. д.; наконецъ, верхній слой состоитъ изъ одного ядра.

Пусть нижній слой содержитъ въ каждой сторонѣ n ядеръ; онъ будетъ состоять изъ n рядовъ, изъ которыхъ въ первомъ будетъ 1 ядро, во второмъ 2, въ третьемъ 3, ... , въ n-мъ n ядеръ. Слѣд. число всѣхъ ядеръ нижняго слоя $=1+2+3+\ldots+n$, или, по формулѣ (A), $\frac{n(n+1)}{2}$, или $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$. Полагая въ этой формулѣ n послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, ... , n, найдемъ:

число ядеръ 1-го слоя $=\frac{1}{2}+\frac{1^2}{2}$

„ „ 2-го „ $\frac{2}{2}+\frac{2^2}{2}$

„ „ 3-го „ $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2}$

. . . .

„ „ n-го „ $\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$; слѣд. число всѣхъ ядеръ кучи

$$Y=\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+n)+\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2);$$

или, по формуламъ (A) и (B):

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\ldots(\beta).$$

Усѣченная треугольная куча. Снявъ p слоевъ сверху, получимъ усѣченную треугольную пирамиду, содержащую въ верхнемъ ребрѣ $(p+1)$ ядро. По формулѣ (β) найдемъ число ядеръ въ ней

$$Y'=\frac{(n-p)[p^2+p(n-3)+(n+1)(n+2)]}{6}.$$

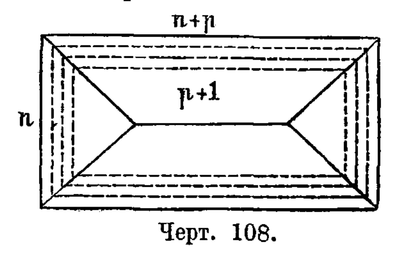
III. *Найти число ядеръ кучи съ прямоугольнымъ основаніемъ.* Пусть меньшая сторона основанія содержитъ n ядеръ, большая $n+p$. Замѣтимъ, что число ядеръ

въ измѣреніяхъ слоевъ будетъ всегда уменьшаться на 1, при переходѣ отъ одного слоя къ другому. Слѣд. разность между числами шаровъ въ двухъ сторонахъ каждаго слоя всегда будетъ p. Верхній слой состоитъ изъ одного ряда, имѣющаго $p+1$ ядро.

Число ядеръ нижняго слоя будетъ

$$n(n+p), \qquad \text{или} \qquad n^2+pn.$$

Полагая n послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, ... n, найдемъ числа ядеръ во всѣхъ слояхъ:



Черт. 108.

$$1^2+p\,.\,1$$
$$2^2+p\,.\,2$$
$$3^2+p\,.\,3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n-1)^2+p(n-1)$$
$$n^2+p\,.\,n;$$

слѣд. число всѣхъ ядеръ кучи

$$Z=(1^2+2^2+3^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ +(n-1)^2+n^2)+p(1+2+3+\ .\ .\ .\ .\ .\ +(n-1)+n), \text{ или}$$

$$Z=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+p\,.\,\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6} \quad . . (\gamma).$$

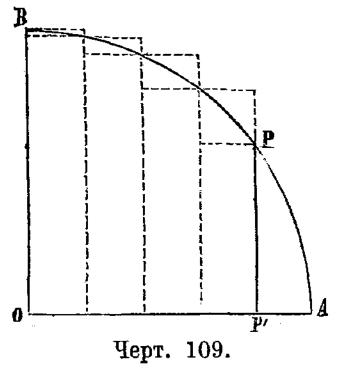
Обыкновенно даютъ число ядеръ сторонъ основанія; пусть $n+p=m$; формула приметъ видъ:

$$Z=\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

IV. *Куча цилиндро-коническихъ ядеръ.* Въ основаніи кучи находится прямоугольникъ, въ одноя сторонѣ котораго (меньшей) n ядеръ, въ другой p. Въ виду формы ядеръ, надъ этимъ основаніемъ можно расположить прямоугольный слой съ p ядрами въ одной строкѣ, $(n-1)$ въ другой, и т. д. Число U ядеръ, будетъ:

$$U=pn+p(n-1)+p(n-2)+\ .\ .\ .\ .\ +p\,.\,2+p\,.\,1=p\,.\,\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

754. *Приложеніе II. Опредѣленіе объема шара и его частей.* Разсмотримъ шаровой слой, котораго одно основаніе пусть совпадаетъ съ большимъ кругомъ; такой слой мы получимъ, взявъ на дугѣ AB квадранта точку P, опустивъ изъ нея перпендикуляръ PP′ на радіусъ OA и заставивъ фигуру OBPP′ сдѣлать полный оборотъ около OA, какъ оси. Раздѣлимъ $OP'=h$ на произвольное число n равныхъ частей, изъ точекъ дѣленія проведемъ перпендикуляры къ OA до встрѣчи съ дугою, и на каждомъ изъ нихъ и на отрѣзкахъ построимъ прямоугольники: получимъ рядъ описанныхъ и рядъ вписанныхъ прямоугольниковъ. При обращеніи фигуры около OA, первые образуютъ тѣло, состоящее изъ n цилиндровъ, объемъ котораго будетъ больше объема слоя; вторые составятъ тѣло, котораго объемъ меньше слоя.



Черт. 109.

Для вычисленія объемовъ обоихъ тѣлъ, описаннаго и вписаннаго, обозначимъ радіусъ шара буквою R, радіусы основаній описанныхъ цилиндровъ будутъ

$$R, \sqrt{R^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2}, \quad \sqrt{R^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \quad \sqrt{R^2-\left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \quad .\ .\ .\ .\ , \quad \sqrt{R^2-\left[\frac{(n-1)h}{h}\right]^2}.$$

Радіусы основаній вписанныхъ цилиндровъ будутъ:

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2},\quad \sqrt{R^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2},\quad \sqrt{R^2-\left(\frac{3h}{n}\right)^2},\quad \ldots\ldots \sqrt{R^2-\left(\frac{nh}{n}\right)^2}.$$

Объемъ описаннаго тѣла будетъ:

$$W=\pi R^2.\frac{h}{n}+\pi\left[R^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{h}{n}+\pi\left[R^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{h}{n}+\ldots+\pi\left[R^2-\left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2\right]\cdot\frac{h}{n},$$

или, въ виду того, что число слагаемыхъ есть n:

$$W=\pi R^2h-\pi.\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2}{n^3}\cdot h^3.$$

Для объема вписаннаго тѣла такимъ же образомъ найдемъ:

$$w=\pi\left[R^2-\left(\frac{h}{n}\right)^2\right].\frac{h}{n}+\pi\left[R^2-\left(\frac{2h}{n}\right)^2\right].\frac{h}{n}+\pi\left[R^2-\left(\frac{3h}{n}\right)^2\right].\frac{h}{n}+\ldots+\pi\left[R^2-\left(\frac{nh}{n}\right)^2\right].\frac{h}{n},$$

или $$w=\pi R^2h-\pi.\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2}{n^3}\cdot h^3.$$

Отсюда находимъ: $W-w=\frac{1}{n}.h^3$, слѣд. при неограниченномъ увеличеніи n разность между обоими объемами м. б. сдѣлана безконечно малою; а потому на осн. Теоремы I, § 194, заключаемъ, что объемъ слоя есть общій предѣлъ перемѣнныхъ W и w. Итакъ, назвавъ объемъ слоя буквою U, имѣемъ

$$U=lim.\left\{\pi R^2h-\pi.\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2}{n^3}\cdot h^3\right\}.$$

Такъ какъ первый членъ πR^2h есть величина постоянная, то задача сводится къ опредѣленію $\lim\left[\frac{1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2}{n^3}\right]_{n=\infty}$, который, какъ извѣстно, равенъ $\frac{1}{3}$.

Итакъ: $$U=\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h^3=\pi h\left[R^2-\frac{h^2}{3}\right]\quad\ldots\ldots\quad(1).$$

При помощи этой формулы можно опредѣлить и объемъ такого слоя, котораго ни одно изъ основаній не есть большой кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ центра опустимъ перпендикуляры h' и h'' на основанія такого слоя, то, полагая $h'>h''$, можемъ разсматривать данный слой U′ какъ разность двухъ слоевъ перваго рода; поэтому

$$U'=\pi\left[R^2-\frac{1}{3}h'^2\right]h'-\pi\left[R^2-\frac{1}{3}h''^2\right]h'',$$

что легко привести (введя радіусы основаній и высоту слоя) къ обыкновенной формулѣ объема слоя.

Если въ формулѣ (1) положимъ $h=R$, найдемъ объмъ полушара $U''=\frac{2}{3}\pi R^3$, а отсюда объемъ цѣлаго шара $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Вычтя изъ объема полушара объемъ слоя (1), найдемъ объемъ сферическаго сегмента: $\frac{2}{3}\pi R^3-\pi[R^2-\frac{1}{3}h^2]h$ . . . . (2). Отсюда получимъ обыкновенно даваемую въ геометріи формулу объема сегмента, если введемъ его высоту $H=R-h$; отсюда $h=R-H$, а подставивъ во (2), найдемъ $\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$.

Для вычисленія объема шароваго сектора, разсматриваемъ его какъ сумму сегмента и конуса; назвавъ высоту сегмента буквою H, находимъ для высоты конуса $R - H$, а для радіуса его основанія $\sqrt{R^2 - (R - H)^2}$; такъ что объемъ сектора будетъ $= \pi\left(R - \frac{H}{3}\right)H^2 + \frac{\pi}{3}\left[R^2 - (R - H)^2\right](R - H)$, или, по упрощеніи, $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Такимъ образомъ формула (1) рѣшаетъ вполнѣ вопросъ о вычисленіи объемовъ шара и его частей.

755. Задачи. 1. Найти послѣдній членъ и сумму членовъ въ прогрессіяхъ: ÷1. 1, 1. 1, 2......(200 чл); ÷63. 58. 53 ..... (8 член.); ÷ $2m$. $(2m + 4n)$.....(14 чл).

2. Найти разность и сумму членовъ прогрессій, въ которыхъ даны: 1) $a = 169$, $u = 8$, $n = 24$; 2) $a = 7$, $u = -3{,}5$, $n = 36$; 3) $a = 2b^2$; $u = 2b^2 + 17a^3$, $n = 35$.

3. Вставить: 1) 7 среднихъ между 7 и —9; 2) 15 среднихъ между $36a^2$ и $4a^2$.

4. Даны: $s = 2640$, $\delta = -20$; $u = 15$; найти n.

5. Даны: $a = 21$, $\delta = -2$, $s = 120$; найти n.

6. Раздѣлить 85 на части, составляющія ариѳм. прогр., въ которой было-бы $a = 7$, $\delta = \frac{4}{3}$. Опредѣлить число членовъ и послѣдній членъ.

7. $a = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{3}{2}$, $s = 7475$. Найти u и n.

8. $a = 2{,}5$; $\delta = 0{,}3$; $s = 1020$. Найти n?

9. Сколько членовъ нужно взять въ прогрессіи ÷ 5. 9. 13 . . . чтобы ихъ сумма равнялась 12877.

10. Найти сумму n первыхъ четныхъ чиселъ.

11. Найти стороны прямоугольнаго треугольника, если извѣстно, что они составляютъ ариѳмет. прогр., которой разность $= 25$.

12. Найти ариѳметическую прогр., въ которой сколько бы ни взять членовъ, всегда ихъ сумма равна утроенному квадрату числа этихъ членовъ.

13. Углы выпуклаго многоугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію, которой разность $= 4^0$, а наибольшій уголъ $= 172^0$. Найти число сторонъ.

14. Углы прямоугольнаго △ образуютъ ариѳметич. прогрессію; периметръ △ равенъ 24 футамъ. Найти стороны.

15. Углы многоугольника объ n сторонахъ образуютъ ариѳмет. прогр., которой первый членъ $= a$; найти разность. Приложить къ случаямъ: $n = 3$; $n = 4$; $n = 9$; и $n = 15$.

16. При какомъ условіи сумма двухъ какихъ угодно членовъ ариѳметической прогрессіи составляетъ членъ этой же самой прогрессіи?

17. Вставить между 1 и 31 столько среднихъ ариѳм., чтобы ихъ сумма была вчетверо больше суммы двухъ наибольшихъ изъ нихъ.

18. Показать, что квадраты выраженій $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 + 2x - 1$ составляютъ ариѳметическую прогрессію.

19. Если a^2, b^2, c^2 образуютъ ариѳм. прогрессію, то и $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуютъ ариѳм. прогрессію.

20. Найти сумму n первыхъ членовъ каждаго изъ слѣдующихъ рядовъ:

a) $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots.$

b) $(a+b), (a^2+b^2), (a-b)^2, \ldots.$

c) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-2b}{a+b}, \frac{5a-3b}{a+b}, \ldots.$

d) $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots.$

e) $2^2+5^2+8^2+\ldots$

f) $1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots.$

g) $3.8+6.11+9.14+\ldots.$

21. Изъ нечетныхъ чиселъ образуютъ группы

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid \ldots.$$

такъ, что група n-ая содержитъ n членовъ; вычислить сумму чиселъ n-й группы.

22. Найти такую прогрессію, чтобы сумма n членовъ, начиная отъ перваго, равнялась бы $(n+1)$ разъ взятой половинѣ члена, на которомъ останавливаются?

23. n-й членъ ариѳм. прогрессіи равенъ $\frac{3n-1}{6}$; найти первый членъ, разность и сумму первыхъ n членовъ.

24. Если въ ариѳм. прогрессіи 10-й членъ есть среднее пропорціональное между 4-мъ и 15-мъ, то 12-й чл. есть ср. проп. между 9-мъ и 16-мъ.

25. Даны члены M и N порядковъ m-го и n-го ариѳм. прогрессіи; вычислить членъ P порядка p-го. Примѣръ: 3-й чл. $=-1$; 7-й $=1$; найти двадцатый членъ?

26. Найти ариѳметич. прогрессію, въ которой 7 и 5 были бы соотвѣтственно 5-мъ и 7-мъ членомъ.

27. m и n суть членъ порядковъ $(p+q)$-го и $(p-q)$-го ариѳм. прогр.; найти p-й и q-й члены.

28. Если $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ суть суммы n первыхъ членовъ n ариѳметическихъ прогрессій, начинающихся съ 1, и имѣющихъ соотвѣтственно разности 1, 2, 3, ..., n; то доказать, что эти суммы также составляютъ ариѳметич. прогрессію, и что сумма этой прогрессіи $=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

29. Пусть $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_p$ означаютъ суммы p прогрессій, имѣющихъ, каждая, n членовъ; пусть ихъ первые члены суть: 1, 2, 3, ..., p; а разности: 1, 3, 5, ..., $(2p-1)$.

Доказать, что $S_1+S_2+\ldots+S_p=\frac{np}{2}(np-1)$.

30. Найти ариѳм. прогрессію, которой сумма членовъ выражается формулою $3n^2+4n$, каково бы ни было число n членовъ?

31. Ариѳмет. прогр. такова, что отношеніе суммы n первыхъ членовъ къ суммѣ слѣдующихъ $2n$ членовъ независитъ отъ n.

Найти отношеніе разности къ первому члену.

32. Даны: первый членъ a и разность r прогрессіи ариѳм.; зная, что эта разность r, число x членовъ и сумма ихъ составляютъ сами ариѳметич. прогрессію, вычислить x и разность этой новой прогрессіи. Изслѣдовать.

33. Крайніе члены одной прогрессіи суть a и b; крайніе члены другой суть a' и b'; первая имѣетъ n членовъ. Каково должно быть число членовъ второй, чтобы членъ порядка p первой равнялся члену порядка q второй?

34. Опредѣлить коэффиціенты p и q ур-нія $x^4+px^2+q=0$ такъ, чтобы корни составляли ариѳметич. прогрессію.

35. При какомъ значеніи m корни ур-нія $x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$ составляютъ ариѳметическую прогрессію. Вычислить соотвѣтствующіе корни.

36. На прямой намѣчено n равноотстоящихъ точекъ A, B, C, D, ... ; разстояніе между крайними точками $=a$. Движущаяся точка выходитъ изъ A и, дойдя до B, возвращается въ A; затѣмъ изъ A достигаетъ до C и снова возвращается въ A, и т. д., проходя дважды разстояніе отъ A до каждой изъ остальныхъ точекъ. Найти длину всего пройденнаго пути?

37. Два курьера, выѣзжая одновременно изъ двухъ мѣстъ, отстоящихъ другъ отъ друга на 1190 верстъ, ѣдутъ на встрѣчу другъ другу. Первый проѣзжаетъ въ первый день 20 верстъ, во второй 30, въ третій 40 и т. д.; второй курьеръ въ первый день проѣзжаетъ 90 в., во второй 82, въ третій 74 и т. д. Черезъ сколько дней они встрѣтятся?

38. Два тѣла M и M′ выходятъ одновременно изъ точекъ A и B, разстояніе между которыми = 75 метр. и движутся отъ A къ B, причемъ первое догоняетъ второе. M пробѣгаетъ въ первую минуту 1 м., во вторую 3, въ третью 5 и т. д. въ ариѳм. прогрессіи. M′ пробѣгаетъ въ первую минуту 3 м., во вторую 4, въ третью 5 и т. д. (въ ариѳм. прогр.). Черезъ сколько минутъ они встрѣтятся?

39. Метеорологъ замѣтилъ, что отъ 8-го до 19-го іюня термометръ ежедневно поднимался на $\frac{1}{2}$ градуса, и что ариѳметическая средина этихъ 12 показаній термометра составляла $18\frac{3}{4}$ градусовъ. Сколько градусовъ показывалъ термометръ 8 іюня?

40. По новѣйшимъ изслѣдованіямъ относительно внутренней теплоты земли оказывается, что при углубленіи на каждые 100 фут. температура возрастаетъ на 1^0C. Если на поверхности земли температура $=10^0$C, то какова она на глубинѣ 1000 ф., 10000 ф., 1 мили (24000 ф.), и какова въ центрѣ земли, полагая, что сказанный законъ не измѣняется до самаго центра земли, и зная, что радіусъ земли = 858 милямъ. Затѣмъ указать, на какой глубинѣ температура достигаетъ кипѣнія воды (100^0), плавленія свинца (334^0), плавленія желѣза (1200^0).

41. Кубическій сосудъ, наполненный водою, обращенъ поверхностью своей къ небу. Температура воздуха равна 30^0 въ первый день, и въ каждый слѣдующій день увеличивается на 1^0. Положимъ, что при температурѣ въ 15^0 въ одинъ день испаряетси одинъ дюймъ (въ глубину), и при другихъ температурахъ въ такой же пропорціи. Каждый вечеръ идутъ дожди, въ первый вечеръ выпало на 3 дюйма, а въ каждый слѣдующій вечеръ глубина выпадающаго дождя убывала въ ариѳметической прогрессіи, разность которой равна $\frac{1}{90}$ количества воды, выпавшаго въ 1-й день. Въ концѣ 41 дня нашли, что сосудъ опорожнился. Какова его вмѣстимость?

41. Корабль со 175 пассажирами имѣлъ запасъ воды, достаточный для окончанія путешествія. Спустя 30 дней, вслѣдствіе скорбута, ежедневно умирало по 3 человѣка. Вслѣдствіе бури путешествіе продлилось лишнихъ 3 недѣли. Когда корабль достигъ гавани, весь запасъ воды не былъ истощенъ. Какъ долго продолжалось путешествіе?

43. Отецъ даритъ каждому изъ своихъ сыновей въ день его рожденія столько книгъ, сколько сыну лѣтъ. Лѣта 5-ти сыновей составляютъ ариѳметич. прогрессію, разность которой $= 3$. Каковы были ихъ лѣта, когда у нихъ составилась библіотека въ 375 томовъ?

44. Вывести формулу площади треугольника, раздѣливъ его высоту на равныя части, проведя чрезъ точки дѣленія параллели основанію и построивъ на каждой параллели и на каждомъ основаніи прямоугольники, содержащіеся между двумя послѣдовательными параллелями.

45. Подобнымъ же образомъ вычислить объемъ пирамиды. Параллели замѣнятся здѣсь параллельными плоскостями, а прямоугольники — призмами.

ГЛАВА XLV.

Прогрессія геометрическая. — Общій членъ. — Вставка среднихъ геометрическихъ. — Сумма членовъ конечной прогрессіи. — Леммы о степеняхъ и корняхъ. — Суммированіе безконечныхъ геометрическихъ прогрессій. — Задачи.

756. Опредѣленіе. — *Геометрической прогрессіей* наз. рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное количество, называемое *знаменателемъ прогрессіи*. Когда абсолютная величина членовъ идетъ увеличиваясь, прогрессія называется *возрастающею*; если же абсолютная величина членовъ идетъ убывая, прогрессія наз. *убывающею*. Очевидно, въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей она меньше единицы. Для полученія знаменателя прогрессіи надо какой нибудь членъ раздѣлить на предыдущій. Слово прогрессія обозначается знакомъ $\div\div$; между членами прогрессіи ставятъ знакъ : . Такъ

$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : \ldots$ есть возрастающая прогр. съ знаменателемъ 3;

$\div\div\ 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \ldots$ есть убывающая прогрессія съ знаменателемъ $\frac{1}{3}$.

Общій видъ геометрической прогрессіи будетъ

$$\div\div\ a : b : c : d : \ldots : r : t : u : \ldots \qquad (1)$$

знаменатель обыкновенно обозначаютъ буквою q.

Каждые три смежные члена прогрессіи составляютъ непрерывную кратную пропорцію. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію геометрической прогрессіи: $c = bq$ и $d = cq$, откуда, раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ $c : d = b : c$.

757. Теорема. **Общій (n-й) членъ.**—Пусть въ прогрессіи (1) § 756 членъ u будетъ n-й; по опредѣленію прогрессіи, имѣемъ;

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ \ldots,\ t = rq,\ u = tq.$$

Перемножая почленно эти $(n-1)$ равенствъ и сокращая обѣ части на $b . c \ldots t$, найдемъ

$$u = aq^{n-1},$$

т. е. *каждый членъ прогрессіи равенъ первому, помноженному на знаменателя прогрессіи въ степени числа предшествующихъ членовъ.*

Такъ, найдемъ, что 9-й чл. прогрессіи $\div\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : . . . . будетъ $= 1 \times 3^8$, или 4374. Восьмой членъ $\div\!\div$ $3 : \frac{3}{2} : \ldots$ равенъ $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{3}{128}$.

758. Задача. *Найти условіе, при которомъ три данныя числа* A, B, C *представляютъ члены порядковъ m, n, p одной и той же геометрической прогрессіи?*

Обозначивъ первый членъ этой прогрессіи буквою x, а знаменателя буквою y, имѣемъ ур-нія

$$A = xy^{m-1},\quad B = xy^{n-1},\quad C = xy^{p-1}.$$

Три ур-нія вообще не могутъ быть удовлетворены однѣми и тѣми же значеніями x и y; поэтому, чтобы найти искомое условіе, нужно выразить, что существуетъ общее этимъ ур-мъ рѣшеніе, т. е. *исключить* x и y. Для исключенія x дѣлимъ почленно первое ур. на второе, а второе на третье:

$$\frac{A}{B} = y^{m-n},\quad \frac{B}{C} = y^{n-p}.$$

Возвышая первое изъ этихъ ур-ній въ степень $n-p$, а второе въ степень $m-n$, имѣемъ:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = y^{(m-n)(n-p)},\quad \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n} = y^{(m-n)(n-p)},$$

откуда $\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n}$, или $A^{n-p} \times B^{p-m} \times C^{m-n} = 1$:

это и есть требуемое условіе.

759. Вставка среднихъ геометрическихъ между двумя данными числами.

Вставить m среднихъ геомерическихъ или пропорціональныхъ между двумя данными числами a и b значитъ найти m такихъ чиселъ, которыя между собою и съ данными составляли бы геометрическую прогрессію. Пусть q будетъ неизвѣстный знаменатель этой прогрессіи; послѣднему члену b предшествуетъ $m+1$ членъ, а потому

$$b = aq^{m+1},\quad \text{откуда}\quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\,.$$

Такимъ образомъ искомая прогрессія будетъ

$$\div\!\div\ a : a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} : \ldots\ldots : b.$$

Примѣръ. Вставить 3 среднихъ геометрич. между 4 и 64. Знаменатель $q = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$; искомые средніе члены суть: 4×2, 4×2^2 и 4×2^3, или 8, 16 и 32.

760. Теорема.—*Если между послѣдовательными членами геометрической прогрессіи вставить одинаковое число среднихъ, то полученныя частныя прогрессіи составятъ одну сплошную прогрессію.*

Пусть данная прогрессія будетъ $\div\!\div\ a : b : c : \ldots\ldots : r : t : u$, и пусть между каждыми двумя послѣдовательными членами вставлено m среднихъ

геометрическихъ; отдѣльныя прогрессіи $\div a : \alpha : \beta : \ldots : \lambda : b$; $\div b : \alpha' : \beta' : \ldots : \lambda' : c$; .... $\div t : \alpha^{(n)} : \ldots : \lambda^{(n)} : u$ имѣютъ соотвѣтственно знаменателей

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}},\ \ldots\ldots,\ \sqrt[m+1]{\frac{u}{t}};$$

но $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\ldots=\frac{u}{t}=q$, гдѣ q—знаменатель данной прогрессіи; слѣд, всѣ эти прогрессіи имѣютъ общаго знаменателя; и какъ послѣдній членъ одной служитъ первымъ членомъ слѣдующей, то всѣ прогрессіи въ совокупности составляютъ одну сплошную прогрессію.

761. Теорема.—*Во всякой геометрической прогрессіи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію двухъ другихъ, равно удаленныхъ отъ крайнихъ.*

Пусть въ прогрессіи $\div a : b : \ldots : x : \ldots : y : \ldots : t : u$ члену x предшествуетъ и за членомъ y слѣдуетъ p членовъ; въ такомъ случаѣ: $x=aq^p$. .... (1). Въ прогрессіи, начинающейся членомъ y и кончающейся членомъ u, имѣемъ $u=yq^p$, откуда $y=\frac{u}{q^p}$ .... (2). Перемноженіе (1) и (2) даетъ $xy=au$, что и т. д.

762. Сумма членовъ конечной геометрической прогрессіи.

Пусть дана прогрессія $\div a : b : c : d : \ldots : r : t : u$, содержащая n членовъ, съ знаменателемъ q; сумму членовъ назовемъ S. По свойству геом. прогр. имѣемъ

$$b=aq,\ c=bq,\ d=cq,\ \ldots,\ t=rq,\ u=tq.$$

Складывая почленно эти равенства, находимъ:

$$b+c+d+\ldots+t+u=(a+b+c+\ldots+r+t)q.$$

Первая часть этого равенства есть сумма S безъ перваго члена a, т. е. $S-a$, выраженіе въ скобкахъ есть сумма членовъ безъ послѣдняго, т. е. $S-u$; слѣд. равенству можно дать видъ

$$S-a=(S-u)q, \quad \text{или} \quad S-a=Sq-uq;$$

рѣшивъ это ур. относительно S, найдемъ

$$S=\frac{uq-a}{q-1} \ldots\ldots\ldots (1)$$

т. е. *чтобы найти сумму членовъ геометрической прогрессіи, нужно: послѣдній членъ умножить на знаменателя, изъ произведенія вычесть первый членъ, и раздѣлить остатокъ на разность между знаменателемъ и единицей.*

Если въ формулѣ (1) замѣнить u его величиною aq^{n-1}, то S приметъ видъ

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Въ этой формѣ справедливость формулы очевидна; въ самомъ дѣлѣ, по закону частнаго отъ дѣленія x^m-a^m на $x-a$, имѣемъ

$$\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\cdot\cdot\cdot\cdot+q+1,$$

а умноживъ обѣ части на a, найдемъ въ первой части формулу (2), а во второй: $a+aq+\cdot\cdot\cdot\cdot+aq^{n-3}+aq^{n-2}+aq^{n-1}$; но эта сумма есть ничто иное какъ сумма членовъ самой прогрессіи.

Другой пріемъ. Называя суммую членовъ прогрессіи буквою S, имѣемъ

$$S=a+b+c+\ldots+r+t+u\ldots\ldots\ldots(3)$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на q, находимъ:

$$Sq=aq+bq+cq+\ldots+rq+tq+uq\ldots\ldots(4)$$

Но, по опредѣленію прогрессіи, $b=aq$, $c=bq$, ..., $t=rq$, $u=tq$; слѣд. (3) можно написать въ видѣ:

$$S=a+aq+bq+\ldots+rq+tq\ldots\ldots\ldots(5)$$

Вычитая (5) изъ (4) замѣчаемъ, что всѣ члены уничтожаются, за исключеніемъ члена uq въ (4) и a въ (5); такъ что

$$Sq-S=uq-a,\quad \text{или}\quad S(q-1)=uq-a,$$

откуда

$$S=\frac{uq-a}{q-1}.$$

Примѣры: I. *Найти сумму 6 членовъ прогрессіи, которой первый членъ*$=7$, *а послѣдній* 700000?

Знаменатель q опредѣляется изъ ур-нія $700000=7\ .\ q^5$, откуда $q=10$; слѣд. $S=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=7\cdot\frac{10^6-1}{10-1}=7\cdot\frac{1000000-1}{10-1}=7\cdot\frac{999999}{9}=777777.$

II. *Найти сумму 10 первыхъ членовъ геометрической прогрессіи, которой первый членъ*$=\frac{1}{2}$, *а знаменатель* $\frac{1}{10}$?

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{10}-1}{\frac{1}{10}-1},$$ или, помноживъ числителя и знам. на (-10^{10}):

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{10^{10}-1}{10^9(10-1)}=\frac{1}{2}\cdot 1,\ 111\ 111\ 111=0,555\ 555\ 555\ 5.$$

Безконечныя геометрическія прогрессіи.

763. Изученіе безконечныхъ геометрическихъ прогрессій требуетъ предварительнаго доказательства слѣдующихъ теоремъ о степеняхъ; къ нимъ присоединяемъ и соотвѣтственныя теоремы о корняхъ.

764. Лемма I.— *Послѣдовательныя цѣлыя положительныя степени положительнаго числа, большаго 1, возрастаютъ съ увеличеніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы больше всякой данной величины.*

Пусть будетъ $a>1$; смыслъ неравенства не измѣнится отъ умноженія неравенства на положительное число; такимъ образомъ послѣдовательно найдемъ:

$$a^2>a,\ a^3>a^2,\ a^4>a^3,\ \text{и т. д., вообще}\ a^{m+1}>a^m;$$

откуда видно, что степени въ самомъ дѣлѣ возрастаютъ съ увеличеніемъ показателя. Но если доказано, что количество идетъ возрастая, то отсюда еще нельзя заключить, что оно можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ: это еще должно быть доказано. Очевидно, будетъ доказано, что a^m м. б. сдѣлано какъ угодно большимъ, если докажемъ, что для показателя m всегда можно найти такую величину, при которой будетъ $a^m > K$, гдѣ K — заданное количество. Пусть a превышаетъ единицу на α, т. е. $a - 1 = \alpha$. Такъ какъ $a > 1$, то умноженіе на a поведетъ къ увеличенію, и получится рядъ неравенствъ

$$\begin{gathered} a - 1 = \alpha \\ a^2 - a > \alpha \\ a^3 - a^2 > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^{m-1} - a^{m-2} > \alpha \\ a^m - a^{m-1} > \alpha, \end{gathered}$$

откуда, складывая, найдемъ

$$a^m - 1 > \alpha + \alpha + \alpha + \ .\ .\ .\ + \alpha + \alpha, \text{ или } a^m - 1 > m\alpha,$$

откуда

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Очевидно отсюда, что a^m будетъ больше K, если будетъ

$$1 + m\alpha > K,$$

откуда

$$m > \frac{K-1}{\alpha};$$

но очевидно, что каково бы ни было α, всегда можно найти для m такое значеніе, которое будетъ больше $\frac{K-1}{\alpha}$.

Примѣръ. — При какомъ значеніи m количество $(1{,}001)^m$ будетъ больше 1000?

При $m > \frac{1000-1}{0{,}001}$, т. е. при $m > 999000$.

765. Лемма II. *Послѣдовательныя цѣлыя положительныя степени числа a, меньшаго 1, идутъ уменьшаясь съ увеличеніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими къ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $a < 1$, получаемъ: $a^2 < a$, $a^3 < a^2$, ..., $a^{m+1} < a^m$, т. е. степени становятся тѣмъ меньше, чѣмъ показатель больше. Затѣмъ, число меньшее 1 можно представить въ видѣ $\frac{1}{1+\alpha}$; желая опредѣлить степень, въ которую нужно возвысить $\frac{1}{1+\alpha}$, чтобы эта степень была меньше заданнаго числа δ, полагаемъ

$$\frac{1}{(1+\alpha)^m} < \delta, \text{ откуда } (1+\alpha)^m > \frac{1}{\delta},$$

а по предыдущей леммѣ, это неравенство всегда м. б. удовлетворено.

766. Лемма III. *Корни цѣлаго положительнаго порядка изъ числа большаго 1 уменьшаются съ возрастаніемъ показателя и могутъ быть*

сдѣланы какъ угодно близкими къ 1, оставаясь, однако же, всегда большими 1, и никогда не дѣлаясь равными ей или меньшими ея.

Пусть $a > 1$; надо доказать, что

1. $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}$; . . . . ; $\sqrt[m+1]{a} < \sqrt[m]{a}$.

2. $\sqrt[m]{a}$ не можетъ быть ни $=$, ни < 1.

3. Разность $\sqrt[m]{a} - 1$ м. б. сдѣлана $<$ всякой, какъ угодно малой, величины.

Для доказательства первой части теоремы приведемъ корни $\sqrt[m+1]{a}$ и $\sqrt[m]{a}$ къ общему показателю; найдемъ: $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$, и $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$. По первой леммѣ, $a^{m+1} > a^m$, а слѣд. и $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}} > \sqrt[m(m+1)]{a^m}$ или $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m+1]{a}$.

Затѣмъ, положивъ $\sqrt[m]{a} = 1$ и возвысивъ обѣ части въ m-ую степень, нашли-бы $a = 1$, что противно условію $a > 1$. Допустивъ, что $\sqrt[m]{a} < 1$, нашли бы такимъ же образомъ: $a < 1$, что опять противорѣчимъ условію. Итакъ, $\sqrt[m]{a} > 1$.

Докажемъ теперь, что для m всегда можно найти такое значеніе, при которомъ $\sqrt[m]{a}$ будетъ какъ угодно мало разниться отъ 1. Обозначивъ буквою δ очень малое положительное число, будемъ имѣть биномъ $1 + \delta$ весьма мало разнящійся отъ 1, но все таки большій ея. Въ леммѣ I мы доказали, что всегда можно найти такое значеніе для m, при которомъ будетъ $(1 + \delta)^m > K$, гдѣ K какъ угодно велико; слѣд. какую бы величину ни имѣло a, всегда можно дать m значеніе, при которомъ будетъ $(1 + \delta)^m > a$, откуда $1 + \delta > \sqrt[m]{a}$. Съ другой стороны доказано, что $\sqrt[m]{a} > 1$, такъ-что $\sqrt[m]{a}$ заключается между двумя количествами 1 и $1 + \delta$, разность между которыми δ м. б. какъ угодно мала; а потому и разность $\sqrt[m]{a} - 1$ тѣмъ болѣе м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

767. Лемма IV. *Корни цѣлаго положительнаго порядка изъ числа меньшаго 1 увеличиваются съ увеличеніемъ показателя, оставаясь всегда < 1, къ которой они могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими.*

Для доказательства, что $\sqrt[m+1]{a} > \sqrt[m]{a}$, приведемъ эти корни къ общему показателю; найдемъ: $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$, $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$. Но $a < 1$, слѣд. $a^m > a^{m+1}$ (лем. II), а потому $\sqrt[m(m+1)]{a^m}$ или $\sqrt[m+1]{a}$ больше $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$ или $\sqrt[m]{a}$: т. е. корни увеличиваются съ увеличеніемъ показателя. — Затѣмъ, допустивъ, что $\sqrt[m]{a} = 1$, нашли бы, что $a = 1$; допустивъ, что $\sqrt[m]{a} > 1$, нашли-бы, что $a > 1$: тотъ и другой выводъ противорѣчитъ условію $a < 1$. — Но, оставаясь всегда < 1, $\sqrt[m]{a}$ м. б. сдѣланъ какъ угодно близкимъ къ 1. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ буквою δ какъ угодно малое положит. количество, будемъ имѣть: $1 - \delta < 1$. Поэтому можно выбрать для m такое значеніе, при которомъ, въ силу леммы II, будетъ $(1 - \delta)^m < a$, откуда $1 - \delta < \sqrt[m]{a}$, или $1 - \sqrt[m]{a} < \delta$, какъ бы δ ни было мало.

768. Теорема. *Въ безконечно возрастающей геометрической прогрессіи абсолютная величина членовъ приближается къ ∞, а въ убывающей—къ 0.*

Будемъ разсматривать абсолютныя величины членовъ прогрессіи, (условившись обозначать абсол. значеніе количества x знакомъ $[x]$):

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ldots : aq^n : \ldots\quad\ldots$$

Пусть $[q]$ будетъ > 1. Въ силу леммы I, съ приближеніемъ n къ ∞ и $[q^n]$ приближается къ ∞, поэтому для n всегда можетъ быть найдено такое значеніе, при которомъ будетъ $[q^n] > \left[\frac{A}{a}\right]$, гдѣ A какъ угодно большое число; а изъ этого неравенства: $[aq^n] > [A]$, т. е. съ приближеніемъ n къ ∞, абсолютная величина членовъ прогрессіи приближается къ ∞.

Если теперь q будетъ положительно, то и q^n будетъ положительно, слѣд. при $a > 0$ всѣ члены прогрессіи положительны, а потому величина ихъ приближается къ $+\infty$; при $a < 0$, они отрицательны и приближаются къ $-\infty$.

Пусть, затѣмъ, будетъ $[q] < 1$; на основаніи леммы II, при возрастаніи n до ∞, $[q^n]$ приближается къ 0, поэтому всегда можно дать n такое значеніе, что будетъ $[q^n] < \left[\frac{\alpha}{a}\right]$, гдѣ α какъ угодно мало; а отсюда $[aq^n] < \alpha$, т. е. $[aq^n]$, съ приближеніемъ n къ ∞, приближается къ 0.

Если, теперь, $q > 0$, то и $q^n > 0$, слѣд.: если $a > 0$, то члены прогрессіи приближаются къ 0, оставаясь положительными; при $a < 0$ они приближаются къ 0, будучи отрицательны.

769. Теорема. *Сумма членовъ возрастающей прогрессіи, при неограниченномъ возрастаніи числа членовъ, приближается къ* $\pm\infty$, *а убывающей—къ постоянной величинѣ* $\frac{a}{1-q}$.

Для суммы n членовъ мы имѣемъ формулу $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$, которую можно представить въ видѣ

$$S = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

I. $q > 1$. — Первый членъ, какъ функція n, измѣняется съ измѣненіемъ числа членовъ, второй же, не содержа n, есть количество постоянное; измѣненіе суммы зависитъ, поэтому, отъ перваго члена. Мы доказали, что въ возрастающей прогрессіи съ положительнымъ знаменателемъ, величина aq^n, съ приближеніемъ n къ ∞, приближается къ $+\infty$ при $a > 0$, и къ $-\infty$ при $a < 0$; а потому и первый членъ, знаменатель котораго конеченъ и положителенъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и S, приближается къ $+\infty$ при $a > 0$, и къ $-\infty$ при $a < 0$.

II. Если $q < 1$, то при $n = \infty$ количество aq^n, а сл. и $\frac{aq^n}{q-1}$ имѣетъ предѣломъ 0, а слѣд. сумма S имѣетъ предѣломъ $-\frac{a}{q-1}$ или $\frac{a}{1-q}$. Итакъ, при $q < 1$,

$$\lim S = \frac{a}{1-q},$$

т. е. *предѣлъ суммы членовъ безконечно — убывающей прогрессіи равнѣ первому члену, дѣленному на 1 безъ знаменателя прогрессіи.*

Это предложеніе можно доказать обратнымъ способомъ, раздѣливъ a на $1-q$: частное будетъ имѣть неограниченное число членовъ, ибо одночленъ не дѣлится безъ остатка на многочленъ, а члены его будутъ слѣдовать закону геометрической прогрессіи. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{array}{l|l} a & 1-q \\ \hline & a+aq+aq^2+aq^3+\ \dots \\ +aq & \\ \quad +aq^2 & \\ \qquad +aq^3+ & \\ \qquad \dots & \end{array}$$

III. Пусть $q=+1$. Взявъ конечную (объ n членахъ) прогрессію, имѣемъ: $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$; положивъ $q=+1$, найдемъ $S=\frac{0}{0}$.

Для раскрытія неопредѣленности, замѣчаемъ, что

$$q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ \dots\ +q+1),\ \text{слѣд.}$$

$$S=\frac{a(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ \dots\ +q+1)}{q-1};$$

отсюда видно, что неопредѣленность — кажущаяся и зависитъ отъ присутствія въ числ. и знамен. общаго множителя $q-1$, обращающагося въ 0 при $q=1$. Сокративъ на $q-1$, и положивъ потомъ $q=1$, получимъ:

$$S=a(\underbrace{1+1+1+\ \dots\ +1}_{n\ \text{разъ.}})=an.$$

Этотъ результатъ можно было предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ, при $q=1$ сумма $a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}$ обращается въ $a+a+a+\dots+a$, или въ an.

Если теперь положить $n=\infty$, то будетъ: $S=a\,.\,\infty$, т. е. $S=+\infty$ при $a>0$, и $S=-\infty$ при $a<0$.

IV. q — *отрицательное*. — Если въ равенствѣ

$$a+aq+aq^2+\ \dots\ +aq^{n-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}$$

перемѣнить q на $-q$, отъ чего только нечетныя степени q перемѣнятъ знакъ, то получится выраженіе для суммы прогрессіи съ отрицательнымъ знаменателемъ:

$$a-aq+aq^2-aq^3+\ \dots\ \pm aq^{n-1}=\frac{\pm aq^n-a}{-q-1}=\mp\frac{aq^n}{q+1}+\frac{a}{q+1}.$$

Заключаемъ, что:

1) При q большемъ 1, по абсолютной величинѣ, и при $n=\infty$ членъ $\mp\frac{aq^n}{q+1}=\pm\infty$, слѣд. и $S=\mp\infty$.

2) При $q<1$, по абсолютной величинѣ, и при $n=\infty$, будетъ $aq^n=0$, и слѣд. $S=\frac{a}{1+q}$.

3) При $q=1$, по абс. вел., $S=\frac{\mp a+a}{2}$, и слѣ. S равно или 0 (при четномъ числѣ членовъ), или a (при нечетномъ числѣ членовъ). Въ этомъ случаѣ прогрессія представляетъ *рядъ колеблющійся.*

770. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ геометрическимъ прогрессіямъ.

Такъ какъ между пятью количествами a, u, n, q, s фигурирующими во всякой геометрич. прогрессіи, существуетъ только 2 различныхъ соотношенія

$$u=aq^{n-1} \ldots \ldots (1) \qquad S=\frac{uq-a}{q-1} \ldots \ldots (2)$$

то, какъ скоро даны 3 изъ этихъ количествъ, остальныя опредѣлятся изъ указанныхъ ур-ній. Какъ и въ случаѣ ариѳметической прогрессіи, можно предложить здѣсь 10 задачъ, изъ которыхъ рѣшимъ только 2 слѣдующія:

Задача I.—*Вычислить* a и u *по даннымъ* s, q и n.

Исключая u изъ ур-ній (1) и (2), находимъ:

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}, \quad \text{откуда} \quad a=S\times\frac{q-1}{q^n-1};$$

подставляя эту величину въ ур. (2), получаемъ:

$$u=S\cdot\frac{q-1}{q^n-1}\cdot q^{n-1}.$$

Задача II.—*Вычислить* q и s, *зная* a, u, n.

Изъ (1) находимъ:

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}};$$

подстановка во (2) даетъ:

$$S=\frac{u\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}-a}{\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}-1}=\frac{u\sqrt[n-1]{u}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u}-\sqrt[n-1]{a}}$$

Задача III.—*Найти женератрису данной періодической дроби.*

1. Пусть чистая періодическая дробь $f=0{,}3737\ldots$; ее можно представить въ видѣ

$$f=\frac{37}{100}+\frac{37}{100^2}+\frac{37}{100^3}+\ldots$$

Слѣд. f есть предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи, которой $q=\frac{1}{100}$ и $a=\frac{37}{100}$. Потому

$$f=\frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{37}{99};$$

результатъ, извѣстный изъ ариѳметики.

2. Возьмемъ смѣшанную періодическую дробь $f = 0,32(745)$. Ее можно написать въ формѣ

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000} + \frac{745}{100 \times 1000^2} + \frac{745}{100 \times 1000^3} + \cdots$$
$$= \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000}\left[1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right]$$

Рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогр., въ которой $a = 1$, $q = \frac{1}{1000}$; рядъ этотъ равенъ, слѣдовательно, $\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1000}{999}$; а потому

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 999} = \frac{32 \times 999 + 745}{1000 \times 999}.$$

Замѣнивъ въ числителѣ 999 разностью 1000—1, находимъ

$$f = \frac{32000 - 32 + 745}{100 \times 999} = \frac{32745 - 32}{99900},$$

откуда прямо слѣдуетъ извѣстное изъ ариѳметики правило.

Задача IV. *Часовая и минутная стрѣлки показываютъ полдень. Въ которомъ часу встрѣтятся они снова?*

Примемъ за единицу времени часъ, а за 1 длины окружность циферблата. Черезъ часъ минутная стрѣлка возвратится къ цифрѣ XII, а часовая пройдетъ $\frac{1}{12}$ циферблата; слѣд. минутная стрѣлка должна пройти эту $\frac{1}{12}$ циферблата, но въ это время часовая, движущаяся въ 12 разъ медленнѣе минутной, пройдетъ $\frac{1}{12}$ отъ $\frac{1}{12}$ циферблата, или $\frac{1}{12^2}$ его. Слѣд. минутная стрѣлка должна пройти эту послѣднюю долю циферблата, но въ теченіи этого времени часовая пройдетъ еще $\frac{1}{12^3}$; и т. д. Итакъ, минутная стрѣлка, чтобы догнать часовую, должна отъ полудня пройти путь: $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \cdots$, представляющійся подъ видомъ безконечно-убывающей геом. прогрессіи, первый членъ которой $= 1$, а знаменатель $\frac{1}{12}$. Предѣлъ этой суммы есть $\frac{1}{1 - \frac{1}{12}}$, или $\frac{12}{11}$.

Такъ какъ минутная стрѣлка единицу пути (циферблатъ) проходитъ въ 1 часъ, то $\frac{12}{11}$ этого пути пройдетъ въ $1^{ч.} \times \frac{12}{11} = 1^{ч.}\, 5^{м.}\, 27^{с.}\, \frac{3}{11}$.

Задача V. *Соединяя средины сторонъ квадрата, получаютъ вписанный квадратъ; въ этотъ квадратъ, соединяя средины его сторонъ, вписываютъ новый квадратъ, и т. д. Предполагая, что эта операція продолжается неограниченное число разъ, найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ квадратовъ.*

Пусть сторона даннаго квадрата будетъ a; площади послѣдовательныхъ квадратовъ будутъ: $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \ldots$ Сумма ихъ будетъ

$$S = a^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right).$$

Предѣлъ суммы прогрессіи въ скобкахъ $= \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$; слѣд. $S = 2a^2$.

Задача VI.—*Число 195 раздѣлить на 3 части, которыя составляли бы геометрическую прогрессію, которой третій членъ былъ бы больше перваго на 120.*

Пусть первый членъ будетъ x, а знаменатель прогрессіи q; имѣемъ два ур-нія

$$x + xq + xq^2 = 195, \qquad xq^2 - x = 120,$$

которыя можно представить въ видѣ

$$x(1 + q + q^2) = 195, \qquad x(q^2 - 1) = 120.$$

Раздѣливъ первое на второе, исключимъ x, и получимъ квадратное уравненіе $5q^2 - 8q - 21 = 0$, откуда: $q' = 3$, $q'' = -\frac{7}{5}$. Подставляя вмѣсто q въ ур. $x(q^2 - 1) = 120$ сперва 3, потомъ $-\frac{7}{5}$, найдемъ: $x' = 15$, $x'' = 125$. Искомыя рѣшенія будутъ:

$$\div\div\ 15 : 45 : 135; \qquad \div\div\ 125 : -175 : +245.$$

771. Задачи.—1. Найти послѣдній членъ и сумму членовъ прогрессій:

a) $\div\div\ 56 : 28 : 14 : \ldots$ (12 чл.); b) $\div\div\ 2 : \frac{2}{7} : \ldots$ (10 чл.);

c) $\div\div\ 3 : 2 : \frac{4}{3} : \ldots$ (n чл.); d) $\div\div\ \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{3}{8} : \ldots$ (n чл.)

e) $\div\div\ m^3 : m^3n : m^3n^2 \ldots$ (7 чл.); f) $\div\div\ a : a(1+x) : a(1+x)^2 \ldots$ (8 чл.)

g) $\div\div\ a : \frac{a}{a^2-1} : \frac{a}{(a^2-1)^2}$: (10 чл.); h) $\div\div\ b(1+x)^{n-1} : b(1+x)^{n-2} : \ldots$ (n чл.)

2. Указать порядокъ члена, превосходящаго 1000, въ прогрессіи

$$\div\div\ 1 : 1{,}01 : 1{,}01^2 : 1{,}01^3 : \ldots$$

3. Указать порядокъ члена прогрессіи $\div\div\ \frac{5}{4} : \frac{25}{16} : \frac{125}{64} : \ldots$, который навѣрное больше 10.

4. Указать порядокъ члена въ ряду $\div\div\ 1 : \frac{11}{12} : \left(\frac{11}{12}\right)^2 : \ldots$, навѣрное меньшаго 0,001.

5. Вставить: a) между 3 и $\frac{16}{2187}$ три среднихъ геометрическихъ; b) между 18 и 13122 пять среднихъ геометрическихъ.

6. Четвертый членъ геом. прогр. есть 9, седьмой $= 15$; найти прогрессію?

7. Даны члены M и N порядковъ m и n въ нѣкоторой геометрической прогрессіи. Показать, что членъ P порядка p равенъ $\sqrt[m-n]{\dfrac{M^{p-n}}{N^{p-m}}}$.

8. Если A и B суть члены порядковъ $p+k$ и $p-k$ нѣкоторой геометрич. прогрессіи, то показать, что

$$p\text{-ый членъ} = \sqrt{AB}, \text{ а } k\text{-ый чл.} = A\sqrt[2k]{\left(\frac{B}{A}\right)^p}.$$

9. Найти предѣлъ суммы каждой изъ слѣдующихъ безконечно-убывающихъ прогрессій:

$$\div\frac{1}{4} : -\frac{1}{8} : +\frac{1}{16} : \ . \quad . \quad ; \qquad \div\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} : \frac{2}{2-\sqrt{2}} : \frac{1}{2} : \ldots .$$

10. Углы прямоугольнаго треугольника составляютъ геометрическую прогрессію; вычислить ихъ съ точностью до $1''$.

11. Показать, что если въ геометрич. прог. вычесть каждый членъ изъ предыдущаго, то полученныя разности составятъ также геометрич. прогрессію.

12. Доказать, что въ геом. пр. сумма нечетнаго числа членовъ всегда дѣлитъ сумму ихъ квадратовъ.

13. Сумма членовъ безконечно-убывающей г. п. вдвое больше суммы ея первыхъ n членовъ; показать, что знаменатель $=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$.

14. Если a, b, c, d . . . . суть $n+1$ количествъ, составляющихъ г. п., то показать, что обратныя количествъ a^2-b, b^2-c^2, ... составляютъ также г. п., и что ихъ сумма $=$

$$\frac{1}{b^{2n-2}} \times \frac{a^{2n}-b^{2n}}{(a^2-b^2)^2}.$$

15. Показать, что если среднее ариѳм. между a и b вдвое больше средняго геометрич. между этими же числами, то

$$\frac{a}{b} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

16. Показать, что если второй членъ ариѳм. прогр. есть среднее пропорц. между первымъ и четвертымъ, то шестой будетъ среднимъ пропорціональнымъ между четвертымъ и девятымъ.

17. Если S_n означаетъ сумму n первыхъ членовъ г. п., то показать, что

$$S_1+S_2+S_3+\ldots\ldots+S_n = \frac{aq(q^n-1)}{(q-1)^2} - \frac{na}{q-1}.$$

18. Показать, что въ безконечно-убывающей г. п. каждый членъ всегда находится въ постоянномъ отношеніи къ суммѣ всѣхъ слѣдующихъ членовъ.—Каковъ долженъ быть знаменатель, чтобы каждый членъ равнялся p разъ взятой суммѣ всѣхъ слѣдующихъ?

19. p геометрическихъ прогрессій имѣютъ общаго знамен. q. Первые члены ихъ находятся въ ариѳметической прогрессіи a, $2a$, $3a$, . . . , pa. Если въ каждой изъ p данныхъ прогрессій назовемъ суммы первыхъ p членовъ соотвѣтственно буквами S_1, S_2, S_3, . . . ,S_p, то доказать, что

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_p = \frac{ap(p+1)}{2} \times \frac{q^p-1}{q-1}.$$

20. p безконечно-убывающихъ г. п. имѣютъ первыми членами 1; а знаменателями соотвѣтственно: q, q^2, q^3, ... , q^p. Если S_1, S_2, S_3, ... S_p суть предѣлъ суммъ членовъ этихъ прогрессій, то доказать, что

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{S^p} = p - \frac{q(1-q^p)}{1-q}.$$

21. Если S_1 означаетъ предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей г. п. съ знаменателемъ q, а S_2 предѣлъ суммы квадратовъ членовъ той же прогрессіи, то: $S_2(1+q)=S_1^2(1-q)$.

22. Пусть $S=1+Q+Q^2+Q^3+\ldots\ldots$

и $s=1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots$

будутъ суммы членовъ двухъ безконечно-убывающихъ прогрессій. Показать, что предѣлъ суммы $1+Qq+Q^2q^2+Q^3q^3+\ldots\ldots$ равенъ $\frac{Ss}{S+s-1}$.

23. Если положить

$S=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\ldots$ до безк., $S'=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\frac{9}{16}-\ldots$ до безк.,

то $S=27S'$.

24. Пусть a, q, и s', означаютъ соотвѣтственно-первый членъ, знаменателя и предѣлъ суммы безконечно-убывающей г. п; $S'q$, q и S'' первый членъ, знам., и предѣлъ суммы второй прогрессіи; $S''\,q$, q и S'''—первый членъ, знам. и предѣлъ суммы третьей; и т. д. Полагая, что $q<\frac{1}{2}$, доказать:

1°) что количества a, $S'q$, $S''q$, $S'''q$, . . . образуютъ убывающую геометрич. прогр.; 2°) вычислить предѣлъ суммы членовъ этой прогрессіи, полагая что она безконечна.

25. Соединяютъ средины A', B', C' сторонъ треугольника ABC; затѣмъ средины сторонъ треуг-ка $A'B'C'$, и т. д. до безконечности. Доказать, что предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ треугольниковъ (включая и данный) равенъ $\frac{4}{3}S$, гдѣ S площадь даннаго $\triangle$-ка.

26. Та-же задача, замѣняя треугольникъ параллелограммомъ площади m^2.

27. Въ кругъ радіуса R вписываютъ квадратъ; въ этотъ квадратъ вписываютъ кругъ, въ который снова вписываютъ квадратъ и т. д. до безконечности. Найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ квадратовъ.

28. Таже задача, замѣняя круги шарами, а квадраты кубами.

29. Въ шаръ радіуса R вписываютъ равнобочный цилиндръ, въ этотъ цилиндръ вписываютъ шаръ и т. д. Найти: 1) предѣлъ суммы поверхностей всѣхъ шаровъ; 2) предѣлъ суммы ихъ объемовъ.

30. Данъ $\triangle$; строятъ второй $\triangle$, имѣющій сторонами медіалы перваго; и т. д. до безконечности. Найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ треугольниковъ.

31. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC опускаютъ высоту AD на гипотенузу BC; затѣмъ проводятъ перпендикуляръ DE на AC, затѣмъ EF на BC, и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ длины ломаной ADEF . . . ? Указать построеніе этого предѣла?

32. Въ правильный $\triangle$ ABC (сторона $=a$) вписываютъ кругъ, къ которому проводятъ касательную $A'B'$ параллельно AB. Въ $\triangle$ $CA'B'$ вписываютъ второй кругъ и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ круговъ, т. о. построенныхъ.

33. Данъ прямой круглый конусъ, котораго сѣченіе по оси представляетъ правильный $\triangle$ со стороною $=a$. Въ конусъ вписываютъ шаръ, къ которому проводятъ касательную плоск. параллельно основанію конуса; въ полученный малый конусъ снова вписываютъ шаръ, и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммы объемовъ всѣхъ этихъ шаровъ?

34. Въ правильный △ вписываютъ кругъ; въ этотъ кругъ вписываютъ правильный △, въ который снова вписываютъ кругъ, и т. д. до безконечности. Найти: 1) предѣлъ суммы сторонъ всѣхъ полученныхъ треугольниковъ; 2) предѣлъ суммы радіусовъ, всѣхъ круговъ: 3) предѣлъ суммы площадей всѣхъ круговъ; 4) пред. суммы площадей всѣхъ треуг-въ; 5) обернувъ каждый △ около одной изъ его высотъ, найти предѣлъ суммы всѣхъ полученныхъ объемовъ.

35. Даны два равные полукруга, извнѣ касающіеся другъ къ другу. Къ нимъ проводятъ общую касательную и вписываютъ первый кругъ, касательный къ этой прямой и къ даннымъ кругамъ; затѣмъ второй кругъ, касательный къ этому кругу и къ обоимъ даннымъ, и т. д. Найти сумму радіусовъ всѣхъ этихъ круговъ.

Вывести отсюда тождество

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\cdots=1,$$

гдѣ число дробей безконечно.

36. Построить треугольникъ ABC, зная его высоту $AD=h$, и зная, что эта высота, стороны AB, AC, ее заключающія, и третья сторона BC образуютъ, въ сказанномъ порядкѣ, геометрическую прогрессію.

37. Найти три числа въ г. п., зная ихъ сумму 126 и произведеніе 13824.

38. Найти четыре числа, составляющія г. п., зная ихъ сумму 40 и сумму ихъ квадратовъ 820.

39. Найти четыре числа, образующія г. п., зная, что ихъ сумма $=30$, а отношеніе суммы двухъ среднихъ къ послѣднему равно $\frac{3}{4}$.

40. Доказать, что корни возвратнаго ур-нія

$$x^4-bx^3+ax^2-bx+1=0$$

могутъ составлять г. п. При какомъ соотношеніи между a и b это имѣетъ мѣсто?

41. Три цѣлыя числа образуютъ г. п.; если второе увеличить на 8, прогрессія сдѣлается ариѳметическою; но если послѣ этого увеличить послѣдній членъ на 64, прогрессія снова сдѣлается геометрическою. Найти эти числа?

42. Доказать тождество

$$x^{4n+2}+y^{4n+2}=[x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2+2x^{2n-3}y^4-\ldots\pm 2xy^{2n}]^2$$
$$+[y^{2n+1}-2y^{2n-1}x^2+2y^{2n-3}x^4-\ldots\pm 2yx^{2n}]^2.$$

ГЛАВА XLVI.

О рядахъ вообще; опредѣленія. — Суммированіе конечныхъ рядовъ. — Суммированіе безконечныхъ рядовъ.—О сходимости рядовъ.—Перемноженіе рядовъ.—Задачи.

772. Опредѣленія. *Рядомъ* называется рядъ количествъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предшествующаго по одному и тому же закону. Такъ, ариѳметическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждое количество составляется изъ предшествующаго приложеніемъ къ нему постояннаго количества.

Геометрическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждый членъ образуется изъ предшествующаго умноженіемъ на постоянное количество.

Количества, составляющія рядъ, называются *членами* ряда; ихъ обозначаютъ въ общемъ видѣ такъ: u_1, u_2, u_3, ... , u_n, . . Членъ, которому предшествуетъ $n-1$ членовъ, т. е. n—ый членъ, u_n, называется *общимъ членомъ* ряда. Давая въ алгебраическомъ выраженіи общаго члена u_n буквѣ n значенія 1, 2, 3, ... получимъ послѣдовательно всѣ члены ряда, начиная съ перваго.

Сумму n членовъ ряда обозначаютъ буквою S_n; т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Рядъ называется *конечнымъ*, если онъ состоитъ изъ конечнаго числа членовъ; и *безконечнымъ*, если число членовъ безконечно. Если сумма n членовъ ряда, по мѣрѣ приближенія n къ ∞, стремится къ опредѣленному конечному предѣлу S, то безконечный рядъ называется *сходящимся*, а S его *суммою*; если же сумма S_n, по мѣрѣ приближенія n къ ∞, сама приближается къ безконечности, то безконечный рядъ наз. *расходящимся;* само собою разумѣется, что о суммѣ такого ряда не можетъ быть и рѣчи. Можетъ, наконецъ, случиться, что по мѣрѣ приближенія n къ ∞, сумма ряда не возрастаетъ до ∞, но и не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу; такіе ряды называютъ *полусходящимися* или *колеблющимися;* ихъ причисляютъ къ расходящимся.

Такъ, мы видѣли, что безконечная геометрическая прогрессія, которой знаменатель q есть положительная или отрицательная правильная дробь $(-1 < q < +1)$, имѣетъ конечную и опредѣленную сумму $\frac{a}{1-q}$; такая прогрессія представляетъ, поэтому, примѣръ *сходящагося* ряда. Если же знаменатель безк. геом. прогрессіи, по абсолютной величинѣ, больше 1, т. е. если $q > +1$, или $q < -1$, то сумма прогрессіи будетъ равна $\pm\infty$, и сл. прогрессія представляетъ въ этомъ случаѣ рядъ *расходящійся*. При $q = +1$, прогрессія также есть рядъ расходящійся. Наконецъ, если $q = -1$, то прогрессія беретъ видъ

$$\div\div\ a : -a : +a : -a : \ldots$$

Сумма ея въ этомъ случаѣ равна или 0, или a, смотря по тому, беремъ ли четное, или нечетное число членовъ; такъ что, по мѣрѣ приближенія n къ ∞, сумма членовъ не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу; однимъ словомъ, при $q=-1$, прогрессія есть рядъ *колеблющійся.*

Одинъ изъ важнѣйшихъ вопросовъ, представляющихся въ теоріи рядовъ, относится къ суммированію рядовъ. *Суммировать рядъ* значитъ найти сумму его членовъ, не вычисляя въ отдѣльности каждаго члена. Для рѣшенія этого вопроса не существуетъ общихъ правилъ, и самая задача возможна лишь въ исключительныхъ случаяхъ. Въ предшествующихъ главахъ мы имѣли примѣры суммированія членовъ ариѳметической и геометрической прогрессіи и одинаковыхъ степеней членовъ первой. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ.

773. Суммированіе конечныхъ рядовъ.—Когда рядъ разлагается на прогрессіи, то формулы суммы прогрессій и дадутъ возможность суммировать рядъ.

Примѣръ I.—*Найти сумму n членовъ ряда*

$$6 + 66 + 666 + 6666 + 66666 + \ldots$$

1-й членъ $= 6 \times 1$

2-й „ $= 6 \times 10 + 6$

3-й „ $= 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$

4-й „ $= 6 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$

. . . .

n-й членъ $= 6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + 6 \times 10^{n-3} + \ldots + 6 \times 10 + 6$

Суммируя вертикальные столбцы, какъ геометрическія прогрессіи, находимъ

$$S = \frac{6(10^n - 1)}{10-1} + \frac{6(10^{n-1} - 1)}{10-1} + \frac{6(10^{n-2} - 1)}{10-1} + \ldots + \frac{6(10-1)}{10-1}$$

$$= \frac{6}{10-1}[10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10] - \frac{6n}{10-1}$$

$$= \frac{60}{(10-1)^2} \cdot (10^n - 1) - \frac{6n}{10-1}.$$

Ряды геометрическіе. — Пусть даны числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ Вычтя каждое число изъ слѣдующаго за нимъ, получимъ числа

$$\beta - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \delta - \gamma,\ \varepsilon - \delta, \ldots$$

называемыя *первыми разностями* данныхъ чиселъ. Обозначая эти разности буквами $\beta', \gamma', \delta', \ldots$, вычтемъ каждое число изъ слѣдующаго за нимъ; найдемъ

$$\gamma' - \beta',\ \delta' - \gamma',\ \varepsilon' - \delta', \ldots$$

Числа эти называются *вторыми разностями* данныхъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Обозначая эти новыя разности буквами $\gamma'', \delta'', \varepsilon'', \ldots$ составимъ *третьи разности:*

$$\delta'' - \gamma'',\ \varepsilon'' - \delta'', \ldots$$

и т. д. Если первыя разности $\beta - \alpha$, $\gamma - \beta, \ldots$ *постоянны*, то говорятъ, что *числа* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *образуютъ прогрессію перваго порядка*: таковы прогрессіи ариѳметическія. Если только вторыя разности дѣлаются постоянными, прогрессія называется—*втораго порядка*. Вообще, *прогрессіей m-го порядка* называютъ рядъ чиселъ, которыхъ m-ыя разности постоянны.

Напр., числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 образуютъ прогрессію 3-го порядка, потому что третьи разности постоянны. Въ самомъ дѣлѣ:

Первыя разности суть 3, 6, 10, 15, 21, 28;
вторыя разности 3, 4, 5, 6, 7;
третьи разности . . . . 1, 1, 1, 1.

Геометрическимъ рядомъ называютъ рядъ чиселъ, получаемыхъ отъ почленнаго перемноженія геометрической прогрессіи на прогрессію опредѣленнаго порядка.

Примѣръ II.—*Суммировать n членовъ ряда*

$$S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \ldots + na^{n-1} \ldots \ldots \quad (1)$$

Это есть рядъ геометрическій, полученный отъ почленнаго перемноженія геомеческой прогрессіи $1, a, a^2, a^3, \ldots$ на прогрессію 1-го порядка $1, 2, 3, 4, \ldots$

Помноживъ обѣ части равенства (1) на a, имѣемъ

$$aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + \ldots + (n-1)a^{n-1} + na^n \ldots \quad (2)$$

Вычтя изъ (2) равенство (1), имѣемъ:

$$(a-1)S = -[1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{n-1}] + na^n,$$

или

$$(a-1)S = na^n - \frac{a^n - 1}{a-1},$$

откуда

$$S = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2} \ldots \ldots \quad (3)$$

Приложеніе.—Положивъ $a = -1$ въ предложенномъ рядѣ, имѣемъ

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots \pm n.$$

Формула (3) прямо даетъ

$$S=\pm\frac{n}{2}+\frac{(1\pm1)}{4},$$

причемъ верхній знакъ относится къ случаю n нечетнаго, нижній къ случаю n четнаго.

Примѣръ III. *Суммировать рядъ* (n членовъ):

$$S=1+3a+6a^2+10a^3+\ldots\ldots+\frac{n}{2}(n+1)a^{n-1}.$$

Умноживъ обѣ части на a и вычтя предложенный рядъ, имѣемъ

$$(a-1)S=\frac{n}{2}(n+1)a^n-[1+2a+3a^2+4a^3+\ldots\ldots+na^{n-1}]\ \ldots\ldots (1)$$

Положивъ $S'=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots\ldots+na^{n-1}$, по предыдущему имѣемъ $S'=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. Замѣнивъ въ (1) S' его величиною, находимъ

$$(a-1)S=\frac{n}{2}(n+1)a^n-\frac{na^n}{a-1}+\frac{a^n-1}{(a-1)^2},$$

откуда

$$S=\frac{n(n+1)a^n}{2(a-1)}-\frac{2na^n}{2(a-1)^2}+\frac{2(a^n-1)}{2(a-1)^3}.$$

Приложеніе.—Положивъ $a=-1$, получимъ

$$S=1-3+6-10+15-\ldots\ldots\pm\frac{n}{2}(n+1),$$

и формула суммы даетъ для этого ряда

$$S=\frac{\pm n(n+1)}{4}\pm\frac{n}{4}+\frac{(1\pm1)}{8}.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что всегда можно найти сумму даннаго числа членовъ геометрическаго ряда порядка m, полагая, что знаменатель геометрической прогрессіи есть a^r.

Если всѣ члены положительны, достаточно вычесть сумму S этого ряда изъ произведенія $a^r.S$; остатокъ $(a^r-1)S$ будетъ содержать новый геометрическій рядъ S' порядка $m-1$. Вычтя эту сумму S' изъ произведенія a^rS', получимъ остатокъ $(a^r-1)S'$, который будетъ содержать новый геометрическій рядъ S'' порядка $m-2$. Продолжаютъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока дойдутъ до геом. ряда, котораго разности постоянны, т. е. до геометрической прогрессіи въ собственномъ смыслѣ, сумма которой извѣстна. Это дастъ возможность опредѣлить сумму S'' ряда перваго порядка, а слѣд. сумму S' втораго порядка и, наконецъ, S.

Приводимъ еще примѣры суммированія нѣкоторыхъ рядовъ.

Примѣръ IV.—*Суммировать* n *членовъ ряда*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Замѣтивъ, что n-ый членъ м. б. представленъ въ видѣ

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

полагаемъ въ этомъ равенствѣ $n=1, 2, 3, \ldots\ldots, n$; такимъ образомъ всѣ члены разложимъ на разности, и дадимъ ряду видъ:

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Замѣчая, что второй членъ каждой разности уничтожается съ первымъ членомъ слѣдующей, найдемъ, что останутся только крайніе члены; а потому

$$S = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Примѣръ V. — *Найти сумму n членовъ ряда*

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Попытаемся разложить общій членъ на 2 члена, употребляя для этого способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; для этого полагаемъ тождество

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{B}{(n+1)(n+2)},$$

въ которомъ A и B независятъ отъ n. Освободивъ отъ знаменателя, получаемъ тождество $1 = (n+2)A + nB$, или

$$(A+B)n + (2A-1) = 0, \quad \text{откуда:} \quad A = \frac{1}{2} \text{ и } B = -\frac{1}{2} \quad \text{Слѣд.}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, представимъ каждый членъ въ формѣ разности и дадимъ ряду видъ:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right] + \ldots + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

откуда, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, имѣемъ:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

Примѣръ VI. — *Суммировать n членовъ*

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

Общій членъ $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right]$. Полагая послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, дадимъ первому члену видъ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right]$, второму видъ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right]$, третьему видъ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]$, и т. д. Сумма ряда будетъ

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right].$$

Члены, начиная съ $\frac{1}{3}$, до $\frac{1}{n}$, взаимно уничтожаются; такъ-что

$$S = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right].$$

Примѣръ VII. — *Дана ариѳметическая прогрессія съ разностью r:*

$$\div a.b.c.d\ldots\ldots h.k.l$$

1. *Найти сумму* $\frac{1}{a\,.\,b}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\cdots\cdots\frac{1}{hk}+\frac{1}{kl}$, или $\Sigma\frac{1}{ab}$?

Имѣемъ

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{r}{ab}$$
$$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{c-b}{bc}=\frac{r}{bc}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{k}-\frac{1}{l}=\frac{l-k}{kl}=\frac{r}{kl}$$

Складывая эти равенства, находимъ: $\frac{1}{a}-\frac{1}{l}=r\Sigma\frac{1}{ab}$, откуда

$$\Sigma\frac{1}{ab}=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{l}\right].$$

Эта формула даетъ простое средство суммированія ряда примѣра IV; стоитъ только положить $a=1$, $r=1$, $l=n+1$, и тотчасъ находимъ

$$S=1-\frac{1}{n+1}.$$

2. *Найти сумму* $\frac{1}{abc}+\frac{1}{bcd}+\cdots+\frac{1}{hkl}$, или, короче, $\Sigma\frac{1}{abc}$?

Имѣемъ:

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}=\frac{bc-ba}{ab^2c}=\frac{2r}{abc}$$
$$\frac{1}{bc}-\frac{1}{cd}=\frac{cd-bc}{bc^2d}=\frac{2r}{bcd}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{hk}-\frac{1}{kl}=\frac{kl-hk}{hk^2l}=\frac{2r}{hkl}.$$

Складывая, найдемъ: $\frac{1}{ab}-\frac{1}{kl}=2r\Sigma\frac{1}{abc}$, откуда

$$\Sigma\frac{1}{abc}=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{kl}\right).$$

По этой формулѣ легко суммировать рядъ примѣра V; положивъ $a=1$, $b=2$, $k=n+1$, $l=n+2$, тотчасъ имѣемъ:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\Sigma\frac{1}{abcd}=\frac{1}{3r}\left[\frac{1}{abc}-\frac{1}{hkl}\right],\ \text{и т. д.}$$

3. Можно вывести аналогичныя формулы для суммы произведеній послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи.

Называя a_0 членъ, предшествующій a, и l_0 — слѣдующій за l, имѣемъ:

$b-a_0=2r$, откуда умножая на a: $ab-a_0a=2ra$
$c-a=2r$, „ „ „ b: $bc-ab=2rb$
$d-b=2r$, „ „ „ c: $cd-bc=2rc$
. . . .
$l_0-k=2r$, „ „ „ l: $ll_0-kl=2rl$.

Сложеніе даетъ: $ll_0 - aa_0 = 2rS$, откуда

$$S = \frac{ll_0 - aa_0}{2r}.$$

Такъ, взявъ рядъ натуральныхъ чиселъ: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, и положивъ $a_0 = 0$, $a = 1$, $l = n$, $l_0 = n + 1$, $r = 1$, получимъ

$$S = \frac{n(n+1) - 1 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Такимъ же образомъ:

$$\begin{array}{lll} c - a_0 = 3r \ ; & \text{по умноженіи на } ab: & abc - a_0ab = 3rab \\ d - a = 3r \ ; & \quad " \qquad " \qquad " \ bc: & bcd - abc = 3rbc \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0 - h = 3r \ ; & \quad " \qquad " \qquad " \ kl: & kll_0 - hkl = 3r \cdot kl. \end{array}$$

Сложивъ, получимъ: $\Sigma ab = \frac{kll_0 - a_0ab}{3r}$.

Такъ, чтобъ суммировать

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1),$$

полагаемъ $a_0 = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $k = n$, $l = n + 1$, $l_0 = n + 2$, $r = 1$, и находимъ

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Такимъ же образомъ найдемъ: $\Sigma abc = \frac{hkll_0 - a_0abc}{4r}$, а отсюда

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

774. Суммированіе безконечныхъ рядовъ. — Если удастся сумму n первыхъ членовъ безконечнаго ряда представить въ видѣ функціи отъ n, то вопросъ о суммированіи ряда будетъ приведенъ къ вопросу о нахожденіи предѣла сказанной функціи при $n = \infty$.

Такъ, если взять безконечный рядъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

то, какъ указано въ примѣрѣ IV, сумма n первыхъ его членовъ равна $1 - \frac{1}{n+1}$; положивъ здѣсь $n = \infty$, находимъ въ результатѣ 1. Заключаемъ, что предѣлъ суммы членовъ даннаго ряда есть конечная величина 1. Отсюда видно, что данный рядъ есть *сходящійся*.

Но такой методъ суммированія безконечныхъ рядовъ примѣнимъ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ; высшій анализъ показываетъ, что обыкновенно легче дать формулу суммы для всего безконечнаго ряда, чѣмъ для его первыхъ n членовъ. Но какъ скоро данъ безконечный рядъ и поставленъ вопросъ о его суммированіи, то предварительно долженъ быть разрѣшенъ вопросъ о томъ, существуетъ-ли искомая сумма, что бы не пришлось потратить время и трудъ на опредѣленіе такой величины, которая не м. б. опредѣлена; иначе говоря, нужно предварительно изслѣдовать — *сходящійся* данный рядъ, или *расходящійся*.

775. Условіе сходимости. — *Для того, чтобы рядъ былъ сходящимся, необходимо, чтобы члены его, начиная съ нѣкотораго мѣста, болѣе или менѣе удаленнаго отъ начала ряда, стремились къ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ есть сходящійся, то онъ имѣетъ конечную сумму S. Въ такомъ случаѣ, назвавъ черезъ S_{n-1} и S_n суммы первыхъ $n-1$ и n членовъ, замѣчаемъ, что по мѣрѣ приближенія n къ ∞, обѣ суммы стремятся къ предѣлу S, т. е.

$$\lim S_n = S, \qquad \lim S_{n-1} = S,$$

откуда, вычитая, находимъ: $\lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$; или, какъ разность предѣловъ равна предѣлу разности перемѣнныхъ, то $\lim (S_n - S_{n-1}) = 0$; но $S_n - S_{n-1} = u_n$; слѣд. въ сходящемся рядѣ

$$\lim (u_n) = 0.$$

Иначе: если въ ряду положительныхъ членовъ члены, хотя и уменьшаются, но не стремятся къ нулю, такой рядъ никогда не можетъ быть сходящимся. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ члены будутъ больше нѣкоторой конечной величины ε, то

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots > \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\ldots\ldots$$

Вторая часть, содержа безконечное число конечныхъ слагаемыхъ, безконечно велика; тѣмъ болѣе, свойство это принадлежитъ лѣвой части, которая больше правой; слѣд. рядъ $u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots$ расходится.

Итакъ *необходимое условіе сходимости ряда* состоитъ въ томъ, чтобы члены его неограниченно уменьшались, приближаясь къ нулю. Но одного этого условія, по крайней мѣрѣ, для рядовъ съ положительными членами, еще *недостаточно*. Въ самомъ дѣлѣ, есть такіе ряды, члены которыхъ хотя и приближаются къ нулю, но сумма ряда не имѣетъ конечной величины. Это можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ.

1. Члены ряда $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ стремятся къ нулю, ибо при $n=\infty$, $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\infty}}=0$. Не смотря на это данный рядъ— расходящійся; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ сумму n членовъ его черезъ S_n, имѣемъ

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}},$$

т. е. $S_n > n.\frac{1}{\sqrt{n}}$, или $S_n > \sqrt{n}$, откуда, при $n=\infty$, имѣемъ $\lim S_n=\infty$: значитъ, рядъ—расходящійся.

2. Для другаго примѣра возьмемъ такъ называемый *гармоническій* рядъ, члены котораго суть обратныя величины чиселъ натуральнаго ряда:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

Числы его стремятся къ нулю, ибо $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\infty}=0$; и однако, это—рядъ *расходящійся*. Въ самомъ дѣлѣ, если взять n членовъ за n-мъ, то сумма $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{2n}$ больше $\frac{1}{2n}$, взятой n разъ, т. е. больше $\frac{1}{2}$. Слѣд. если сгруппировать члены ряда такъ:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{S}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\ldots$$

то видно, что эта сумма больше

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots;$$

но послѣдняя сумма $=\infty$, слѣд. и гармонич. рядъ — безспорно расходящійся.

Итакъ, одного приближенія членовъ къ нулю недостаточно для сходимости ряда. Отсюда—необходимость указанія признаковъ, по которымъ можно бы было отличать сходящіеся ряды отъ расходящихся. Укажемъ простѣйшіе изъ этихъ признаковъ, различая случаи: 1) рядовъ, члены которыхъ имѣютъ одинаковый знакъ; 2) рядовъ, у которыхъ знаки членовъ мѣняются

Признаки сходимости знакопостоянныхъ рядовъ.

776. Теорема D'Аламбера.—I. *Если въ ряду положительныхъ членовъ*

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

съ возрастаніемъ n членъ u_n приближается къ нулю, а отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ къ предѣлу α, меньшему 1, то рядъ будетъ сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ правильную дробь q, которая заключалась бы между α и 1 ($\alpha < q < 1$). По условію, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ такому предѣлу α, который меньше q; но это возможно не иначе, какъ только тогда, когда съ нѣкотораго мѣста ряда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ сдѣлается и будетъ оставаться $< q$. Значитъ, съ этого мѣста будутъ справедливы неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < q, \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} < q, \quad \ldots$$

Умножая обѣ части каждаго неравенства на положительнаго знаменателя, мы этимъ не измѣнимъ смысла неравенствъ и найдемъ

$$u_{n+2} < q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} < q \cdot u_{n+2}; \quad u_{n+4} < q \cdot u_{n+3}; \ldots$$

замѣняя во второмъ неравенствѣ u_{n+2} большею величиною qu_{n+1}, въ третьемъ u_{n+3} большимъ количествомъ $q^2 \cdot u_{n+1}$, ... мы не нарушимъ смысла неравенствъ, и найдемъ

$$u_{n+2} < q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} < q^2 \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+4} < q^3 \cdot u_{n+1}; \ldots$$

Сложивъ эти неравенства и прибавляя къ обѣимъ частямъ u_{n+1}, имѣемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots < u_{n+1}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots).$$

Первая часть есть сумма ряда, слѣдующая за n-мъ членомъ и называемая *остаткомъ* ряда; обозначимъ ее чрезъ r_n; безконечный рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогрессіи (ибо $q < 1$), равная конечной величинѣ $\frac{1}{1-q}$; такимъ образомъ получаемъ

$$r_n < \frac{u_{n+1}}{1-q}.$$

Сумма S даннаго ряда состоитъ изъ $S_n + r_n$, гдѣ и S_n есть конечная величина, какъ сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ. Значитъ

$$S < S_n + \frac{u_{n+1}}{1-q},$$

т. е. сумма даннаго ряда меньше конечной положительной величины, а потому сама есть величина конечная, а данный рядъ—сходящійся.

II. *Если въ ряду положительныхъ членовъ отношеніе* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, *съ возрастаніемъ* n, *приближается къ предѣлу* $\alpha > 1$, *то рядъ есть расходящійся.*

Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ между α и 1 нѣкоторую неправильную дробь q, т. е. $\alpha > q > 1$. По условію, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ такому предѣлу α, который больше q; но чтобы это было возможно, необходимо, чтобы съ нѣкотораго мѣста ряда сказанное отношеніе сдѣлалось и оставалось больше q. Съ этого мѣста, слѣд., возникнутъ отношенія, большія q, а потому будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > q; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > q; \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} > q, \dots\dots$$

Изъ нихъ имѣемъ

$$u_{n+2} > q \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+3} > q \,.\, u_{n+2}; \quad u_{n+4} > q \,.\, u_{n+3}; \dots\dots$$

а отсюда

$$u_{n+2} > q \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+3} > q^2 \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+4} > q^3 \,.\, u_{n+1}; \dots\dots$$

Складывая и придавая къ обѣимъ частямъ u_{n+1}, имѣемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots\dots > u_{n+1}(1 + q + q^2 + q^3 + \dots\dots)$$

Обозначивъ сумму первыхъ n членовъ ряда чрезъ S_n, и придавъ къ обѣимъ частямъ это количество, получимъ

$$S_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots\dots > S_n + u_{n+1}(1 + q + q^2 + \dots\dots)$$

Первая часть представляетъ сумму всего ряда; затѣмъ, $q > 1$, и слѣд. $1 + q + q^2 + \dots\dots = \infty$; неравенство означаетъ, такимъ образомъ, что данный рядъ— расходящійся.

Примѣняя эту теорему, должно: составить отношеніе общаго члена къ предыдущему и найти предѣлъ этого отношенія при $n = \infty$. Если окажется, что этотъ предѣлъ < 1, заключаемъ, что данный рядъ есть сходящійся; если предѣлъ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n = \infty$ будетъ > 1, рядъ будетъ расходящійся. Если же окажется, что $\lim \left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n=\infty} = 1$, наши теоремы ничего не рѣшаютъ относительно сходимости ряда, ибо нервъ доказательства—въ томъ, что съ опредѣленнаго мѣста отношеніе $u_{n+1} : u_n$ должно *оставаться* меньше или больше 1; это предположеніе уже не находитъ себѣ мѣста, когда сказанное отношеніе имѣетъ предѣломъ самую 1, и потому въ послѣднемъ случаѣ рядъ м. б. какъ сходящимся, такъ и расходящимся. Вопросъ рѣшается въ этомъ случаѣ другими признаками.

777. Примѣры. I. *Изслѣдовать въ отношеніи сходимости рядъ*

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} \dots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,n} + \dots$$

въ которомъ предполагается $x > 0$. Имѣемъ

$$u_n = \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,n}, \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,n(n+1)};$$

слѣд. $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n+1}$; но при всякомъ конечномъ x дробь $\frac{x}{n+1}$ обращается въ 0 при $n = \infty$. Заключаемъ, что рядъ сходится при всякомъ опредѣленномъ конечномъ x. Но не лишнее — прямо удостовѣриться въ сходимости ряда, ибо съ перваго

взгляда можетъ показаться, что при нѣсколько значительной величинѣ x, напр. при $x=10$, рядъ—какъ будто бы расходящійся, ибо имѣемъ: $1+10+50+\frac{500}{3}+\cdots$ Но хотя вначалѣ члены ряда идутъ возрастая, все-таки позднѣе наступитъ сходимость, какъ въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ разсмотрѣніемъ. Въ § 361, ч. I, мы имѣли:

$$\frac{x^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots .k}<\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k.$$

Произвольное цѣлое положительное число k выберемъ такъ, чтобы $\sqrt{k}>x$, или $k>x^2$, и разложимъ рядъ на двѣ части:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.(k-1)}$$

$$+\frac{x^k}{1\,.\,2\ldots .k}+\frac{x^{k+1}}{1\,.\,2\ldots.(k+1)}+\frac{x^{k+2}}{1\,.\,2\ldots.(k+2)}+\cdots\cdots$$

Первая часть есть конечный рядъ и имѣетъ конечную сумму; вторая часть меньше

$$\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k+\left(\frac{x}{\sqrt{k+1}}\right)^{k+1}+\left(\frac{x}{\sqrt{k+2}}\right)^{k+2}+\cdots\cdots$$

$$<\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k+\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+1}+\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+2}+\cdots\cdots$$

т. е. меньше суммы геометрич. прогрессіи, представляющей восходящія степени правильной дроби $\frac{x}{\sqrt{k}}$. Слѣд. данный рядъ съ мѣста $k>x^2$ сходится сильнѣе сходящейся геометрической прогрессіи, а слѣд. есть безспорно сходящійся рядъ.

II. Въ рядѣ

$$1+1\,.\,x+1\,.\,2\,.\,x^2+1\,.\,2\,.\,3x^3+1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,x^4+\cdots\cdots$$

имѣемъ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=(n+1)x$. Предѣлъ этого произведенія, при $n=\infty$, безконеченъ при всякомъ значеніи x, отличномъ отъ нуля; если же $x=0$, рядъ не существуетъ (ибо приводится къ 1). Слѣд. если рядъ существуетъ, то онъ всегда — расходящійся.

III. Въ рядѣ

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots\cdots$$

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\lim\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

D'Аламберовой теоремою вопросъ о сходимости ряда не рѣшается; но если замѣтимъ, что члены даннаго ряда соотвѣтственно больше (начиная со 2-го) членовъ гармоническаго ряда, завѣдомо расходящагося, то расходимость даннаго ряда становится внѣ всякаго сомнѣнія.

IV. Въ рядѣ

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

гдѣ $x>0$, $\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}=x\cdot\frac{n}{n+1}=x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$; слѣд. предѣлъ этого отношенія при

$n = \infty$, равенъ x. Заключаемъ, что при $x > 1$ рядъ—расходящійся, при $x < 1$ — сходящійся; при $x = 1$ — сомнѣніе. Но, замѣтивъ, что въ послѣднемъ случаѣ рядъ обращается въ гармоническій, заключаемъ, что и при $x = 1$ онъ расходящійся.

778. Въ послѣднихъ двухъ примѣрахъ для рѣшенія вопроса о сходимости въ сомнительномъ случаѣ, приходилось прибѣгать къ сравненію даннаго ряда съ другимъ, сходимость или расходимость котораго уже извѣстна.

При сравненіи двухъ рядовъ, въ которыхъ члены положительны, можно пользоваться слѣдующею теоремою.

Пусть всѣ члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots$$

положительны и идутъ, постепенно уменьшаясь; въ такомъ случаѣ, очевидно, имѣемъ соотношенія

$$u_1 = u_1$$
$$2u_2 = 2u_2$$
$$4u_4 < 2u_3 + 2u_4$$
$$8u_8 < 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8$$
$$16u_{16} < 2u_9 + 2u_{10} + 2u_{11} + \cdots\cdots + 2u_{16}$$

и т. д.

Складывая, имѣемъ

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots\cdots < 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots) - u_1 \;.\;.\; (1)$$

Если первоначальный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$ сходится, то сумма его конечна, а слѣд. правая часть (1) есть также величина конечная; слѣд., лѣвая и подавно конечна, а потому производный рядъ $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \cdots\cdots$ сходится, если сходится первоначальный.

Раздѣливъ (1) на 2 и придавъ къ обѣимъ частямъ $\frac{1}{2}u_1$, дадимъ неравенству (1) видъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots > \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots\cdots).$$

Если производный рядъ расходится, то, какъ члены его положительны, сумма его будетъ $= \infty$, тѣмъ болѣе будетъ безконечна сумма первонач. ряда, т. е. если производный рядъ — расходящійся, то и начальный таковъ же.

Далѣе, очевидно, имѣютъ мѣсто неравенства

$$u_1 = u_1$$
$$2u_2 > u_2 + u_3$$
$$4u_4 > u_4 + u_5 + u_6 + u_7$$
$$8u_8 > u_8 + u_9 + u_{10} + \cdots\cdots + u_{15}$$

и т. д.

откуда сложеніемъ находимъ:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots\cdots > u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots$$

Изъ этого неравенства заключаемъ: 1) если начальный рядъ расходится, то тѣмъ болѣе расходится производный, и 2) если производный сходится, то сходится и начальный.

Результатомъ соединенія этихъ четырехъ предложеній является:

Теорема Коши. *Два безконечные ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots \quad \text{и} \quad u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots$$

сходятся или расходятся одновременно.

Такимъ образомъ о сходимости или расходимости начальнаго ряда можно судить по сходимости или расходимости производнаго.

779. Однимъ изъ замѣчательныхъ приложеній этой теоремы является изслѣдованіе сходимости ряда

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} \cdots$$

Въ данномъ случаѣ, отношеніе $u_{n+1} : u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k$; предѣлъ его, при $n = \infty$, есть 1 : сомнѣніе относительно сходимости ряда. Производный рядъ будетъ:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots = 1 + 2^{1-k} + 4^{1-k} + 8^{1-k} + 16^{1-k} + \cdots$$
$$= 1 + 2^{1-k} + (2^{1-k})^2 + (2^{1-k})^3 + \cdots$$

Но это есть геометрическая прогрессія съ знаменателемъ 2^{1-k}; для сходимости ея необходимо, чтобы знаменатель былъ < 1, т. е. чтобы 2^{1-k} или $\frac{2^1}{2^k} < 1$, т. е. $k > 1$; во всѣхъ другихъ случаяхъ прогрессія расходится. По теоремѣ Коши, и данный рядъ будетъ сходящимся при $k > 1$, и расходящимся при $k \leq 1$. Отсюда, напр., прямо видно, что изъ четырехъ рядовъ;

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \cdots (1) \qquad \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots (3) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \cdots (4)$$

два первые — сходящіеся, послѣдніе два—расходящіеся, между тѣмъ какъ для всѣхъ $\lim (u_{n+1} : u_n) = 1$.

Сомнѣніе, оставляемое теоремою д'Аламбера, можно иногда разрѣшать при помощи слѣдующей теоремы.

780. Теорема Дюгамеля.—*Рядъ* $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$ *члены котораго постепенно уменьшаются, будетъ сходящійся, если рядъ* $S' = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$ *сходящійся, и, начиная съ нѣкотораго члена, отношеніе* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Наоборотъ, первый рядъ будетъ расходящійся, если второй расходится, и отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ S′ сходится, то изъ неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ находимъ

$$u_{n+1} < v_{n+1} \cdot \frac{u_n}{v_n} \quad \text{и} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n};$$

отсюда

$$u_{n+2} < v_{n+2} \cdot \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}, \quad u_{n+3} < v_{n+3} \cdot \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}, \ \cdots$$

и $$\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}, \quad \frac{u_{n+3}}{v_{n+3}} < \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_n}{v_n}, \ \ldots$$

Слѣдовательно

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < \frac{u_n}{v_n}(v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots),$$

а это значитъ, что остатокъ R_n перваго ряда меньше произведенія остатка R'_n втораго на $\frac{u_n}{v_n}$. Если рядъ S' сходящійся, то R'_n стремится къ нулю, а потому изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что и R_n стремится къ нулю, и что слѣд. рядъ S — сходящійся.

Если рядъ S' расходящійся, то условіе $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ поведетъ къ неравенствамъ, отличающимся отъ вышенаписанныхъ смысломъ; такимъ образомъ, найдемъ, что $R_n > R'_n \cdot \frac{u_n}{v_n}$. Но если S' — рядъ расходящійся, то остатокъ R'_n не стремится къ нулю, а потому и R_n не стремится къ нулю; слѣд. S есть строка расходящаяся. Напр., для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} + \ldots$$

найдемъ, что $u_{n+1} : u_n = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}}$, и слѣ. при $n = \infty$ даетъ 1. Но, сравнивая этотъ рядъ съ гармоническимъ, завѣдомо расходящимся, для котораго отношеніе соотвѣтствующихъ членовъ есть $\frac{n+1}{n+2}$, находимъ: $\frac{2n+1}{2n+2} > \frac{n+1}{n+2}$, а потому заключаемъ, что взятый рядъ — расходящійся.

Ряды знакоперемѣнные.

781. Теорема. *Когда знаки членовъ чередуются* ($+, -, +, -, \ldots$), *то рядъ будетъ сходящійся, если съ нѣкотораго мѣста члены его неопредѣленно уменьшаются, приближаясь къ нулю, т. е. если* $\lim u_n = 0$ *при* $n = \infty$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть съ опредѣленнаго мѣста $n = k$, каждый членъ больше слѣдующаго за нимъ, т. е.

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \ldots$$

и кромѣ того $\lim u_n = 0$. Обозначимъ буквами $R_1, R_2, R_3, \ldots$ величины:

$$R_1 = u_k$$
$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2})$$
$$R_5 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+4})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Замѣчая, что всѣ разности въ скобкахъ положительны, имѣемъ

$$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Съ другой стороны, положивъ

$$R_2 = (u_k - u_{k+1})$$
$$R_4 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3})$$
$$R_6 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

имѣемъ:
$$R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Наконецъ, для неопредѣленно возрастающаго m

$$\lim (R_{2m-1} - R_{2m}) = \lim u_{k+2m-1} = 0 \dots\dots\dots \quad (3)$$

Итакъ, если съ мѣста k (съ котораго члены идутъ убывая) брать суммы нечетнаго числа членовъ, и суммы четнаго числа членовъ, то изъ (3) прямо слѣдуетъ, что эти суммы R_{2m-1} и R_{2m} приближаются къ нѣкоторому общему предѣлу R; причемъ суммы R_{2m-1} приближаются къ нему, постепенно уменьшаясь, суммы R_{2m} постепенно увеличиваясь. Затѣмъ, общій ихъ предѣлъ R, во-первыхъ, положителенъ, какъ непосредственно ясно изъ неравенствъ (2), а во-вторыхъ, будучи, въ силу неравенства (3), меньше каждой изъ величинъ R_1, R_3, $R_5, \dots$, онъ представляетъ опредѣленную конечную величину. Вслѣдствіе ур-нія $R = \lim R_{2m-1} = \lim R_{2m}$:

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots$$

а слѣд. при данныхъ условіяхъ рядъ $u_k - u_{k+1} + \dots$ сходящійся, а потому сходится и первоначальный рядъ

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^{k-1} u_{k-1} + (-1)^k (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots),$$

и теорема доказана.

Такъ, напр., рядъ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$ сходящійся, а сумма его содержится между слѣдующими, болѣе и болѣе сближающимися числами

$$1 \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

и т. д.

782. Теорема.—*Для сходимости ряда, въ которомъ знаки членовъ мѣняются по какому угодно закону, достаточно, чтобы рядъ оставался сходящимся по перемѣнѣ всѣхъ знаковъ на* $+$.

Въ самомъ дѣлѣ, абсолютная величина суммы втораго ряда, очевидно, больше, нежели перваго, такъ какъ во второмъ всѣ члены положительны, а въ данномъ нѣкоторые изъ этихъ членовъ отрицательны. Но, по условію, сумма втораго ряда конечна, слѣд. и сумма даннаго конечна, т. е. данный рядъ — сходящійся.

Слѣд. о сходимости даннаго ряда можно судить, примѣняя къ производному ряду вышенайденные признаки сходимости для рядовъ съ положительными членами.

783. Условная и безусловная сходимость. — Нерѣдко приходится встрѣчаться съ такого рода мнѣніемъ, что предложеніе, имѣющее силу для *всякаго* конечнаго числа величинъ, должно оставаться вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, когда число величинъ дѣлается безконечнымъ. Первый, доказательно убѣдившій въ несправедливости такого принципа, былъ *Лежень-Дирикле* (въ 1837 г.). Онъ показалъ, что предложеніе о неизмѣняемости суммы отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ, вообще, невѣрно для безконечнаго числа слагаемыхъ. Примѣръ его былъ слѣдующій. Возьмемъ рядъ

$$\sigma = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\dots\dots \quad (1)$$

и сгруппируемъ его члены по четыре:

$$\sigma=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots$$

гдѣ общая група есть n-ая. Такимъ образомъ сумма σ равна суммѣ значеній, принимаемыхъ n-ою группою, если въ ней давать n всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до ∞, т. е.

$$\sigma=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right) \quad\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Затѣмъ въ суммѣ (1) переставимъ члены такъ, чтобы за двумя положительными слѣдовалъ отрицательный; получимъ рядъ

$$s=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots\ldots\ldots (2)$$

и сгруппируемъ его члены по три:

$$s=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots$$

гдѣ общая группа есть n-ая. Сумму S можно сокращенно представить въ видѣ

$$s=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right) \quad\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Наконецъ, сгруппировавъ члены ряда (1) по два, не измѣняя ихъ порядка, получимъ

$$\sigma=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots$$

гдѣ общая группа есть n-ая. Эту сумму можно представить въ видѣ

$$\sigma=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Вычитаніе даетъ:

$$\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Если въ этомъ тождествѣ положить послѣдовательно $n=1, 2, 3, \ldots n$, сложить результаты и перейти къ предѣлу $n=\infty$, то получится

$$\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

или $s-\sigma=\frac{1}{2}\sigma$, откуда $s=\frac{3}{2}\sigma$, т. е. *суммы* σ и s *различны.*

Отсюда вытекаетъ необходимость различать два рода сходящихся рядовъ: ряды *условно-сходящіеся*, когда сумма ихъ зависитъ отъ порядка членовъ, и *безусловно-сходящіеся*, если сумма остается всегда одинаковою, какъ ни переставлять члены. А отсюда задача объ опредѣленіи признаковъ безусловной сходимости.

Пусть будетъ U_n сумма нѣкотораго n-членнаго ряда:

$$U_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1} \quad\ldots\ldots\ldots (1)$$

и пусть предѣлъ U_n при $n=\infty$ будетъ опредѣленная конечная величина U, слѣд.

$$U=u_0+u_1+u_2+u_3+ \dots \qquad (2)$$

т. е. имѣется рядъ сходящійся. Узнать, будетъ-ли новый безконечный рядъ

$$v_0+v_1+v_2+v_3+ \dots \qquad (3)$$

отличающійся отъ перваго только перестановкою членовъ, имѣть ту же сумму U. Возьмемъ въ новомъ ряду p первыхъ членовъ и положимъ

$$V_p=v_0+v_1+v_2+\dots+v_{p-1} \dots \qquad (4)$$

Можно взять p настолько большимъ, чтобы всѣ n членовъ суммы U_n содержались въ суммѣ V_p. Кромѣ того, пусть въ V_p будетъ еще $p-n$ членовъ, совокупность которыхъ

$$u_q+u_r+u_s+\dots$$

будетъ имѣть индексы q, r, s, ... большіе $n-1$. Поэтому

$$V_p-U_n=u_q+u_r+u_s+\dots$$

а слѣд. при неограниченномъ возрастаніи n и p

$$\lim V_p-U=\lim (u_q+u_r+u_s+\dots).$$

Чтобы рядъ $v_0+v_1+v_2+\dots$ имѣлъ сумму U, должно быть: $\lim V_p=U$, а слѣд. должно быть

$$\lim (u_q+u_r+u_s+\dots)=0 \dots \qquad (5)$$

Это и есть признакъ безусловной сходимости ряда (2).

Можно найти другую форму такимъ путемъ. Если рядъ (2) съ опредѣленнаго мѣста содержитъ только положительные члены, то можно n взять на столько большимъ, чтобы въ ур-ніи

$$U-U_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\dots$$

справа находящіеся члены всѣ были положительны; сумма $u_n+u_{n+1}+\dots$ есть такъ называемый *остатокъ* ряда и имѣетъ предѣломъ нуль, ибо при $n=\infty$ лѣвая часть обращается въ $U-\lim U_n$ т. е. въ ноль.

Далѣе, что касается суммы $u_q+u_r+\dots$, число членовъ которой $=p-n$, а каждый индексъ $>n-1$, то какъ всѣ члены положительны, имѣемъ

$$0<u_q+u_r+u_s+\dots<u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\dots$$

лѣд. при n и p приближающихся къ ∞:

$$\lim (u_q+u_r+u_s+\dots)=0;$$

слѣд. при взятомъ предположеніи рядъ сходится безусловно.

Когда первоначальный рядъ содержитъ члены, частію положительные, частію отрицательные, и нѣтъ такого мѣста, начиная съ котораго шли бы члены одинаковаго знака, къ такому ряду приведенныя заключенія неприложимы, и сходимость въ этомъ случаѣ возможна только условная.

Но въ частномъ предположеніи, что рядъ остается сходящимся, если вмѣсто его членовъ взять ихъ абсолютныя значенія, можно далѣе вести изслѣдованіе. Означая абсолютныя велечины членовъ скобками, пусть рядъ

$$[u_0]+[u_1]+[u_2]+\dots$$

будетъ сходящійся. По предыдущему

$$\lim \{[u_q]+[u_r]+[u_s]+\dots\}=0,$$

т. е. абсолютное значеніе суммы $u_q+u_r+\dots$ м. б. сдѣлано какъ угодно малымъ.

Отсюда же прямо слѣдуетъ, что $u_q + u_r \cdots$ также имѣетъ предѣломъ нуль, а слѣд. рядъ безусловно сходится. Отсюда

784. Теорема Шейбнера. — *Безконечный рядъ сходится безусловно, если сохраняетъ сходимость и тогда, когда всѣ члены его замѣнимъ ихъ абсолютными значеніями.*

Этимъ объясняется, почему рядъ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ оказался лишь условно сходящимся; въ самомъ дѣлѣ, рядъ изъ абсолютныхъ значеній его членовъ— расходящійся.

785. Перемноженіе рядовъ.—Теорема.—*Если имѣемъ два сходящіеся ряда*

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad V = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

знакопостоянные, или знакоперемѣнные, но въ послѣднемъ случаѣ такіе, что оба, или, покрайней мѣрѣ, одинъ, напр. U, *остается сходящимся послѣ замѣны — на* +; *то доказать, что произведеніе* UV *выражается безконечнымъ рядомъ*

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots$$

члены котораго составляются по слѣдующему закону:

$$w_1 = u_1 v_1$$
$$w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1$$
$$w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{вообще} \quad w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1$$

т. е. что n-ый *членъ произведенія равенъ суммѣ произведеній первыхъ* n *членовъ ряда* U *на первые* n *членовъ ряда* V, *взятыхъ въ обратномъ порядкѣ.*

Доказать, что UV выражается безконечнымъ рядомъ $w_1 + w_2 + \cdots$ значитъ доказать, что UV есть предѣлъ, къ которому приближается сумма n членовъ:

$$W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n$$

при неограниченномъ возрастаніи n. Для этого составимъ разность между суммою W_n и произведеніемъ двухъ суммъ

$$U_p = u_1 + u_2 + \cdots + u_p \quad \text{и} \quad V_q = v_1 + v_2 + \cdots + v_q,$$

гдѣ $p + q = n$, причемъ: если n четное, то $p = q = \frac{n}{2}$, а при n нечетномъ $p = \frac{n-1}{2}$. $q = \frac{n+1}{2}$. Всѣ члены произведенія $U_p V_q$ содержатся въ суммѣ W_n, ибо въ произведеніи $U_p V_q$ индексы при u и v не больше p и q. Вынеся въ W_n за скобки $u_1, u_2, \ldots u_n$, можемъ эту сумму представить въ видѣ

$$\begin{aligned} W_n = & u_1(v_1 + v_2 + \cdots + v_q + v_{q+1} + \cdots + v_n) \\ & + u_2(v_1 + v_2 + \cdots + v_q + v_{q+1} + \cdots + v_{n-1}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_p(v_1 + v_2 + \cdots + v_q + v_{q+1}) \\ & + u_{p+1}(v_1 + v_2 + \cdots + v_q) + \cdots + u_n v_1. \end{aligned}$$

Составивъ произведеніе $U_p\ V_q$ и вынеся также за скобки $u_1, u_2, \ldots$ имѣемъ:

$$\begin{aligned} U_p\ V_q = & u_1(v_1 + v_2 + \cdots + v_q) + u_2(v_1 + v_2 + \cdots + v_q) + \cdots \\ & \cdots + u_p(v_1 + v_2 + \cdots v_q). \end{aligned}$$

Вычтя это произведеніе изъ W_n, находимъ:

$$W_n - U_pV_q = u_1(v_{q+1} + \cdots + v_n) + u_2(v_{q+1} + \cdots + v_{n-1}) + \cdots + u_pv_{q+1}$$
$$+ u_{p+1}(v_1 + v_2 + \cdots + v_q) + u_{p+2}(v_1 + v_2 + \cdots + v_{q-1}) + \cdots + u_nv_1.$$

При увеличеніи n до безконечности, неограниченно возрастаютъ и p и q. Такъ какъ рядъ V сходящійся, то его общій членъ v_{q+1} и суммы $v_{q+1} + \cdots + v_n$, $v_{q+1} + \cdots + v_{n-1}, \cdots$ стремятся къ нулю; а суммы первыхъ членовъ: $v_1 + v_2 + \cdots + v_q, \cdots, v_1$ будутъ конечны. Подставивъ вмѣсто первыхъ суммъ положительную безконечно-малую величину α, большую каждой изъ нихъ, а вторыя суммы замѣнивъ положительною величиною A, также большею каждой изъ нихъ, найдемъ, что вторая часть послѣдняго равенства будетъ меньше

$$\alpha(u_1 + u_2 + \cdots + u_p) + A(u_{p+1} + \cdots + u_n).$$

Но рядъ U сходящійся и, по̀ условію, не теряетъ сходимости и послѣ замѣны его членовъ ихъ абсолютными величинами, то сумма $u_1 + u_2 + \cdots + u_p$, будучи меньше суммы абсолютныхъ значеній своихъ членовъ, будетъ меньше нѣкотораго конечнаго положительнаго количества B, а остатокъ этого ряда $u_{p+1} + \cdots + u_n$ сдѣлается менѣе нѣкоторой положит. безконечно-малой β. Итакъ, при достаточно-большомъ n будетъ

$$W_n - U_pV_q < B\alpha + A\beta,$$

т. е. наша разность м. б. сдѣлана какъ угодно малою; а потому въ предѣлѣ, при $n = \infty$, $\lim (W_n - U_pV_q) = 0$, или $W = UV$.

786. Задачи.

Суммировать конечные ряды объ n членахъ:

1. — 123, 123 123, 123 123 123, 123 123 123 123, ...
2. — $1 + 4a^2 + 9a^4 + 16a^6 + 25a^8 + \cdots + n^2a^{2n-2}$.
3. — $1 + 5a + 12a^2 + 22a^3 + 35a^4 + \cdots + \frac{n}{2}(3n-1)a^{n-1}$.
4. — $1 + 9a + 25a^2 + 49a^3 + \cdots + (2n-1)^2a^{n-1}$.
5. — $1 + 8a + 27a^2 + 64a^3 + 125a^4 + \cdots + n^3a^{n-1}$.
6. — $1 + 27a + 125a^2 + 343a^3 + \cdots + (2n-1)^3a^{n-1}$.
7. — $\frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$.
8. — $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1) \cdot n^2$. ($n - 1$ чл.)
9. — $\frac{a}{b} + \frac{a+r}{bq} + \frac{a+2r}{bq^2} + \frac{a+3r}{bq^3} + \cdots + \frac{a+nr}{bq^n}$ · ($n + 1$ чл.)
10. Суммировать безконечный рядъ $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots$
11. — Суммировать безконечное число безконечныхъ прогрессій:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{17} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{17^3} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{4^n+1} + \frac{1}{(4^n+1)^2} + \frac{1}{(4^n+1)^3} + \cdots$$

до безконечности.

Опредѣлить сходимость рядовъ:

12. $1+px+\frac{p(p+1)}{1.2}x^2+\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$

гдѣ p и x — положительныя конечныя количества.

13. $\frac{1}{x(x+a)}+\frac{1}{(x+2a)(x+3a)}+\frac{1}{(x+4a)(x+5a)}+\ldots\ldots$

14. $-\frac{3}{2}x+\frac{5}{5}x^2+\frac{7}{10}x^3+\frac{9}{17}x^4+\ldots\ldots+\frac{2n+1}{n^2+1}x^n+\ldots\ldots$

15. $-\frac{m+p}{a}+\frac{m+2p}{a^2}+\frac{m+3p}{a^3}+\ldots\ldots$

16. $-(a+1)^2+(a+2)^2x+(a+3)^2x^2+\ldots\ldots$

17. $-1^2+2^2.x+3^2.x^2+\ldots\ldots$

18 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{4}}+\ldots\ldots$

19. Первые члены нѣкотораго ряда суть 1, 7 и 19; но забыть законъ ряда; извѣстно только, что общій членъ u_n есть цѣлая квадратная функція отъ n. Возстановить рядъ и доказать, что сумма первыхъ n членовъ его равна n^3.

ГЛАВА XLVII.

Распространеніе формулы бинома Ньютона для всякаго дѣйствительнаго показателя.— Остатокъ биноміальнаго ряда. — Приложенія. — Задачи.

787. Формула возвышенія бинома въ степень, доказанная для показателя цѣлаго положительнаго, можетъ быть распространена на какой угодно показатель. Замѣтивъ, что $(a+b)^m$ достаточно разсматривать только при неравныхъ a и b, потому-что при $a=b$ эта степень приводится къ одночлену $2^m a^m$, преобразуемъ ее вынесеніемъ a за скобки въ биномѣ $a+b$; найдемъ $(a+b)^m=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m=a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=a^m(1+x)^m$, полагая $\frac{b}{a}=x$. Вопросъ приводится такимъ образомъ къ разложенію $(1+x)^m$.

Когда показатель m — число цѣлое и положительное, мы имѣли при всякомъ x конечный рядъ

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k+\ldots+x^m,$$

содержащій $m+1$ членовъ. Коэффиціенты при степеняхъ x представляли числа сочетаній изъ m элементовъ по 1, по 2, . . . , по k, ... Условившись обозначать эти числа буквою m съ индексами 1, 2, 3, ... , т. е.

$\frac{m}{1}=(m)_1$; $\frac{m(m-1)}{1.2}=(m)_2$; $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}=(m)_3$, вообще

$$\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k}=(m)_k \quad \dots\dots \quad (1)$$

можемъ короче написать разложеніе въ формѣ:

$$(1+x)^m=1+(m)_1x+(m)_2x^2+(m)_3x^3+\dots+(m)_kx^k+\dots+(m)_mx^m \dots (2)$$

Спрашивается: если m не есть цѣлое положительное число, то можно-ли представить $(1+x)^m$ въ видѣ ряда, расположеннаго по восходящимъ степенямъ буквы x, съ коэффиціентами закона, выражаемаго формулою (1)?

Здѣсь прежде всего замѣчаемъ, что коэффиціентъ

$$(m)_k=\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2.3\dots k}\dots\dots$$

при m цѣломъ положительномъ можетъ обратиться въ нуль, вслѣдствіе чего рядъ (2) будетъ законченный. Но если m — число отрицательное или дробное, то число членовъ ряда будетъ безконечно. Дѣйствительно, при m отрицательномъ множители m, $m-1$, $m-2$, ... числителя выраженія $(m)_k$ будутъ идти увеличиваясь по абсолютной величинѣ, и потому ни одинъ коэффиціентъ ряда не можетъ сдѣлаться нулемъ. Когда m — дробь, то и всѣ множители $m-1$, $m-2$, ... будутъ дроби, и не могутъ обратиться въ ноль: рядъ биноміальныхъ коэффиціентовъ будетъ безконеченъ. Слѣд., если только возможно разложеніе въ рядъ закона (2) бинома $(1+x)^m$, гдѣ m не есть цѣлое положительное число, то такой рядъ долженъ быть безконечный. Это замѣчаніе заставляетъ формулировать нашу задачу окончательно такъ: безконечный рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ буквы x, съ коэффиціентами закона (1), при m не цѣломъ и положительномъ, т. е. рядъ

$$1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\dots\dots+m_kx^k+ \quad \dots\dots \quad (3)$$

можетъ-ли представлять разложеніе степени бинома $(1+x)^m$? Для рѣшенія вопроса нужно найти *сумму* этого ряда; если окажется, что эта сумма $=(1+x)^m$, вопросъ будетъ рѣшенъ въ утвердительномъ смыслѣ; если окажется, что сумма не равна $(1+x)^m$, — въ отрицательномъ смыслѣ. Но о суммированіи безконечнаго ряда рѣчь можетъ быть только тогда, когда мы напередъ знаемъ, что это-рядъ сходящійся; поэтому прежде всего необходимо опредѣлить, при какихъ условіяхъ рядъ (3) будетъ сходящимся. Но изъ предыдущаго мы знаемъ, что (3) будетъ безусловно сходящимся рядомъ, если сходится рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значеній его членовъ. Итакъ, нужно взять предѣлъ отношенія $m_{n+1}x^{n+1}$: m_nx^n при $n=\infty$. Имѣемъ:

$$\lim\left\{m_{n+1}x^{n+1}:m_nx^n\right\}=\lim\frac{m-n}{n+1}\cdot x=\lim\left\{-x+\frac{m+1}{n+1}x\right\}.$$

При $n=\infty$, при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ m и x, второй членъ обращается въ ноль, и слѣд.

$$\lim\left\{m_{n+1}x^{n+1}:m_nx^n\right\}=-x.$$

Заключаемъ, что рядъ будетъ сходящимся, когда абсолютная величина $-x$ будетъ <1, т. е. когда $-1<x<+1$, или, короче, когда $x^2<1$; если же абсолютная величина количества $(-x)$ будетъ >1, рядъ — расходящійся. При $x=\pm1$ — сомнѣніе; рѣшенія вопроса въ этомъ случаѣ мы касаться не будемъ, въ виду его сложности. Итакъ, полагая $-1<x<+1$, найдемъ сумму ряда (3). Обозначивъ эту сумму чрезъ S_m, гдѣ значекъ m показываетъ, что эта сумма зависитъ отъ m, имѣемъ

$$S_m=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\dots\dots$$

Перемѣнивъ m на другое дѣйствительное количество p, получимъ:

$$Sp=1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\dots$$

Такъ какъ оба эти ряда сходятся безусловно при $x^2 < 1$, то можно приложить къ нимъ теорему о перемноженіи рядовъ; найдемъ:

$$S_m \, . \, S_p = 1 + (m_1 + p_1)x + (m_2 + m_1 p_1 + p_2)x^2 + \cdots + (m_n + m_{n-1} p_1 + m_{n-2} p_2 + \cdots$$
$$\cdots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n)x^n + \cdots \qquad (4)$$

Докажемъ, что коэффиціенты его составлены изъ $m+p$ по такому же закону, какъ коэффиціенты рядовъ S_m и S_p составлены изъ m и p. Во-первыхъ, такъ какъ $m_1 = m$ и $p_1 = p$, то $m_1 + p_1 = m + p$. Затѣмъ:

$$m_2 + m_1 p_1 + p_2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + mp + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} = \frac{m(m+1)+mp}{1\,.\,2} + \frac{mp+p(p-1)}{1\,.\,2} =$$
$$= \frac{m(m+p-1)+p(m+p-1)}{1\,.\,2} = \frac{(m+p)(m+p-1)}{1\,.\,2},$$

а это есть ничто иное какъ $(m+p)_2$.

Чтобы доказать, что

$$m_n + m_{n-1} p_1 + m_{n-2} p_2 + \cdots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n = (m+p)_n \ldots \quad (5)$$

допустимъ, что равенство (5) вѣрно, и докажемъ, что слѣдующій коэффиціентъ есть $(m+p)_{n+1}$. Но этотъ слѣдующій коэффиціентъ есть

$$m_{n+1} + m_n p_1 + m_{n-1} p_2 + \cdots + m_2 p_{n-1} + m_1 p_n + p_{n+1}$$

Чтобы онъ былъ равенъ $(m+p)_{n+1}$, нужно, чтобы онъ представлялъ произведеніе предыдущаго коэффиціента, по допущенію, равнаго $(m+p)_n$, на $\frac{m+p-n}{n+1}$. Составляемъ это произведеніе:

$$(m_n + m_{n-1} p_1 + m_{n-2} p_2 + \cdots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n) \cdot \frac{m+p-n}{n+1} \ldots \quad (6)$$

Члены этого произведенія имѣютъ видъ $m_h p_{n-h} \cdot \frac{m+p-n}{n+1}$, а это выраженіе можно представить въ формѣ

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m-h}{m+1} + m_h p_{n-h} \cdot \frac{p+h-n}{n+1};$$

но $m_h \cdot \frac{m-h}{h+1} = m_{h+1}$; это равенство можно представить въ видѣ $m_h(m-h) = m_{h+1}(h+1)$; а на основаніи этого равенства имѣемъ

$$p_{n-h}(p+h-n) = p_{n-h+1}(n-h+1).$$

Слѣд.

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m+p-n}{n+1} = m_h p_{n-h+1} \cdot \frac{n-h+1}{n+1} + m_{h+1} p_{n-h} \cdot \frac{h+1}{n+1}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $h = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, получимъ всѣ члены произведенія (6):

$$p_{n+1} + m_1 p_n \cdot \frac{1}{n+1}$$
$$+ \; m_1 p_n \cdot \frac{n}{n+1} + m_2 p_{n-1} \cdot \frac{2}{n+1}$$
$$+ m_2 p_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+1} + m_3 p_{n-2} \cdot \frac{3}{n+1}$$
$$+ m_3 p_{n-2} \cdot \frac{n-2}{n+1} + \cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots + m_{n-2} p_3 \cdot \frac{n-2}{n+1}$$

$$+ m_{n-2} p_3 \cdot \frac{3}{n+1} + m_{n-1} p_2 \cdot \frac{n-1}{n+1}$$
$$+ m_{n-1} p_2 \cdot \frac{2}{n+1} + m_n p_1 \cdot \frac{n}{n+1}$$
$$+ m_n p_1 \cdot \frac{1}{n+1} + m_{n+1} .$$

Суммируя по діагоналямъ, имѣемъ:

$$p_{n+1} + m_1 p_n + m_2 p_{n-1} + \cdots + m_{n-1} p_2 + m_n p_1 + m_{n+1};$$

а это есть ни что иное, какъ $(m+p)_{n+1}$.

Итакъ, допустивъ, что коэффиціентъ при x^n есть $(m+p)_n$, мы доказали, что слѣдующій коэффиціентъ есть $(m+p)_{n+1}$. Но непосредственнымъ вычисленіемъ мы убѣдились, что третій коэффиціентъ $= (m+p)_2$; сл., по доказанному, четвертый $= (m+p)_3$, пятый $(m+p)_4$ и т. д. Такимъ образомъ, ур-ніе (4) принимаетъ видъ

$$S_m . S_p = 1 + (m+p)_1 x + (m+p)_2 x^2 + (m+p)_3 x^3 + \cdots + (m+p)_n x^n + \cdots$$

то-есть

$$S_m . S_p = 1 + \frac{m+p}{1} \cdot x + \frac{(m+p)(m+p-1)}{1 . 2} x^2 + \frac{(m+p)(m+p-1)(m+p-2)}{1 . 2 . 3} x^3 + \cdots$$

Вторая часть представляетъ рядъ, составленный по тому же закону, какъ ряды S_m и S_p, съ тою разницею, что вмѣсто m или p находится $m+p$; сл. рядъ этотъ мы можемъ обозначить тѣмъ же знакомъ S, но съ указателемъ $m+p$. Слѣд.

$$S_m . S_p = S_{m+p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Положивъ $m = p$, имѣемъ:

$$S_m . S_m = S_{2m}, \quad \text{или} \quad [S_m]^2 = S_{2m}.$$

Помноживъ обѣ части на S_m и примѣнивъ къ произведенію $S_{2m}.S_m$ формулу (7), имѣемъ

$$[S_m]^3 = S_{3m}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, получимъ для какого угодно цѣлаго числа k:

$$[S_m]^k = S_{km}.$$

Если теперь m есть положительная дробь $= \frac{q}{r}$, гдѣ q и r — цѣлыя положительныя числа, то мы можемъ произвольное цѣлое k взять равнымъ знаменателю r, и получимъ

$$\left[S_{\frac{q}{r}}\right]^r = S_q.$$

Такъ какъ q есть цѣлое положительное число, то S_q представляетъ, какъ извѣстно, конечный рядъ, сумма котораго равна $(1+x)^q$; слѣд.

$$\left[S_{\frac{q}{r}}\right]^r = (1+x)^q;$$

извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка r, имѣемъ

$$S_{\frac{q}{r}} = (1+x)^{\frac{q}{r}};$$

этимъ и доказано, что $(1+x)^{\frac{q}{r}}$ разлагается въ безконечный рядъ того же закона, какъ и при цѣломъ показателѣ.

Если въ равенствѣ (7) положимъ, что m есть число отрицательное, цѣлое или дробное, и что $p = -m$, то равенство это дастъ

$$S_m . S_{-m} = S_{m-m} = S_0.$$

Но $S_0 = 1$; слѣд. и $S_m . S_{-m} = 1$, откуда

$$S_m = \frac{1}{S_{-m}}.$$

Здѣсь $-m > 0$, а для этого случая доказать, что $S_{-m} = (1+x)^{-m}$; сл.

$$S_m = \frac{1}{(1+x)^{-m}} = (1+x)^m:$$

этимъ формула бинома доказана для отрицательнаго показателя.

Итакъ, мы доказали справедливость формулы для всякаго соизмѣримаго показателя. Чтобы распространить это ур. на несоизмѣримое m *), пусть будетъ μ — соизмѣримое число, безконечно къ нему близкое, и α безконечно-малая разность $m-\mu$. Формула (7) даетъ:

$$S_m = S_{\mu+\alpha} = S\mu . S\alpha.$$

Но μ — число соизмѣримое, слѣд. $S\mu = (1+x)^\mu$; затѣмъ, формула (3) даетъ

$$S\alpha = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots\cdots$$
$$= 1 + \alpha \left\{ x + \frac{\alpha-1}{2} \cdot x^2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2 . 3} x^3 + \cdots\cdots \right\}$$

Рядъ въ скобкахъ — сходящійся, потому что отношеніе каждаго члена къ предыдущему въ предѣлѣ даетъ $-x$, что по абсолютной величинѣ < 1; слѣд. сумма этого ряда есть нѣкоторая конечная величина A; а потому

$$S_\alpha = 1 + \alpha A, \quad \text{и} \quad S_m = (1+x)^\mu (1 + \alpha A).$$

По мѣрѣ приближенія μ къ m, α приближается къ 0, слѣд. $1 + \alpha A$ — къ 1, а вторая часть къ $(1+x)^m$; а какъ эта часть всегда $= S_m$, то

$$S_m = (1+x)^m.$$

Итакъ, при всякомъ дѣйствительномъ m:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} x^3 + \cdots$$

причемъ, когда m — цѣлое положительное число, x можетъ быть какою угодно дѣйствительною величиною; если же m не есть цѣлое положит. число, то должно быть $-1 < x < 1$.

Примѣчаніе. 1. Идея вышеизложеннаго доказательства общности формулы бинома Ньютона принадлежитъ *Эйлеру*; а усовершенствованное доказательство — *Коши*.

Примѣчаніе 2. Теорема.—*Одна и таже функція разлагается въ сходящійся рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣннаго, единственнымъ способомъ.*—Въ самомъ дѣлѣ, пусть, если возможно, будутъ два различныя разложенія одной и той же функціи.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad \text{и} \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

сходящіяся то и другое при всѣхъ значеніяхъ x, меньшихъ X, по абс. значенію. Такъ какъ, по усл., оба эти разложенія должны имѣть равные предѣлы для всякаго $x < X$, то для этихъ значеній перемѣннаго должно быть

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + \cdots = \varepsilon_n,$$

гдѣ ε_n — разность остатковъ рядовъ, которая, какъ и эти остатки, д. б. безконечно

*) Опредѣленіе степени съ несоизмѣримымъ показателемъ см. далѣе, § 792.

малою при $n=\infty$, при всякомъ $x<X$. Какъ бы велико ни было значеніе, взятое для n, всегда можно взять x настолько малымъ, чтобы совокупность членовъ $(a_1-b_1)x+\ldots+(a_n-b_n)x^n$ была какъ угодно мала, а отсюда слѣдуетъ, что a_0-b_0 равно разности двухъ безк. малыхъ. Слѣд., какъ a_0-b_0 не зависитъ ни отъ n, ни отъ x, то оно строго равно нулю (на основаніи очевидной истины: постоянное, о которомъ можно доказать, что оно менѣе всякой данной величины, есть ноль; короче: постоянная безконечно-малая есть ничто иное какъ ноль). Такимъ образомъ $a_0=b_0$ и равенство приводится къ

$$x[(a_1-b_1)+(a_2-b_2)x+\ldots+(a_n-b_n)x^{n-1}]=\dot{\varepsilon}_n;$$

но чтобы первая часть была безконечно мала при всакомъ $x<X$, необходимо, чтобы скобки были безк. малы, откуда, по предыдущему, заключаемъ, что $a_1-b_1=0$, т. е. $a_1=b_1$. Продолжая такимъ образомъ, убѣдимся, что всѣ коэффиціенты равны каждый каждому.

Примѣчаніе 3.—Эту теорему (служащую основаніемъ способа неопредѣл. коэф-въ для безконечныхъ строкъ) можно примѣнять къ разложенію функцій въ безконечные степенные ряды, но только въ такомъ случаѣ, когда напередъ м. б. доказано, что функція способна разлагаться въ сходящійся степенной рядъ: въ противномъ случаѣ способъ этотъ можетъ привести къ невѣрнымъ результатамъ, такъ какъ въ немъ не обращается вниманія на остатокъ ряда. Кромѣ того, по этому способу трудно бываетъ найти общую формулу для членовъ ряда. Въ виду этого какъ для бинома, такъ и для другихъ функцій у насъ указаны другіе, болѣе строгіе, пріемы разложенія въ ряды.

788. Остатокъ биноміальнаго ряда. Разложимъ биноміальный рядъ на двѣ части, изъ которыхъ первая пусть содержитъ первые k членовъ, а вторая, которую мы назовемъ *остаткомъ ряда* и обозначимъ чрезъ R_k, остальные члены.

Итакъ, положимъ:

$$(1+x)^m=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\ldots\ldots+m_{k-1}x^{k-1}+R_k \quad\ldots\ldots (1)$$

гдѣ остатокъ R_k будетъ

$$R_k=m_kx^k+m_{k+1}x^{k+1}+m_{k+2}x^{k+2}+\ldots.$$

дѣсь

$$m_k=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k};$$

$$m_{k+1}=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-k+1)(m-k)}{1.2.3\ldots\ldots k.(k+1)}=m_k\cdot\frac{m-k}{k+k};$$

$$m_{k+2}=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-k).(m-k-1)}{1.2\ldots\ldots(k+1)(k+2)}=m_k\cdot\frac{(m-k).(m-k-1)}{(k+1)(k+1)}; \text{ и т. д.}$$

Вынеся во всѣхъ членахъ за скобки $m_k\,x^k$, получимъ:

$$R_k=m_kx^k\left\{1+\frac{m-k}{k+1}x+\frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)}x^2+\ldots\right\}\ldots\ldots(2)$$

Различаемъ слѣдующіе случаи.

1 случай: *m — цѣлое положительное число.* — Понятно, что въ этомъ случаѣ $k<m$, рядъ будетъ конечный объ $(m+1)$ членахъ, и если:

1. $x>0$, то сумма въ скобкахъ (2) будетъ больше нуля. Съ другой стороны, если во множителяхъ числителей коэффиціентовъ отбросимъ вычитаемыя, а во множителяхъ знаменателей вторые члены, то всѣ коэффиціенты, увеличатся, и рядъ въ скобкахъ будетъ меньше

$$1+\frac{m}{k}\cdot x+\frac{m^2}{k^2}\cdot x^2+\frac{m^3}{k^3}\cdot x^3+\cdots\cdots,$$

т. е. конечной геометрической прогрессіи, которой знаменатель $=\frac{mx}{k}$, а послѣдній членъ $\left(\frac{m}{k}x\right)^{m-k}$; потому сумма ея $=$

$$\frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}}.$$

Такимъ образомъ остатокъ R_k, заключаясь между 0 и

$$m_k x^k\cdot\frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}},$$

равенъ произведенію послѣдняго выраженія на нѣкоторую положительную правильную дробь ρ; т. е.

$$\text{(I)}\quad R_k=\rho\,.\,m_k x^k\cdot\frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}},\quad \text{гдѣ } 0<\rho<1.$$

2. $x<0$. Нѣкоторые члены будутъ положительные, другіе отрицательные; и если условимся абсолютную величину количества z обозначать знакомъ $[z]$, то сумма въ скобкахъ (2) будетъ содержаться между

$$-\left\{1+\left[\frac{mx}{k}\right]+\left[\frac{mx}{k}\right]^2+\cdots\right\}\quad\text{и}\quad+\left\{1+\left[\frac{mx}{k}\right]+\left[\frac{mx}{k}\right]^2+\cdots\right\},$$

такъ-что легко заключить, что въ этомъ случаѣ

$$\text{(II)}\quad R_k=\rho\,.\,m_k x^k\cdot\frac{1-\left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1}}{1-\left[\frac{mx}{k}\right]},\quad \text{гдѣ } -1<\rho<+1,$$

т. е. ρ есть положит. или отрицат. правильная дробь.

Формулы (I) и (II) можно соединить въ одну, одинаковаго вида съ послѣдней, замѣтивъ только, что при $x>0$ должно быть и $\rho>0$.

Въ частномъ случаѣ, когда $\frac{mx}{k}$ есть правильная дробь, будетъ и

$$1-\left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1}<1;$$

произведеніе этой правильной дроби на дробь $\rho<1$ дастъ также правильную дробь; назвавъ послѣднюю буквою ρ', получимъ для этого случая болѣе простую формулу:

$$\text{(III)}\quad R_k=\frac{\rho'\,.\,m_k x^k}{1-\left[\frac{mx}{k}\right]},\quad \text{гдѣ } -1<\rho'<+1.$$

И здѣсь также при $x>0$ будетъ $\rho'>0$.

2-й случай: *m — дробное положительное число.* — Биноміальный рядъ будетъ безконечный и сходящійся при $-1<x<+1$; тоже самое относится и къ ряду (2).

Возьмемъ произвольное цѣлое положительное число $k > m$, и разсмотримъ опять два случая — положительнаго и отрицат. x, именно: $x = +\xi$, $x = -\xi$.

Въ первомъ случаѣ рядъ (2) будетъ

$$1 - \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+2)(k+2)} \cdot \xi^2 - \dots \dots \dots \quad (3)$$

во второмъ:

$$1 + \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 + \dots \dots \dots \quad (4)$$

Такъ какъ факторы

$$\frac{k-m}{k+1}, \frac{k-m+1}{k+2}, \frac{k-m+2}{k+3}, \dots \dots$$

суть положительныя правильныя дроби, ξ также < 1, то въ обоихъ рядахъ каждый членъ больше слѣдующаго; отсюда легко заключить, что сумма ряда (3) заключается между 1 и $1 - \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi$ и потому положительна; также непосредственно видно, что и сумма (4) положительна. Затѣмъ, очевидно, что сумма перваго менѣе суммы втораго, а эта послѣдняя меньше $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots = \frac{1}{1-\xi}$. Вообразивъ между ξ и 1 еще правильную дробь ($\xi < \varepsilon < 1$), имѣемъ

$$\frac{1}{1-\xi} < \frac{1}{1-\varepsilon};$$

сумма каждаго изъ рядовъ (3) и (4) содержится между 0 и $\frac{1}{1-\varepsilon}$; поэтому ту и другую можно представить подъ общимъ видомъ $\frac{\rho}{1-\varepsilon}$, гдѣ ρ положит. прав. дробь. Итакъ, для остатка имѣемъ формулу

$$\text{(IV)} \quad R_k = \frac{\rho \cdot m_k x^k}{1-\varepsilon},$$

въ которой: $[x] < \varepsilon < 1$, $k > m$, $0 < \rho < 1$, и $[x]$ означаетъ абсолютную величину x.

3-й случай: m — *отрицательное число*; пусть $m = -\lambda$. Рядъ (2) при $x > 0$ будетъ

$$1 - \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 - \dots \dots \dots \quad (5)$$

а при $x < 0$:

$$1 + \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 + \dots \dots \dots \quad (6)$$

Въ виду того, что $\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi$ при неограниченномъ возрастаніи k приближается къ предѣлу $\xi \left[\text{ибо } \lim \frac{k+\lambda}{k+1} \xi = \lim \frac{1+\frac{\lambda}{k}}{1+\frac{1}{k}} \cdot \xi = \xi\right]$, и какъ $\xi < 1$, то можно для k выбрать на столько большое значеніе, чтобы

$$\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi < \varepsilon,$$

гдѣ ε прав. дробь, лежащая между ξ и 1. Въ самомъ дѣлѣ, предыдущее неравенство даетъ

$$k > \frac{\lambda\xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi},$$

и это требованіе всегда м. б. выполнено. Какъ скоро для k выбрано такого рода значеніе, то тѣмъ въ большей мѣрѣ справедливы будутъ неравенства

$$k+1 > \frac{\lambda\xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi}, \quad k+2 > \frac{\lambda\xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi}, \quad \ldots\ldots$$

или

$$\frac{k+\lambda+1}{k+2}\cdot\xi < \varepsilon\,, \quad \frac{k+\lambda+2}{k+3}\cdot\xi < \varepsilon, \ \ldots\ldots$$

слѣдовательно

$$\frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\cdot\xi^2 < \varepsilon^2\,, \quad \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)(k+\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\xi^3 < \varepsilon^3, \text{ и т. д.}$$

Суммы рядовъ (5) и (6) будутъ, слѣд., положительны и менѣе

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots\ldots = \frac{1}{1-\varepsilon},$$

и потому могутъ быть представлены подъ общимъ видомъ $\frac{\rho}{1-\varepsilon}$; и для остатка имѣемъ выраженіе

$$(V) \quad R_k = \frac{\rho\,.\,m_k x^k}{1-\varepsilon},$$

гдѣ $[x] < \varepsilon < 1\,, \quad k > \frac{[mx]-\varepsilon}{\varepsilon - [x]}, \quad 0 < \rho < 1.$

Это изслѣдованіе можно резюмировать такъ:

Если m *не есть цѣлое положительное число и* $x^2 < 1$, *то остатокъ Ньютонова ряда выражается общею формулою*

$$R_k = \frac{\rho\ m_k x^k}{1-\varepsilon},$$

гдѣ $[x] < \varepsilon < 1, \quad 0 < \rho < 1;$

причемъ слѣдуетъ брать: $k > m$, *если* m *положительно, и* $k > \frac{[mx]-\varepsilon}{\varepsilon - [x]}$, *если* m *отрицательно.*

789. Примѣры. — Примѣняя формулу бинома, найдемъ:

1. $(1\pm x)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 \mp \ldots\ldots$

2. $(1\pm y)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{2\,.\,4}y^2 \pm \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}y^3 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}y^4 \pm \ldots\ \ldots$

3. $(a^2\pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}\left\{1 \mp \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,x^4}{2\,.\,4\,.\,a^4} \mp \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,x^6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,a^6} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,x^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,a^8} \mp \ldots\right\}$

и т. п.

790. Приложенія формулы бинома Ньютона. — Укажемъ нѣкоторыя приложенія формулы бинома.

I. *Извлеченіе корней.*—Пусть дребуется извлечь корень порядка r изъ цѣлаго числа N. Разобьемъ N па двѣ части такъ, чтобы первая a^r представляла точную r-овую степень и была бы возможно больше по сравненію съ другою частью b, которую въ этихъ видахъ можно брать и отрицательною. Всегда можно взять $a^r > b$. Получимъ:

$$\sqrt[r]{N}=\sqrt[r]{a^r+b}=\sqrt[r]{a^r\left(1+\frac{b}{a^r}\right)}=a\left(1+\frac{b}{a^r}\right)^{\frac{1}{r}}=a(1+x)^{\frac{1}{r}},\ \text{полагая}\ \frac{b}{a^r}=x.$$

Примѣняя формулу бинома, найдемъ

$$\sqrt[r]{N}=a\left[1+\frac{x}{r}-\frac{(r-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{(r-1)(2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{r}\right)^3-\cdots\cdots\right]$$

Напр. $\sqrt[3]{129}=\sqrt[3]{125+4}=5\left(1+\frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}=$

$$=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{125}-\frac{2}{3\,.\,6}\left(\frac{4}{125}\right)^2+\frac{2\,.\,5}{3\,.\,6\,.\,9}\left(\frac{4}{125}\right)^3-\cdots\cdots\right]$$

$$=u_0+u_1-u_2+u_3-u_2+\cdots\cdots$$

$$u_0+u_1=5+\frac{16}{3\,.\,100}= \qquad 5{,}0533333333$$

$$u_2=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{125}\cdot u_1=\frac{32}{3\,.\,1000}u_1=0{,}0005688889\ (-)$$
$$5{,}0527644444$$

$$u_3=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{125}\,u_2=\frac{16}{9\,.\,100}\,u_2=0{,}0000101136\ (+)$$
$$5{,}0527745580$$

$$u_4=\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{125}\,u_3=\frac{64}{3\,.\,1000}\,u_3=0{,}0000002158\ (-)$$
$$5{,}0527743422 \quad \text{и т. д.}$$

Вслѣдствіе чередованія знаковъ искомый корень всегда заключается между двумя смежными значеніями.

II. *Рѣшеніе уравненія* $ax^2+bx+c=0$, *когда коэффиціентъ* a *весьма малъ.* — Взявъ формулу корней, можемъ ей дать видъ

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{b}{2a}\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Когда корни уравненія дѣйствительные неравные, мы имѣемъ $b^2-4ac>0$, откуда $\frac{4ac}{b^2}<1$; но при a — весьма маломъ дробь эта будетъ весьма мала и получится быстро-сходящійся рядъ; а именно

$$x=-\frac{b}{2a}\left\{1\pm\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3-\cdots\right)\right\}.$$

III. *Раскрытіе неопредѣленностей.* — Приводимъ примѣры.

1. Дробь $\frac{x^m-a^m}{x^k-a^k}$, гдѣ m и n — какія угодно числа, обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x=a$. Полагаемъ $x=a+h$ и разлагаемъ числителя и знаменателя по восходящимъ степенямъ h; затѣмъ полагаемъ $h=0$; так. обр. находимъ:

$$\frac{x^m-a^m}{x^k-a^k}=\frac{(a+h)^m-a^m}{(a+h)^k-a^k}=\frac{a^m\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^m-1\right]}{a^k\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^k-1\right]}=a^{m-k}\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^m-1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^k-1}$$

$$a^{m-k}\cdot\frac{m\cdot\frac{h}{a}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{h^2}{a^2}+\cdots}{k\cdot\frac{h}{a}+\frac{k(k-1)}{1\,.\,1}\,\frac{h^2}{a^2}+\cdots}.$$

Всѣ члены числителя и знаменателя содержатъ множителя $\frac{h}{a}$; сокративъ на $\frac{h}{a}$ и положивъ $h=0$ (чтобы имѣть величину дроби при $x=a$), находимъ, что всѣ члены числителя и знаменателя, кромѣ первыхъ, исчезаютъ, и получается $\frac{m}{k}a^{m-k}$.

2. Дробь $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x=a$. Положивъ $a=x+h$, даемъ ей видъ

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\quad\sqrt{2a+h}}=\frac{\sqrt{a}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{a}+\cdots\right)-\sqrt{a}+\sqrt{h};}{\sqrt{h}\quad\sqrt{2a+h}};$$

сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ числит. и знам. на $\sqrt{h}$, имѣемъ

$$\frac{\frac{\sqrt{h}}{2a}+\cdots+1}{\sqrt{2a+h}},$$

что при $h=0$ обращается въ $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

IV. *Элементарный методъ Жоффруа для вывода рядовъ, служащихъ къ вычисленію* П.

1. Взявъ окружность радіуса $R=1$, проведемъ въ точкѣ E касательную, затѣмъ на окружности возьмемъ нѣкоторую дугу AB и проведемъ радіусы OA, OB, продолженіе которыхъ пусть встрѣчаетъ касательную въ точкахъ C и D. Сравнимъ хорду AB съ дугою AB. Опустивъ изъ центра перпендикуляръ OI, на AB, возьмемъ отношеніе площадей треугольниковъ OAB и OCD, имѣющихъ общій уголъ:

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCD}=\frac{OA\times OB}{OC\times OD}=\frac{AB\times OI}{CD\times OE};\text{ или какъ } R=1,\ \frac{AB}{CD}=\frac{1}{OC\times OD\times OI}.$$

Замѣнивъ OI единицей, и OD линіей OC, мы уменьшимъ вторую часть, и потому $\frac{AB}{CD}>\frac{1}{OC^2}\cdots$ (1): Съ другой стороны $\frac{AB}{CD}<\frac{1}{OD^2}\cdots$ (2). Доказательство неравенства (2) сводится къ доказательству, что $\frac{1}{OC\,.\,OD\,.\,OI}<\frac{1}{OD^2}$, или $\frac{1}{OC\,.\,OI}<\frac{1}{OD}$, или $\frac{1}{OC}<\frac{OI}{OD}$; но, проведя AM параллельно CD (пусть V есть точка пересѣченія AM съ OI, а точка M съ OB), имѣемъ: $\frac{OA}{OC}=\frac{OM}{OD}$, а какъ $OA=1$, и $OM<OV<OI$, то $\frac{1}{OC}<\frac{OI}{OD}$: этимъ неравенство (2) доказано. Итакъ

$$\frac{1}{OC^2}<\frac{AB}{CD}<\frac{1}{OD^2}\cdots(3).$$

Если положимъ, что AB стремится къ нулю, то и CD будетъ приближаться къ нулю, и въ предѣлѣ: $\lim\frac{AB}{CD}=\frac{1}{OD^2}$, ибо OC и OD сливаются въ предѣлѣ.

Если на касательной возьмемъ часть $EP=1$ и соединимъ P съ O, то дуга $EH=\frac{\Pi}{4}$. Для вычисленія этой дуги, раздѣлимъ EP на n равныхъ частей и точки дѣленія F, D, C соединимъ съ центромъ. Эти прямыя дадутъ на окружности вер-

шины неправильной ломаной, которой периметръ будетъ приближаться къ $\frac{\Pi}{4}$ по мѣрѣ увеличенія n. Пусть будетъ AB одна изъ сторонъ этой ломаной; соотвѣтствующій элементъ CD касательной $=\frac{EP}{n}=\frac{1}{n}$. По доказанному, мы имѣемъ

$$\frac{AB}{CD}<\frac{1}{OD^2}; \quad \text{гдѣ} \quad OD^2=1+ED^2.$$

Пусть p будетъ число дѣленій отъ E до D: сл. $ED=p\cdot\frac{1}{n}$, $CD=\frac{1}{n}$; и

$$AB<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{p^2}{n^2}}, \quad \text{или} \quad AB<\frac{n}{n^2+p^2}.$$

Итакъ, периметръ P вписанной ломаной меньше суммы дробей вида $\frac{n}{n^2+p^2}$, гдѣ p нужно измѣнять отъ 0 до $n-1$. Слѣд.

$$P<n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\frac{1}{n^2+3^3}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right]\cdots(4)$$

Въ предѣлѣ, при $n=\infty$, P сливается съ дугою EH, слѣд.

$$\frac{\Pi}{4}=\lim n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right]\cdots(5)$$

Съ другой стороны, мы нашли, что

$$\frac{AB}{CD}>\frac{1}{OC^2}, \quad \text{гдѣ} \quad OC^2=1+EC^2=1+\frac{(p+1)^2}{n^2},$$

откуда

$$AB>\frac{n}{n^2+(p+1)^2}.$$

Взявъ сумму этихъ неравенствъ отъ $p=0$ до $p=n-1$, найдемъ

$$P>n\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]\cdots(6)$$

Сближая неравенства (4) и (6), найдемъ два значенія для P—одно по избытку, другое по недостатку. Эти два значенія разнятся на $n\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\right]=\frac{1}{2n}$; сл. оба они стремятся къ $\frac{\Pi}{4}$. Взявъ n достаточно большимъ, можно вычислить Π съ желаемою точностью.

Формула (5) послужитъ намъ для разложенія Π въ сходящійся рядъ. Взявъ въ скобкахъ общій членъ $\frac{1}{n^2+p^2}$, или $(n^2+p^2)^{-1}$, разложимъ его по формулѣ бинома:

$$\frac{1}{n^2+p^2}=(n^2+p^2)^{-1}=\frac{1}{n^2}-\frac{p^2}{n^4}+\frac{p^4}{n^6}-\frac{p^6}{n^8}+\frac{p^8}{n^{10}}-\cdots$$

Полагая послѣдовательно $p=0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, найдемъ:

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}-\frac{1}{n^8}+\cdots$$

$$\frac{1}{n^2+2^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{2^2}{n^4}+\frac{2^4}{n^6}-\frac{2^6}{n^8}+\cdots$$

$$\frac{1}{n^2+3^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{3^2}{n^2}+\frac{3^4}{n^6}-\frac{3^6}{n^8}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n^2+(n-1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{(n-1)^2}{n^4}+\frac{(n+1)^4}{n^6}-\frac{(n-1)^6}{n^8}+\cdots\cdots$$

Складывая по вертикальнымъ столбцамъ, умножая на n, и обозначая суммы вторыхъ, четвертныхъ, ... степеней $n-1$ первыхъ цѣлыхъ чиселъ знаками S_2 S_4, ... , находимъ:

$$\frac{\Pi}{4}=\lim\left(1-\frac{S_2}{n^3}+\frac{S_4}{n^5}-\frac{S_6}{n^7}+\frac{S_8}{n^9}-\cdots\cdots\right).$$

Но $\lim\frac{S_2}{n^3}=\frac{1}{3}$, $\lim\frac{S_4}{n^5}=\frac{1}{5}$, и т. д. Потому

$$\frac{\Pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots\cdots$$

одинъ изъ рядовъ, которые даетъ интегральное исчисленіе.

2. Взявъ четверть круга OAB, положимъ, что радіусъ $OB=1$. Раздѣлимъ его на n равныхъ частей и изъ точекъ дѣленія проведемъ параллели другому радіусу OA. Такимъ обр. дуга $AB=\frac{\Pi}{2}$ будетъ раздѣлена на n неравныхъ частей; хорды, какъ CD, стягивающія эти дуги, образуютъ вписанную ломаную длины P, предѣломъ которой при $n=\infty$, будетъ служить $\frac{\Pi}{2}$. Пусть EF будетъ дѣленіе радіуса OB, соотвѣтствующее дугѣ CD. Проведя OI перпендикулярно къ хордѣ CD, IH перпендикулярно къ OA, и CG перпендикуляръ на DF, найдемъ изъ подобныхъ треугольниковъ CDG и OIH, что $\frac{CG}{CD}=\frac{OH}{OI}$. Но $CG=EF$, слѣд.

$$\lim\frac{EF}{CD}=\lim\frac{OH}{OI}=\frac{FD}{1};\ \text{а потому}\ \lim CD=\lim\frac{EF}{FD}.$$

Далѣе: $EF=\frac{OB}{n}=\frac{1}{n}$; $FD=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}$, если p означаетъ число дѣленій отъ 0 до F. Отсюда

$$\lim CD=\frac{1}{\lim n\sqrt{1-\frac{p^2}{n^2}}}=\lim\frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}}.$$

Но периметръ P есть сумма элементовъ, такихъ какъ CD, сл.

$$P=\Sigma_0^{n-1}CD=\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

а какъ $\frac{\Pi}{2}=\lim P$, то

$$\frac{\Pi}{2}=\lim\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right].$$

Взявъ общій членъ, имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}}=(n^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}=n^{-1}+\frac{\frac{1}{2}}{1}p^2n^{-3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}p^4n^{-5}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}p^6n^{-7}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{p^2}{n^3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{p^4}{n^5}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{p^6}{n^7}+\cdots\cdots$$

Полагая $p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$, имѣемъ отсюда:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^5}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{n^7}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}=\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{2^2}{n^3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\cdot\frac{2^4}{n^5}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{2^6}{n^7}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}=\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\cdot\frac{(n-1)^4}{n^5}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{(n-1)^6}{n^7}\cdots\cdots$$

Суммируя, найдемъ въ предѣлѣ

$$\frac{\Pi}{2}=\lim\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{S_2}{n^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\cdot\frac{S_4}{n^5}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{S_6}{n^7}+\cdots\cdots\right],$$

или, подставляя $\lim\frac{S_2}{n^3},\ \ldots\ldots,$ окончательно

$$\frac{\Pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots\cdots$$

другой рядъ, предлагаемый въ курсахъ интеграловъ.

791. Задачи.

1. Вычислить: $\sqrt{103}$; $\sqrt[3]{65}$; $\sqrt[4]{260}$; $\sqrt[5]{260}$; $\sqrt[7]{108}$.

2. Разложить: $(a^3-b)^{\frac{4}{5}}$; $(a^2-1)^{\frac{1}{2}}$; $(x^2-b^3)^{\frac{7}{8}}$; $(a^3+1)^{-\frac{1}{2}}$;

$$\frac{1}{(a^3-x^3)^{\frac{2}{3}}};\qquad (2+\sqrt[4]{2x^3})^{-\frac{3}{4}};\qquad \left(2a^{\frac{1}{4}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}}.$$

3. Показать, что общій членъ разложенія $(x+a)^{-m}$ есть

$$T_{r+1}=(-1)^r\cdot\frac{m(m+1)\cdots\cdot(m+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r}\cdot a^r x^{-(m+r)}.$$

4. Показать, что общій членъ $(x-a)^{-m}$ есть

$$T_{r+1}=\frac{m(m+1)\cdots\cdot(m+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r}\,a^r x^{-(m+r)}.$$

5. Показать, что общій членъ разложенія $(x+a)^{\frac{p}{q}}$ есть

$$T_{r+1}=(-1)^r\cdot\frac{p(p-q)\cdots\cdot[p-(r-1)q]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r\cdot q^r}\,a^r x^{\frac{p}{q}-r}.$$

6. Найти общіе члены разложеній:

$(1+x)^{-3}$; $(1+x)^{\frac{7}{3}}$; $(1-x)^{-4}$; $(1-x)^{\frac{1}{n}}$; $(1-px)^{\frac{1}{p}}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}$;

$(1-2x)^{-\frac{7}{2}}$; $\qquad \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$; $\qquad (x-2)^{\frac{p}{q}}$; $\qquad (x+a)^{-\frac{p}{q}}$; $\qquad (x-a)^{-\frac{p}{q}}$.

7. Приложить формулу бинома къ рѣшенію ур-ній n^0 80, § 481.

8. Найти истинное значеніе неопредѣленностей:

a) $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, при $x=0$;

b) $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$, при $x=a$; $\qquad$ *c*) $\dfrac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+x-a}{(1+x-a)^3-1}$ при $x=a$;

d) $\dfrac{x^n}{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}$ при $x=0$; $\qquad$ *e*) $\dfrac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-\sqrt[3]{2a^2x-ax^2}}$ при $x=a$;

f) $\dfrac{\sqrt{2a^2+2x^2}-2\sqrt[3]{a^2x}}{x-a}$ при $x=a$; $\qquad$ *g*) $\dfrac{-x^2+a\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}}$ при $x=a$.

ГЛАВА XLVIII.

Изслѣдованіе свойствъ показательной функціи. — Общія свойства логариѳмовъ. — Системы логариѳмовъ. — Условія соизмѣримости логариѳмовъ.—Приложеніе къ десятичнымъ логариѳмамъ.

Изслѣдованіе свойствъ показательной функціи.

792. Опредѣленіе. Функція a^x, гдѣ a количество постоянное, а x — перемѣнное, называется *показательной функціей.* Изслѣдованіе свойствъ этой функціи служитъ основаніемъ теоріи логариѳмовъ.

Докажемъ, что если $a>0$, то функція непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній x, соизмѣримыхъ или несоизмѣримыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ. Изслѣдованіе это подраздѣляемъ на двѣ части: $a>1$ и $a<1$.

793. Теорема. *Если* a >1, *функція* a^x *возрастаетъ непрерывно отъ* 0 *до* $+\infty$, *когда* x *возрастаетъ непрерывно отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

I. Во-первыхъ, пусть x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, получая *соизмѣримыя* значенія.

1) Если эти значенія будутъ цѣлыя и положительныя, то въ леммѣ I, § 764, уже доказано, что если $m>n$, то и $a^m>a^n$.

2) Пусть x получаетъ соизмѣримыя дробныя значенія $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\alpha'}{\beta'}$, и пусть $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha'}{\beta'}$. Отсюда: $\alpha\beta'>\alpha'\beta$, и такъ какъ это — числа цѣлыя, то по предыдущему: $a^{\alpha\beta'}>a^{\alpha'\beta}$. Извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка $\beta\beta'$, мы не на-

рушимъ смысла неравенства, а потому $\sqrt[\beta\beta']{a^{\alpha\beta'}} > \sqrt[\beta\beta']{a^{\alpha'\beta}}$, или $a^{\frac{\alpha}{\beta}} > a^{\frac{\alpha'}{\beta'}}$, что и требовалось доказать.

3) Дадимъ показателю x отрицательныя значенія, цѣлыя или дробныя; пусть $-m > -n$, гдѣ m и n положительны. Изъ неравенства имѣемъ: $m < n$; а слѣд. $a^m < a^n$; раздѣливъ обѣ части на положит. количество $a^m \cdot a^n$, находимъ:

$$\frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^m}, \quad \text{или} \quad a^{-n} < a^{-m}:$$

то же заключеніе.

II. Наконецъ, дадимъ x-су *несоизмѣримыя* значенія, и прежде всего *опредѣлимъ*, что слѣдуетъ разумѣть подъ степенью съ несоизмѣримымъ показателемъ; напр., что означаетъ $a^{\sqrt{3}}$?

Возьмемъ рядъ приближеній къ $\sqrt{3}$, по недостатку и по избытку, точныхъ до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, . . . , $\frac{1}{10^n}$; получимъ два ряда

$$\begin{array}{cccc} 1{,}7 & 1{,}73 & 1{,}732 & \frac{\alpha}{10^n}, \\ 1{,}8 & 1{,}74 & 1{,}733 & \frac{\alpha+1}{10^n}, \end{array}$$

общимъ предѣломъ которыхъ, по опредѣленію, служитъ $\sqrt{3}$.

Затѣмъ напишемъ два ряда степеней a съ этими показателями:

$$a^{1,7} \quad a^{1,73} \quad a^{1,732} \quad \ldots\ldots \quad a^{\frac{\alpha}{10^n}} \ldots\ldots \quad (1)$$

$$a^{1,8} \quad a^{1,74} \quad a^{1,733} \quad \ldots\ldots \quad a^{\frac{\alpha+1}{10^n}} \ldots\ldots \quad (2)$$

Такъ какъ эти показатели соизмѣримы, то, по вышедоказанному, степени (1) идутъ возрастая; но существуетъ безчисленное множество состояній величины, какихъ эти количества не могутъ достигнуть и превзойти: таковы, напр., соотвѣтствующія имъ числа ряда (2). Необходимо заключить, что числа (1) стремятся къ нѣкоторому предѣлу L. Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что числа ряда (2) стремятся, уменьшаясь, къ нѣкоторому предѣлу L′. Легко видѣть, что оба эти предѣла равны, ибо разность

$$a^{\frac{\alpha+1}{10^n}} - a^{\frac{\alpha}{10^n}}$$

стремится къ нулю, когда n приближается къ безконечности. Дѣйствительно, эта разность $=$

$$a^{\frac{\alpha}{10^n}}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) = a^{\frac{\alpha}{10^n}}\left(\sqrt[10^n]{a} - 1\right),$$

но мы доказали, что предѣломъ для $\sqrt[10^n]{a}$ служитъ 1; слѣд. разсматриваемая разность имѣетъ предѣломъ ноль, ибо множитель $a^{\frac{\alpha}{10^n}}$ конеченъ (онъ, напр., меньше a^2).

Этотъ общій предѣлъ рядовъ (1) и (2) и представляютъ, по опредѣленію, въ видѣ $a^{\sqrt{3}}$. Итакъ:

Степень съ несоизмѣримымъ показателемъ m *отъ положительнаго числа* a *есть предѣлъ, къ которому стремятся степени этого числа, коихъ показатель стремится къ* m, *увеличиваясь или уменьшаясь.*

Докажемъ теперь, что большему несоизмѣримому показателю (при $a>1$) соотвѣтствуетъ и большая степень; напр.

$$a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{\alpha}{10^n}$ и $\frac{\beta}{10^n}$ суть приближенія къ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, точныя до $\frac{1}{10^n}$ по недостатку, то:

$$\frac{\alpha}{10^n} < \sqrt{2} < \frac{\alpha+1}{10^n} \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{10^n} < \sqrt{3} < \frac{\beta+1}{10^n}.$$

Слѣд., по предыдущему:

$$a^{\frac{\alpha}{10^n}} < a^{\frac{\beta+1}{10^n}};$$

а потому и предѣлы, *которые не равны*, не равны въ томъ же порядкѣ, ибо этотъ порядокъ не измѣняется, когда n неограниченно возрастаетъ.

III. *Измѣненія функціи* a^x *непрерывны на всемъ протяженіи измѣненій* x.

Дадимъ конечному x_0 нѣкоторое приращеніе h, и докажемъ, что если это приращеніе будетъ неограниченно приближаться къ нулю, то и приращеніе k функціи y_0 будетъ также неограниченно приближаться къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ:

$$y_0 = a^{x_0}, \quad y_0 + k = a^{x_0+h},$$

сл.

$$k = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

a^{x_0} — величина конечная; остается доказать, что h можно взять настолько близкимъ къ нулю, что a^h будетъ какъ угодно близко къ 1, т. е. что a^h стремится къ предѣлу 1.

Пусть $h>0$; всегда можно найти такое цѣлое положительное число α, чтобы

$$\alpha < \frac{1}{h} < \alpha + 1,$$

ибо α есть частное, точное до 1 отъ раздѣленія $1 : h$, и это частное будетъ неограниченно возрастать по мѣрѣ того, какъ h будетъ приближаться къ нулю. Изъ предыдущаго неравенства выводимъ

$$\frac{1}{\alpha+1} < h < \frac{1}{\alpha};$$

откуда, по вышедоказанному:

$$a^{\frac{1}{\alpha+1}} < a^h < a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но крайнія количества — то же, что $\sqrt[\alpha+1]{a}$ и $\sqrt[\alpha]{a}$; а эти корни, въ силу леммы III § 766, имѣютъ общимъ предѣломъ единицу, когда α неограниченно возрастаетъ;

а слѣд. и a^h, то теор. § 197, имѣетъ тотъ же предѣлъ, т. е. 1, когда h стремится къ нулю. Заключаемъ, что въ формулѣ для k второй множитель стремится къ 0, а сл. и k приближается къ тому же предѣлу, по мѣрѣ приближенія h къ нулю.

IV. *Когда* x *приближается къ* ∞, *то и* a^x *стремится къ* ∞.

Это предложеніе было уже доказано въ леммѣ I, § 764, для показателя цѣлаго. Пусть теперь показатель m есть число дробное или несоизмѣримое; это число будетъ заключаться между двумя послѣдовательными цѣлыми числами p и $p+1$, такъ что

$$a^p < a^m < a^{p+1}.$$

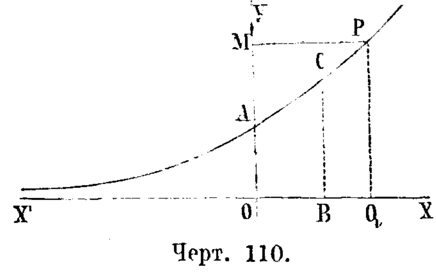
Но, по упомянутой леммѣ, a^p и a^{p+1} стремятся къ ∞, когда p приближается къ ∞, слѣд. и a^m стремится къ ∞, когда m неограниченно возрастаетъ.

Итакъ: a^x, *при* $a>1$, *есть функція непрерывная, возрастающая отъ* 0 *до* $+\infty$, *когда* x *возрастаетъ отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Этотъ результатъ можно представить въ формѣ слѣдующей таблицы:

Таблица А.

x	$-\infty \ldots < \ldots 0$	$\ldots < \ldots 1 < \ldots +\infty$
$y=a^x$	$0 \ldots < \ldots 1$	$\ldots < \ldots a < \ldots +\infty$
	1	2



Черт. 110.

Изображая измѣненія y ординатами кривой, найдемъ кривую, которой ox' служитъ ассимптотою, а ординаты растутъ неограниченно. Эта кривая пересѣкаетъ *ось* y въ такой точкѣ A, для которой 0A=1. Соотвѣтственно абсциссѣ 0B=1 имѣемъ ординату

$$y=\mathrm{BC}=a.$$

793. Теорема.—*Если* $0<a<1$, *то при непрерывномъ измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$, *функція* a^x *непрерывно уменьшается отъ* $+\infty$ *до* 0.

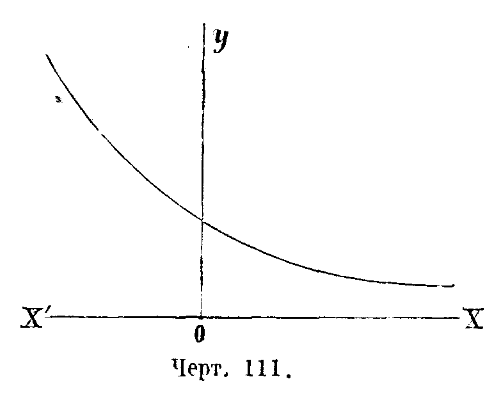
Въ самомъ дѣлѣ, когда $a<1$, то можно положить $a=\frac{1}{a'}$, гдѣ $a'>1$; слѣд. $a^x=\left(\frac{1}{a'}\right)^x=\frac{1}{a'^x}$. Если будемъ здѣсь увеличивать x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то, по предыдущей теоремѣ, a'^x будетъ увеличиваться отъ 0 до $+\infty$, а слѣд. $\frac{1}{a'^x}$ будетъ уменьшаться отъ $\frac{1}{0}$ до $\frac{1}{\infty}$, т. е. отъ ∞ до 0. Что и здѣсь измѣненія функціи a^x непрерывны—это непосредственно вытекаетъ изъ предыдущаго.

Таблица измѣненій будетъ слѣдующая:

Таблица B.

x	$-\infty \dots < \dots 0 \dots < \dots < 1 \dots < \dots +\infty$
$y = a^x$	$+\infty \dots > \dots 1 \dots > \dots > a \dots > \dots \quad 0$
	$\underbrace{\qquad\qquad}_{1} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2}$

Эти измѣненія наглядно изображены измѣненіями ординатъ кривой, для которой положительное направленіе Ox оси абсциссъ служитъ ассимптотою.



Черт. 111.

Логариѳмы.

794. Опредѣленіе. Имѣя ур-ніе $y = a^x$, можно предложить себѣ три вопроса:

1. По даннымъ: основанію a и показателю x вычислить степень a^x или y. Дѣйствіе это называется возвышеніемъ въ степень.

2. По даннымъ: степени y и ея показателю x найти основаніе a. Дѣйствіе это есть извлеченіе корня и выражается знакоположеніемъ: $a = \sqrt[x]{y}$.

3. По даннымъ: *степени* или *числу* y и основанію a найти показателя x. Показатель x называется *логариѳмомъ* числа y при основаніи a. Итакъ: *логариѳмомъ даннаго числа называется показатель степени, въ которую нужно возвысить основаніе, чтобы получить данное число.*

Слово логариѳмъ обозначается знакомъ log; такимъ образомъ, чтобы показать, что x есть логариѳмъ числа y при основаніи a, пишутъ: $x = \log_a y$. Напр. $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, ибо $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и т. п.

795. Выборъ основанія. Главное значеніе логариѳмовъ заключается въ томъ, что они служатъ могущественнымъ средствомъ для облегченія вычисленій. Но чтобы они могли служить для этой цѣли, необходимо имѣть для всѣхъ положительныхъ чиселъ дѣйствительные логариѳмы. Этому требованію удовлетворяетъ не всякое основаніе. И прежде всего легко видѣть, что *отрицательнаго числа нельзя брать за основаніе логариѳмовъ*, ибо при такомъ основаніи не для всѣхъ положительныхъ чиселъ получатся дѣйствительные логариѳмы. Такъ, ур-нію $(-2)^x = 8$ нельзя удовлетворить никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x.

Затѣмъ, 0 не м. б. принятъ за основаніе логариѳмовъ; потому что вторая часть ур-нія $0^x = y$ при положительномъ x всегда даетъ ноль; при $x = 0$, $y = 0^0 = 0^{m-m} = \frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$, т. е. представляетъ неопредѣленность; а при отрицательномъ значеніи x, положивъ $x = -m$, получаемъ $y = 0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0} = \infty$.

Такимъ образомъ, различныя степени нуля не воспроизводятъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ.

Обращаясь къ положительнымъ числамъ, замѣчаемъ, что единица не м. б. принята за основаніе логариѳмовъ, потому что различныя степени единицы равны 1.

Взявъ за основаніе число, большее или меньшее 1, и возвышая его во все возможныя дѣйствительныя степени отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы, какъ видно изъ таблицъ A и B, §§ 792 и 793, получимъ всевозможныя положительныя числа отъ 0 до $+\infty$, такъ что въ этихъ случаяхъ всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ. Итакъ: *за основаніе логариѳмовъ только и можно брать положительныя числа, большія или меньшія 1.*

796. Свойства логариѳмовъ при основаніи большемъ 1. — 1. *Всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ, и только одинъ.* При изслѣдованіи функціи $y=a^x$ (см. таблицу A) мы видѣли, что если измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то y непрерывно возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$. Возьмемъ въ этой строкѣ значеній y-ка какое ниб. число y'; функція y (или a^x), будучи непрерывна и измѣняясь чрезъ всю область положительныхъ чиселъ, пройдетъ, покрайней мѣрѣ, разъ и чрезъ значеніе y', при нѣкоторомъ значеніи x' перемѣннаго x; но функція эта постоянно возрастаетъ, и потому *только одинъ разъ* пройдетъ чрезъ это значеніе y'. Это наглядно обнаруживаетъ и кривая $y=a^x$ (черт. 110); въ самомъ дѣлѣ, пусть $y'=0M$; проведя параллель MP оси $0x$, замѣчаемъ, что она встрѣтитъ кривую только въ одной точкѣ; логариѳмъ числа y' будетъ абсцисса 0Q точки встрѣчи P.

Итакъ: всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ, и только одинъ. Высшая алгебра показываетъ, что кромѣ одного дѣйствительнаго логариѳма всякое положительное число имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ логариѳмовъ.

2. *Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логариѳмовъ.* Дѣйствительно, на всемъ протяженіи строки чиселъ (таблица A) въ ней находятся одни положительныя числа.

3. *Логариѳмы чиселъ, большихъ 1, положительны*; въ самомъ дѣлѣ числамъ отъ 1 до $+\infty$ строки y соотвѣтствуютъ въ строкѣ x числа отъ 0 до $+\infty$.

4. *Логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1, отрицательны*; и въ самомъ дѣлѣ, числамъ отъ 0 до 1 таблицы A соотвѣтствуютъ въ строкѣ логариѳмовъ значенія отъ $-\infty$ до 0.

5. *Логариѳмъ нуля равенъ* $-\infty$.

6. *Логариѳмъ единицы равенъ нулю.*

7. *Логариѳмъ основанія равенъ единицѣ.*

8. *Логариѳмъ* $+\infty$ *равенъ* $+\infty$.

797. Свойства логариѳмовъ при основаніи меньшемъ 1. — Подобно предыдущему, изученіе таблицы B прямо даетъ слѣдующіе результаты:

1. *Всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ, и только одинъ.*

2. *Логариѳмы чиселъ, большихъ* 1, *отрицательны, а чиселъ меньшихъ единицы — положительны.*

3. *Логариѳмъ основанія равенъ единицѣ.*

4. *Логариѳмъ единицы равенъ нулю.*

5. *Логариѳмъ нуля равенъ* $+\infty$.

6. *Логариѳмъ* $+\infty$ *равенъ* $-\infty$.

7. *Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логариѳмовъ.*

780. Теоремы, на которыхъ основано употребленіе логариѳмовъ въ вычисленіяхъ.

I. *Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ производителей.* Пусть имѣемъ числа N, N′, N″, имѣющія логариѳмами: x, x', x'' при одномъ и томъ же основаніи a.

Зависимость между числами и ихъ логариѳмами выражается уравненіями

$$N=a^x \;.\;.\;.\;.\; (1) \qquad N'=a^{x'} \;.\;.\;.\;.\; (2) \qquad N''=a^{x''} \;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Перемноживъ эти уравненія, получаемъ

$$NN'N''=a^{x+x'+x''},$$

изъ котораго видно, что $x+x'+x''$ есть логариѳмъ числа NN′N″:

$$\lg\,(NN'N'')=x+x'+x'';$$

но изъ данныхъ ур-ній имѣемъ: $x=\lg N$, $x'=\lg N'$, $x''=\lg N''$; подстановка въ предыдущее ур-ніе даетъ, такимъ образомъ:

$$\lg\,(NN'N'')=\lg N+\lg N'+\lg N'',$$

и теорема доказана.

II. *Логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя.*—Раздѣливъ ур-ніе (1) на (2), имѣемъ:

$$\frac{N}{N'}=\frac{a^x}{a^{x'}}=a^{x-x'},$$

откуда, по опредѣленію логариѳма:

$$\lg\left(\frac{N}{N'}\right)=x-x'=\lg N-\lg N'.$$

Если $N=1$, то $\lg N=0$, и предыдущее равенство даетъ:

$$\lg\left(\frac{1}{N'}\right)=-\lg N',$$

т. е. *логариѳмъ дроби, имѣющей числителемъ* 1, *равенъ отрицательному логариѳму знаменателя.*

III. *Логариѳмъ степени съ какимъ угодно показателемъ равенъ произведенію показателя на логариѳмъ возвышаемаго числа.* — Возвысивъ обѣ части ур-нія (1) въ степень m, имѣемъ

$$N^m=(a^x)^m=a^{xm}, \quad \text{откуда} \quad \log\,(N^m)=mx=m\,.\lg N,$$

и теорема доказана.

IV. *Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкореннаго числа, раздѣленному на показателя корня.* — Извлекая изъ обѣихъ частей ур-нія (1) корень порядка p, имѣемъ:

$$\sqrt[p]{N}=\sqrt[p]{a^x}=a^{\frac{x}{p}}, \ \text{откуда} \ \lg\,(\sqrt[p]{N})=\frac{x}{p}=\frac{\lg N}{p}.$$

Эти теоремы даютъ возможность значительно облегчать выполненіе болѣе трудныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Для этого должны быть построены таблицы, содержащія логариѳмы чиселъ. Имѣя такія таблицы, и зная, что логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ производителей, мы можемъ умноженіе чиселъ свести на простѣйшее дѣйствіе — сложеніе ихъ логариѳмовъ: такимъ образомъ мы опредѣлимъ log произведенія, а для отысканія самаго произведенія останется взять изъ таблицъ число, соотвѣтствующее найденному логариѳму. Дѣленіе чиселъ, при помощи теоремы II, сводится къ простѣйшему дѣйствію — вычитанія логариѳмовъ; возвышеніе въ степень, при помощи теор. III, приводится къ умноженію, а извлеченіе корня, по теор. IV, къ дѣленію. Однимъ словомъ, при помощи логариѳмовъ, дѣйствія высшаго порядка надъ числами приводятся къ дѣйствіямъ нисшаго порядка надъ ихъ логариѳмами.

799. Теорема. — *Если числа составляютъ прогрессію геометрическую, то ихъ логариѳмы составятъ прогрессію ариѳметическую.*

Пусть имѣемъ геометрическую прогрессію

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ldots : aq^n.$$

Взявъ логариѳмъ каждаго члена, имѣемъ:

$$\lg a;\ \lg a + \lg q;\ \lg a + 2\lg q;\ \lg a + 3\lg q;\ \ldots\ldots;\ \lg a + n\lg q:$$

а это есть рядъ, составляющій ариѳметическую прогрессію съ разностью, равною $\lg q$.

Свойство это было взято *Неперомъ* за исходный пунктъ въ теоріи логариѳмовъ.

800. Если надъ данными количествами, входящими въ составъ выраженія, подлежащаго вычисленію, указаны только дѣйствія дѣленія, умноженія, возведенія въ степень и извлеченія корня, то такое выраженіе м. б. вычислено съ помощію логариѳмовъ. Пусть напр.

$$x = \frac{a^6 \times \sqrt[5]{c^9}}{b^2 \times \sqrt[4]{d^3 f^5}}.$$

Примѣняя теоремы о логариѳмѣ дроби и т. д., послѣдовательно получаемъ:

$$\lg x = \lg\,[a^6 \times \sqrt[5]{c^9}] - \lg\,[b^2 \times \sqrt[4]{d^3 f^5}]$$
$$= \lg a^6 + \lg \sqrt[5]{c^9} - (\lg b^2 + \lg \sqrt[4]{d^3 f^5})$$
$$= 6\lg a + \frac{9}{5}\lg c - 2\lg b - \frac{1}{4}(3\lg d + 5\lg f),$$

Такимъ образомъ $\lg x$ будетъ извѣстенъ; а по $\lg x$ опредѣлится и соотвѣтствующее число, какъ скоро будутъ даны численныя значенія a, b, c, d и f.

Дѣйствіе, имѣющее цѣлью составленіе выраженія для логариѳма по данному выраженію для числа называется *логариѳмированіемъ*.

Обратно, по данному выраженію логариѳма можно составить выраженіе для соотвѣтствующаго числа, пользуясь тѣми же теоремами. Пусть напр., дано

$$\lg x = \frac{3}{4}\,[\lg\,(a+b) + \lg\,(a-b) + \lg\,(a^2+b^2)] - \frac{1}{3}\lg\,(1+a^2).$$

Послѣдовательно имѣемъ:

$$\lg x = \frac{3}{4} \lg (a+b)(a-b)(a^2+b^2) - \frac{1}{3} \lg (1+a^2)$$
$$= \frac{3}{4} \lg [(a^2-b^2)(a^2+b^2)] - \frac{1}{3} \lg (1+a^2)$$
$$= \frac{3}{4} \lg (a^4-b^4) - \frac{1}{3} \lg (1+a^2) = \lg \sqrt[4]{(a^4-b^4)^3} - \lg \sqrt[3]{1+a^2}$$
$$= \lg \frac{\sqrt[4]{(a^4-b^4)^3}}{\sqrt[3]{1+a^2}}.$$

801. Системы логариѳмовъ. — Очевидно, что одно и тоже число имѣетъ сколько угодно логариѳмовъ, если брать различныя основанія; но *отношеніе логариѳмовъ одного и того же числа при двухъ различныхъ основаніяхъ одинаково для всѣхъ чиселъ*. Въ самомъ дѣлѣ, пусть число N при основаніяхъ a и b имѣетъ логариѳмы α и β, т. е.

$$N = a^\alpha, \quad N = b^\beta, \quad \text{откуда} \quad a^\alpha = b^\beta.$$

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей по основанію a, и замѣчая, что $\log_a a = 1$, имѣемъ:

$$\alpha = \beta \,.\, \log_a b, \quad \text{откуда} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \log_a b, \quad \text{или} \quad \frac{\log_a N}{\log_b N} = \lg_a b.$$

т. е. отношеніе логариѳмовъ числа N по основаніямъ a и b равно постоянной величинѣ $\lg_a b$.

Изъ послѣдняго равенства получаемъ

$$\lg_b N = (\lg_a N) \times \frac{1}{\lg_a b},$$

т. е. *если построена таблица логариѳмовъ при основаніи* a, *то изъ нея легко вывести логариѳмы по другому основанію* b: *стоитъ только старые логариѳмы помножить на дробь* $\frac{1}{\lg_a b}$, *равную единицѣ, дѣленной на log новаго основанія, взятый по старому*. Этотъ постоянный множитель называется *модулемъ* перехода отъ старой системы къ новой.

Изобрѣтатель логариѳмовъ, *Неперъ*, взялъ за основаніе построенной имъ системы несоизмѣримое число, равное приблизительно 2,718281828459045.... Это число обыкновенно обозначаютъ буквою e; а самые логариѳмы называютъ *неперовыми*, или *натуральными*, или *гиперболическими*; они имѣютъ важное значеніе въ высшемъ анализѣ. Но для практическихъ вычисленій они не удобны; поэтому уже самъ Неперъ посовѣтовалъ своему современнику *Бриггу* вычислить новые логариѳмы, принявъ за основаніе число 10. Этими послѣдними логариѳмами и пользуются обыкновенно для практическихъ вычисленій, и называютъ *обыкновенными*, или *десятичными* логариѳмами.

802. Условія соизмѣримости логариѳмовъ. — Замѣтивъ, что всякое число можно представить въ видѣ произведенія степеней его первоначальныхъ множителей, опредѣлимъ условія, при которыхъ логариѳмъ даннаго числа N будетъ

соизмѣримымъ числомъ, ограничиваясь разсмотрѣніемъ случая, когда основаніе цѣлое положительное число.

1. Требуется опредѣлить условія, при которыхъ цѣлое число N имѣетъ соизмѣримый логариѳмъ $\frac{m}{n}$, т. е. при какихъ условіяхъ возможно равенство $N=a^{\frac{m}{n}}$, или, по возвышеніи обѣихъ частей въ n-ую степень, равенство

$$N^n=a^m \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Пусть основаніе a разлагается на первоначальные множители α, β, γ соотвѣтственно въ степеняхъ r, s, t, такъ-что $a=\alpha^r\beta^s\gamma^t$; равенство (1) будетъ

$$N^n=\alpha^{mr}\beta^{ms}\gamma^{mt} \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Такъ какъ вторая часть его дѣлится на α, β и γ, то и первая должна дѣлиться на тѣже числа, иначе вышло бы, что дробь равна цѣлому. Сверхъ того, N не можетъ содержать другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ α, β и γ, по той причинѣ. Слѣд. должно положить $N=\alpha^{r_1}\beta^{s_1}\gamma^{t_1}$. Ур. (2) приметъ видъ:

$$\alpha^{nr_1}\beta^{ns_1}\gamma^{nt_1}=\alpha^{mr}\beta^{ms}\gamma^{mt}.$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы было $nr_1=mr$; $ns_1=ms$; $nt_1=mt$, откуда $\frac{r}{r_1}=\frac{s}{s_1}=\frac{t}{t_1}$; заключаемъ: *чтобы цѣлое число* N *при цѣломъ основаніи* a *имѣло соизмѣримый логариѳмъ, необходимо, чтобы* a *и* N *состояли изъ одинаковыхъ первоначальныхъ множителей, и что-бы показатели этихъ множителей были пропорціональны между собою.*

2. Пусть дана неправильная дробь $\frac{c}{d}$, гдѣ $c>d$. Пусть логариѳмъ (въ данномъ случаѣ — положительный) будетъ = соизмѣримой дроби $\frac{m}{n}$; имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}}=\frac{c}{d}, \quad \text{или} \quad a^m=\frac{c^n}{d^n}.$$

Но n-ая степень несократимой дроби $\frac{c}{d}$ есть также дробь несократимая, и слѣд. не можетъ равняться цѣлому числу a^m: допущеніе невозможно, а потому заключаемъ; *при цѣломъ основаніи неправильная дробь не можетъ имѣть соизмѣримаго логариѳма.*

3. Пусть, наконецъ, данное число есть дробь правильная $\frac{c}{d}$, гдѣ слѣдовательно $c<d$. При $a>1$ логариѳмы правильныхъ дробей отрицательны; пусть этотъ отрицательный логариѳмъ есть $-\frac{m}{n}$. Въ такомъ случаѣ

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{c}{d}, \quad \text{откуда} \quad a^m=\frac{d^n}{c^n}.$$

Такъ какъ a^m — число цѣлое, то предыдущее равенство возможно только при $c^n=1$, или $c=1$; но въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$a^m=d^n,$$

а такое равенство возможно только тогда, когда d и a состоятъ изъ одинаковыхъ первоначальныхъ множителей и показатели этихъ множителей пропорціональны. Итакъ:

При цѣломъ основаніи логариѳмы правильныхъ дробей несоизмѣримы, за исключеніемъ такихъ дробей, у которыхъ числитель $=1$, а знаменатель состоитъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей какъ и основаніе, а показатели этихъ множителей пропорціональны.

803. *Приложеніе.* — Приложимъ эти изысканія къ случаю обыкновенныхъ или бригговыхъ логариѳмовъ. Здѣсь основаніе равно $10=2\times 5$. Слѣд., по доказанному, изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ только тѣ имѣютъ соизмѣримые логариѳмы, которыя состоятъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей, какъ и основаніе, въ данномъ случаѣ, изъ 2 и 5, т. е. числа вида $2^r.5^s$. Притомъ, r и s должны быть пропорціональны показателямъ основанія, т. е. должно быть: $r:1=s:1$, или $r=s$. Такимъ образомъ, цѣлое число, имѣющее при основаніи $=10$ соизмѣримый логариѳмъ, имѣетъ видъ $2^r.5^r=(2.5)^r=10^r$, т. е. представляемъ точную степень 10-ти.

Затѣмъ, неправильныя дроби имѣютъ логариѳмы несоизмѣримые; а изъ правильныхъ дробей только тѣ имѣютъ соизмѣримые логариѳмы, у которыхъ числитель $=1$, а знаменатель есть точная степень 10-ти, т. е. дроби $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$

ГЛАВА XLIX.

Вычисленіе логариѳмовъ. — Ряды для показательной функціи и логариѳмическіе.

804. Опредѣленіе предѣла $\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}\right]_{\omega=\infty}$. — Исходнымъ пунктомъ послужитъ неравенство

$$a^n<\frac{b^{n+1}}{a-(n+1)(a-b)}, \text{ имѣющее мѣсто при } a>b>\frac{n}{n+1}\cdot a \cdots (1).$$

Положивъ $a=1+\frac{1}{n}$, $b=1+\frac{1}{n+1}$, что удовлетворяетъ условію (1), получимъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdots \cdots (2)$$

Полагая здѣсь $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, находимъ неравенства

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1<\left(1+\frac{1}{2}\right)^2<\left(1+\frac{1}{3}\right)^3<\left(1+\frac{1}{4}\right)^4< \ldots$$

Эти неравенства показываютъ, что степень $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ постоянно возрастаетъ, въ то время какъ ω проходитъ область натуральныхъ чиселъ.

Неравенство (1) дастъ далѣе при $a=1+\frac{1}{2p}$, $b=1$ и $n=p$:

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)^p<2,$$

откуда, возвышая въ квадратъ, имѣемъ

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p}<4,$$

Тѣмъ болѣе, въ силу неравенства (2), имѣемъ

$$\left(1+\frac{1}{2p-1}\right)^{2p-1}<\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p}<4.$$

Итакъ, будетъ-ли m четное или нечетное, во всякомъ случаѣ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<4$. Слѣд., выраженіе $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$, увеличиваясь, не можетъ сдѣлаться безконечно-большимъ, а потому оно должно приближаться къ нѣкоторому предѣлу, который >2, но <4. Это число принято обозначать буквою e. Такимъ образомъ при цѣломъ положительномъ ω, приближающемся къ ∞:

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right]=e.$$

Если ω не есть цѣлое число, но положительно, то всегда можно дать два цѣлыя положительныя послѣдовательныя числа m и $m+1$, между которыми лежитъ ω; тогда очевидна справедливость неравенствъ

$$1+\frac{1}{m+1}<1+\frac{1}{\omega}<1+\frac{1}{m}\cdot$$

Возвышая первый биномъ въ m-ую, второй въ степень ω, третій въ степень $m+1$, не нарушимъ смысла неравенствъ, а потому

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m<\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Умноживъ и раздѣливъ первое на $1+\frac{1}{m+1}$, а третье разложивъ на множители, находимъ

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}<\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot$$

Переходя къ предѣлу, увеличиваемъ ω до ∞, тогда и m и $m+1$ будутъ приближаться къ ∞. По теоремѣ о предѣлѣ частнаго, имѣемъ

$$\lim\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}\right\}_{m=\infty}=\frac{\lim\left[1+\frac{1}{m+1}\right]^{m+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)}=e,$$

ибо по доказанному для m цѣлаго: $\lim\left[1+\frac{1}{m+1}\right]^{m+1}_{m=\infty}=e$; $\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=1$; затѣмъ, $\lim\ \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]_{m=\infty}=e.1=e.$

Это означаетъ, что $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ заключается между двумя перемѣнными, имѣющими общій предѣлъ e, слѣд. и

$$\lim \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=e,$$

и при дробномъ положительномъ ω, приближающемся къ ∞.

Если ω — число отрицательное, то можно положить $\omega=-(\rho+1)$, гдѣ ρ — положительное, неограниченно возрастающее цѣлое или дробное число. Имѣемъ:

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1-\frac{1}{\rho+1}\right)^{-(\rho+1)}=\left[\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{-1}\right]^{\rho+1}=\left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^{\rho+1}=\left(1+\frac{1}{\rho}\right)^{\rho+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\rho}\right)^{\rho}\left(1+\frac{1}{\rho}\right).$$

Первый множитель приближается къ предѣлу e, второй къ 1, сл.

$$\lim \left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e.$$

Такимъ образомъ послѣднее равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ неограниченно-возрастающемъ дѣйствительномъ ω.

Нерѣдко этому равенству даютъ другой видъ, подставляя $\frac{1}{\omega}=\delta$; имѣемъ.

$$\lim \left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]=e,$$

гдѣ δ означаетъ количество, приближающееся къ нулю.

Теперь легко уже опредѣлить предѣлъ общаго выраженія

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{\frac{\omega}{z}}\right)^{\omega},$$

гдѣ z — нѣкоторое дѣйствительное количество.

Дробь $\frac{\omega}{z}$ вмѣстѣ съ ω стремится къ ∞, и потому, положивъ $\frac{\omega}{z}=\omega'$, откуда $\omega=\omega' z$, имѣемъ

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega' z}=\left[\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'}\right]^{z}.$$

Но предѣлъ степени (z) перемѣннаго равенъ той же степени предѣла этого перемѣннаго, такъ что послѣднее выраженіе, въ предѣлѣ, даетъ e^z. Итакъ

$$\lim \left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}\right]_{\omega=\infty}=e^{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

805. Разложеніе e^z въ рядъ. Послѣднее уравненіе показываетъ, что e^z есть предѣлъ, къ которому стремится $\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}$ при неограниченномъ увеличеніи m. Для нахожденія этого предѣла нужно разложить $\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}$ по формулѣ бинома и затѣмъ положить $m=\infty$.

По формулѣ (III) предыдущей статьи, полагая m цѣлымъ и положительнымъ и $k>mx$, имѣемъ:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)}x^{k-1} + \\ + \frac{m(m-1)\ldots[m-(k-1)]}{1.2.3\ldots k}\cdot\rho\,\frac{x^k}{1-\left[\frac{mx}{k}\right]},$$

гдѣ ρ означаетъ положительную правильную дробь. Чтобы по этой формулѣ написать разложеніе для $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$, нужно, очевидно, положить $x=\frac{z}{m}$ и $k>z$. Найдемъ

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1 + z + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}z^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}z^3 + \cdots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{m}\right)}{1.2.3\ldots(k-1)}z^{k-1} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots k}\cdot\rho\,\frac{z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}.$$

Мы ищемъ предѣлъ $\left(1+\frac{z}{m}\right)$ при $m=\infty$; для этого увеличиваемъ неограниченно m, не измѣняя произвольнаго цѣлаго числа k. Если перемѣнныя равны, то равны и предѣлы ихъ, а потому приравниваемъ предѣлы обѣихъ частей равенства. Предѣлъ лѣвой части есть e^z, а въ правой дроби $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, ..., $\frac{k-1}{m}$ имѣютъ общимъ предѣломъ нуль; слѣд.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\rho z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}, \qquad \text{(II)}$$

причемъ $k>z$, $0<\rho<1$.

Такимъ образомъ мы получили конечную строку для e^z, — съ остаточнымъ членомъ; но изъ нея уже легко вывести безконечный рядъ для e^z. Для этого переносимъ остаточный членъ въ первую часть:

$$e^z - \frac{\rho}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}\cdot\frac{z^k}{1.2\ldots k} = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{1.2\ldots(k-1)} \cdots \text{(III)}$$

и увеличиваемъ k, означающее число членовъ второй части, до безконечности. Выше мы доказали, что $\lim\left[\frac{z^k}{1.2.3\ldots k}\right]_{k=\infty}=0$, слѣд. предыдущее равенство обращается въ безконечный рядъ

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2,3} + \cdots\cdots \text{(IV)}$$

гдѣ z какая угодно конечная величина.

806. Рядъ для e; опредѣленіе числовой величины e; несоизмѣримость числа e. Если, въ частности, положимъ $z=1$, то ряды (II) и (IV) дадутъ:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\cdot\frac{\rho}{k-1} \quad \text{(V)}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots\cdots \text{(VI)}$$

Съ этими рядами связаны существенныя замѣчанія. Во-первыхъ, что касается фор-

мулы (V), то она служитъ для численнаго опредѣленія e, причемъ точность можетъ быть доведена до какой угодно степени выборомъ достаточно большаго значенія для k. Такъ, при $k=11$ найдемъ.

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}=2,7182818011,$$

причемъ остатокъ $=\frac{1}{1.2.3\ldots.10}\cdot\frac{\rho}{10}=0,0000000276\rho$; слѣд. если дадимъ ρ его наименьшее значеніе 0, а затѣмъ наибольшее его значеніе 1, то найдемъ

$$2,7182818011<e<2,7182818287;$$

откуда, взявъ $e=2,7182818$, будемъ имѣть его величину точно до 7-го десятичнаго знака включительно. Это число было принято *Неперомъ* за основаніе предложенной имъ системы логариѳмовъ, по причинѣ, которая вскорѣ будетъ указана.

Съ помощію формулы (VI) рѣшается вопросъ о томъ, есть-ли e число соизмѣримое или несоизмѣримое. Сумма ряда VI, начиная съ третьяго числа, т. е.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\cdots\cdots\cdots \quad \text{(VII)}$$

менѣе суммы ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\frac{1}{2.2.2.2}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1;$$

слѣд. сумма (VII) есть *правильная* дробь. Допустимъ, что эта дробь соизмѣрима и $=\frac{p}{q}$, т. е.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots=\frac{p}{q},$$

гдѣ p и $q>p$ цѣлыя положительныя числа. Умноживъ обѣ части на $2.3.4\ldots.q$, получимъ

$$3.4.5\ldots.q+4.5.6\ldots.q+5.6\ldots.q+\cdots$$

$$+1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots=p.2.3.4\ldots.(q-1).$$

Сумма членовъ до $\frac{1}{q+1}$ есть сумма цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, дающая нѣкоторое цѣлое положительное число M; вторая часть также есть цѣлое положительное число, которое назовемъ N; сл.

$$M+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots=N.$$

Но сумма $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$ меньше $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots$ $=\frac{1}{q+1}:\left(1-\frac{1}{q+1}\right)=\frac{1}{q}$, а какъ $q>1$, то разсматриваемая сумма меньше 1. Такимъ образомъ, цѣлое число M, сложенное съ правильною дробью, должно давать цѣлое число N; но это невозможно, а потому сумма ряда (VI) не можетъ равняться никакой соизмѣримой дроби, а сл. и e есть число несоизмѣримое.

Приведенное доказательство несоизмѣримости числа e принадлежитъ *Стенвиллю*.

807. Разложеніе a^x. Мы нашли разложеніе показательной функціи съ основаніемъ e; пусть основаніе будетъ какое угодно число a. Положивъ $e^z=a^x$, и взявъ отъ обѣихъ частей логариѳмъ по какому угодно основанію, получимъ

$$z.\log e=x.\log a,\quad \text{откуда}\quad z=\frac{x.\log a}{\log e}.$$

Подставивъ въ формулу (IV) a^x вмѣсто e^z, и $\frac{x\log a}{\log e}$ вмѣсто z, найдемъ

$$a^x=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{x.\log a}{\log e}+\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{x.\log a}{\log e}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x.\log a}{\log e}\right)^3+\cdots\cdots \quad (\text{VIII})$$

Основаніе, по которому взяты логариѳмы, здѣсь совершенно произвольно; взявъ e за основаніе, и замѣтивъ, что въ такомъ случаѣ $\log_e e=1$, найдемъ (условившись обозначать Неперовы логариѳмы характеристикою l):

$$a^x=1+x.la+\frac{(xla)^2}{1\,.\,2}+\frac{(xla)^3}{1.2.3}+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{IX})$$

Взявъ за основаніе a, найдемъ рядъ

$$a^x=1+\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{x}{lg_a\,e}\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{lg_a\,e}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{lg_a\,e}\right)^3+\cdots\cdots \quad (\text{X})$$

Послѣдній выводъ имѣетъ то значеніе, что даетъ возможность находить число по данному логариѳму; въ самомъ дѣлѣ, изъ ур-нія $a^x=y$ имѣемъ $x=lg_a\,y$; слѣд.

$$y=1+\frac{1}{1}\left(\frac{lg_a\,y}{lg_a\,e}\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{lg_a\,y}{lg_a\,e}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{XI})$$

Въ случаѣ $a=e$ имѣемъ:

$$y=1+ly+\frac{1}{1.2}(ly)^2+\frac{1}{1.2.3}(ly)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{XII})$$

Отсюда и видно, что логариѳмическая система съ основаніемъ e есть простѣйшая, а потому наиболѣе естественная; вслѣдствіе этого она и названа *натуральною*.

808. Логариѳмическіе ряды. — Исходнымъ пунктомъ послужитъ $\lim\left(\frac{a^\Theta-1}{\Theta}\right)$ при $\Theta=o$.

Пусть Θ означаетъ число, приближающееся къ нулю; тогда a^Θ будетъ имѣть предѣломъ 1, а разность $a^\Theta-1$ ноль; поэтому можно положить $a^\Theta-1=\delta$, гдѣ δ исчезаетъ вмѣстѣ съ Θ. Написавъ это ур-ніе въ видѣ

$$a^\Theta=1+\delta,\ \text{заключаемъ, что}\ \Theta=log_a(1+\delta).$$

Раздѣливъ обѣ части ур-нія $a^\Theta-1=\delta$ на Θ, найдемъ выраженіе, предѣлъ котораго ищемъ, именно

$$\frac{a^\Theta-1}{\Theta}=\frac{\delta}{\Theta}=\frac{\delta}{lg_a(1+\delta)}=\frac{1}{\frac{1}{\delta}lg_a(1+\delta)}=\frac{1}{lg_a\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]}.$$

Переходя къ предѣлу, полагаемъ $\Theta=o$; вмѣстѣ съ этимъ и $\delta=o$; въ первой части получимъ неопредѣленность $\frac{0}{0}$, а послѣднее выраженіе раскроетъ истинное значеніе этой неопредѣленности; именно получимъ

$$\lim\frac{a^\Theta-1}{\Theta}=\frac{1}{lg_a\,e}\ldots.(1)$$

Это равенство можно представить въ болѣе удобной формѣ, принявъ за основаніе логариѳмовъ число e. Логариѳмируя обѣ части равенства $a = e^{l_a}$ по основанію a, находимъ

$$1 = la.log_a e, \text{ или } \frac{1}{log_a e} = la.$$

Подстановка въ (1) дастъ

$$\lim \frac{a^\theta - 1}{\Theta} = la.$$

Положивъ $a = 1 + x$, имѣемъ

$$l(1+x) = \lim \frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta},$$

откуда видна возможность примѣненія биноміальнаго ряда для разложенія $l(1+x)$. При разложеніи $(1+x)^\delta$ будемъ разумѣть подъ δ нѣкоторую положительную правильную дробь; слѣд. x должны подчинить условію $-1 < x < +1$. Примѣняя формулу (V) остатка биноміальнаго ряда. т. е. взявъ

$$k > \delta, \quad [x] < \varepsilon < 1, \quad o < \varsigma < 1,$$

имѣемъ

$$(1+x)^\delta = 1 + \frac{\delta}{1} \cdot x + \frac{\delta(\delta-1)}{1.2} x^2 + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\delta(\delta-1)\ldots[\delta-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)} x^{k-1} + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)\ldots[\delta-(k-1]}{1.2.3\ldots\ldots k} \frac{\varsigma x^k}{1-\varepsilon}$$

Перенеся 1 въ первую часть и раздѣливъ ур-ніе на δ, получимъ

$$\frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{1} x + \frac{\delta - 1}{1.2} x^2 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots[\delta-(k-2)]}{1.2.3\ldots\ldots(k-1} x^{k-1} + \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots[\delta-(k-1)]}{1.2.3\ldots\ldots k} \cdot \frac{\varsigma x^k}{1-\varepsilon}.$$

Переходя къ предѣлу, т. е. полагая $\delta = o$, и замѣчая, что равенство перемѣнныхъ ведетъ за собою равенство ихъ предѣловъ, причемъ предѣлъ первой части $= l(1+x)$, получаемъ:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{\varsigma x^k}{1-\varepsilon}.$$

Это — рядъ конечный; для полученія безконечнаго ряда переносимъ остатокъ въ первую часть

$$l(1+x) - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{\varsigma x^k}{1-\varepsilon} = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1} \cdot x^{k-1},$$

и заставляемъ произвольное цѣлое k, означающее число членовъ, возрастать до безконечности. Такъ какъ x есть правильная дробь (положит. или отрицат.), то $\lim x^k = o$, такъ-что въ предѣлѣ первая часть обратится въ $l(1+x)$, а вторая дастъ безконечный рядъ; находимъ разложеніе

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$
$$-1 < x < +1.$$

Рядъ этотъ впервые встрѣчается у *Меркатора* (1686). Если въ формулѣ (2) вмѣсто x подставимъ $-x$, то получимъ:

$$l(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Такъ какъ въ рядахъ (2) и (3) x есть правильная дробь, то они могутъ служить только для вычисленія логариѳмовъ чиселъ, меньшихъ 2. Чтобы получить ряды для вычисленія логариѳмовъ какихъ угодно чиселъ, притомъ ряды съ сильнѣйшею сходимостью, вычтемъ формулу (3) изъ (2); получимъ

$$l(1+x)-l(1-x)=l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\cdots\right]\cdots (4)$$

рядъ, сходящійся при $-1<x<+1$.

Положивъ $\frac{1+x}{1-x}=z$, откуда $x=\frac{z-1}{z+1}$, получимъ изъ ур. (4) слѣдующее:

$$lz=2\left[\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots\right]\cdots\cdots (5)$$

имѣющее мѣсто при всякомъ положительномъ z, ибо въ такомъ случаѣ x всегда будетъ правильною дробью. При небольшомъ z формула (5) всего удобнѣе; такъ напр. при $z=2$ получимъ:

$$l2=2\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\cdots\right].$$

Если рядъ, заключенный въ скобки, прервать на членѣ $\frac{1}{m.\ 3^m}$, гдѣ m нѣкоторое нечетное число, то остатокъ

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}}+\frac{1}{(m+4).3^{m+4}}+\frac{1}{(m+6).3^{m+6}}+\cdots\cdots$$

будетъ меньше

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}}\left\{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots\right\}=$$

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{8(m+2).3^m}.$$

Такимъ образомъ, если ς будетъ неизвѣстная правильная положительная дробь, то

$$l2=2\left[\frac{1}{1.3^1}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots+\frac{1}{m.3^m}\right]+\frac{\varsigma}{4(m+2).3^m}.$$

Послѣдовательнымъ нахожденіемъ степеней $\frac{1}{3}$ получимъ, что остатокъ $\frac{1}{4.17.3^{15}}=0,000000001$, слѣд., положивъ $m=15$, получимъ величину l2 вѣрно до 8 десятичныхъ знаковъ, именно: $l2=0.69314718$.

Если извѣстенъ la, то найдемъ $l(a+b)$ на основаніи замѣчанія, что

$$l(a+b)=l\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]=la+l\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

причемъ послѣдній l можно разложить по формулѣ (2), если только абсолютная величина b меньше a; найдемъ

$$l(a+b)=la+\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\cdots\cdots$$

рядъ сходящійся при $a^2>b^2$.

Такимъ образомъ можно, напр., найти $l3$, положивъ $a=2$, $b=1$ и воспользовавшись уже вычисленною величиною $l2$.

Болѣе удобная формула для вычисленія $l(a+b)$ получается изъ замѣчанія, что

$$l(a+b)=la+l\left(1+\frac{b}{a}\right)=la+l\left[\frac{1+\dfrac{b}{2a+b}}{1-\dfrac{b}{2a+b}}\right];$$

разложивъ послѣдній l по формулѣ (4), получимъ

$$l(a+b)=la+2\left\{\frac{b}{2a+b}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdot(6)$$

рядъ сходящійся при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ a и b, потому-что тогда $\frac{b}{2a+b}$ будетъ правильною дробью. Положивъ $a=2$, $b=1$, получимъ

$$l3=l2+2\left[\frac{2}{10}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5+\cdots\cdot\right].$$

Прервавъ рядъ на m-ой степени, можемъ опредѣлить остатокъ вышеуказаннымъ способомъ, и найдемъ, что онъ меньше

$$\frac{1}{24(m+2)}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^m.$$

При $m=9$ остатокъ будетъ такъ малъ, что не повліяетъ на 8-ое десятичнео мѣсто; это дастъ: $l3=1{,}09861229$, и т. д.

Вычисленіе обыкновенныхъ логариѳмовъ. *Модуль.* — Построивъ указаннымъ путемъ таблицы натуральныхъ логариѳмовъ, можно изъ нихъ безъ труда вывести логариѳмы по какой угодно системѣ; для этого надо натуральные логариѳмы помножить на модуль, равный, какъ извѣстно, $\frac{1}{la}$; его обозначаютъ чрезъ M_a. Для обыкновенныхъ логариѳмовъ $a=10$; $l10=l2+l5=2{,}30258509$; сл. $M_{10}=\frac{1}{l10}=0{,}43429448$. На это число и нужно множить натуральные логариѳмы для вычисленія обыкновенныхъ.

809. Теорема, *на которой основано употребленіе табличекъ пропорціональныхъ частей.*

Изъ формулы (6) предыдущаго § имѣемъ

$$l(a+b)-la=l\left(\frac{a+b}{a}\right)=2\left\{\frac{b}{2a+b}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3+\cdots\cdot\right\}$$

Для полученія логариѳма по другой системѣ, напр. по десятичной, надо этотъ логариѳмъ помножить на модуль M_{10}; умножая обѣ части на M_{10}, получимъ

$$M_{10}.l\left(\frac{a+b}{a}\right),\text{ или } log_{10}\left(\frac{a+b}{a}\right)=2M_{10}\left\{\frac{b}{2a+b}+\cdots\cdot\right\}$$

Удержавъ здѣсь только первый членъ $\frac{b}{2a+b}$ и обративъ его дѣленіемъ въ $\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{2a(2a+b)}$, получимъ приблизительную формулу

$$lg(a+b)-loga=\frac{b.M_{10}}{a}-\frac{b^2.M_{10}}{a(2a+b)}.$$

При $b\leqq 1$ и $a\geqq 10000$ второй членъ меньше 0,0000000002, а потому можно имъ пренебречь; отъ этого получимъ:

$$log(a+b)-loga=\frac{b.M_{10}}{a},$$

Подставивъ въ эту фермулу вмѣсто b другое число $b' \leq 1$, будемъ имѣть

$$log(a+b')-loga=\frac{b'.M_{10}}{a}.$$

Раздѣливъ это равенство на предыдущее, имѣемъ пропорцію

$$\frac{log(a+b')-loga}{log(a+b)-loga}=\frac{b'}{b},$$

слѣд. *разности между логариѳмами пропорціональны разностямъ между числами*, если только разности чиселъ не превышаютъ 1, а числа не менѣе 10000, ибо только при этихъ условіяхъ и могла быть установлена послѣдняя пропорція.

ГЛАВА L.

О десятичныхъ логариѳмахъ.—Ихъ отличительныя свойства.—Расположеніе и употребленіе таблицъ.—Вычисленія при помощи логариѳмовъ.—Задачи.

Отличительныя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

810. Вычисленіе этихъ логариѳмовъ приводится къ рѣшенію показательнаго уравненія $10^x=N$. Такъ какъ здѣсь основаніе больше единицы, то логариѳмы чиселъ, большихъ 1, положительны, логариѳмы же чиселъ, меньшихъ 1, отрицательны; затѣмъ, логариѳмъ основанія равенъ 1, а $log\ 1=0$.

811. **Логариѳмы чиселъ, большихъ 1**. Возвышая 10 въ цѣлыя положительныя степени, имѣемъ:

$10^0=1$; $10^1=10$; $10^2=100$; $10^3=1000$; $10^4=10000$; ......; $10^n=10^n$

Отсюда, замѣчая, что показатели основанія 10 суть логариѳмы вторыхъ частей, имѣемъ:

$lg1=0$; $lg10=1$; $lg100=2$; $lg1000=3$; $lg10000=4$; ....; $lg10^n=n$.

Заключаемъ, что *логариѳмъ числа, состоящаго изъ 1 съ нулями, т. е. точной степени 10, равенъ числу нулей при единицѣ*. Эти точныя степени 10 суть единственныя числа, большія 1, которыхъ логариѳмы *соизмѣримы*; всѣ остальныя числа большія 1 (цѣлыя и неправильныя дроби), какъ мы уже знаемъ, имѣютъ логариѳмы *несоизмѣримые*, которые вычислить можно только приблизительно. Ихъ обыкновенно выражаютъ десятичными дробями.

Пусть, напр., имѣемъ число 452,48. Число это больше 100, но меньше 1000, слѣд. его логариѳмъ содержится между log 100 и log 1000, т. е. между 2 и 3, и потому равенъ $2+$несоизмѣримая прав. дробь. Цѣлое число 2 называется *характеристикою*, дробь — *мантиссою*. Изъ предыдущаго примѣра заключаемъ, что *характеристика логариѳма числа большаго 1, равна числу цифръ безъ 1 въ цѣлой части даннаго числа.*

Докажемъ, что это правило для опредѣленія характеристики логариѳма даннаго числа — общее. Пусть число A содержитъ въ своей цѣлой части n цифръ; въ такомъ случаѣ

$$10^{n-1} \geqq A < 10^n,$$

ибо 10^{n-1} и 10^n суть наименьшія числа о n и $n+1$ цифрахъ.

Отсюда

$$n-1 \geqq lgA < n,$$

такъ какъ большему числу соотвѣтствуетъ и большій логариѳмъ; итакъ, цѣлая часть lgA равна $n-1$, т. е. числу цифръ безъ единицы въ цѣлой части числа.

812. Логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1. Возвышая 10 въ цѣлыя отрицательныя степени, находимъ:

$$10^{-1}=\frac{1}{10};\quad 10^{-2}=\frac{1}{100};\quad 10^{-3}=\frac{1}{1000};\ \cdots\cdots;\ 10^{-n}=\frac{1}{10^n}.$$

Отсюда: $lg\,\frac{1}{10}=-1;\ lg\,\frac{1}{100}=-2;\ lg\,\frac{1}{1000}=-3;\ \cdots;\ lg\,\frac{1}{10^n}=-n.$

Слѣд. логариѳмъ дроби, которой числитель $=1$, а знаменатель есть точная степень 10, соизмѣримъ и *равенъ отрицательному числу нулей знаменателя.* Всѣ остальныя числа, меньшія 1, какъ доказано, имѣютъ логариѳмы несоизмѣримые и отрицательные.

Эти отрицательные логариѳмы представляютъ въ видѣ бинома, котораго цѣлый членъ отрицателенъ, а дробный положителенъ. Пусть, напр., данъ отрицательный логариѳмъ.

$$-3{,}4827129.$$

Разбивъ его на два члена: $-3-0{,}4827129$, вычтемъ и придадимъ 1; дадимъ логариѳму видъ:

$$-4+(1-0{,}4827129),\quad \text{или}\quad -4+0{,}5172871$$

Очевидно, разность между 1 и десятичною дробью получимъ, вычтя всѣ десятичныя цифры изъ 9, исключая послѣднюю значащую цифру справа, которую вычитаемъ изъ 10. Преобразованный биномъ условились писать въ видѣ $\bar{4}{,}5172871$, помѣщая знакъ (—) надъ цѣлою частью, къ которой онъ относится; цѣлая часть называется *отрицательною характеристикою.*

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ мантисса есть положительная десятичная часть логариѳма, а характеристика всегда цѣлое число, положительное, либо отрицательное, смотря по тому, больше данное число единицы, или меньше ея.

Примѣчаніе. Разность между 1 и дробью 0,4827129 называется *дополненіемъ* этой дроби до 1. Вообще дополненіемъ числа до 1, 2, 3 . . . . , 10 называется разность между 1, 2, 3, ... , 10 и даннымъ числомъ. Чтобы получить дополненіе логариѳма, надо послѣднюю цифру мантиссы вычесть изъ 10, а остальныя ея цифры изъ 9. Употребленіе дополненій даетъ возможность избѣгать вычитанія логариѳмовъ, замѣняя это дѣйствіе приданіемъ ихъ дополненій; это особенно выгодно въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится дѣлать нѣсколько вычитаній.

Отрицательная характеристика логариѳма положительнаго числа, меньшаго 1, содержитъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько находится нулей слѣва отъ первой значущей цифры числа, включая сюда и 0 цѣлыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ число А, имѣющее слѣва отъ первой значущей цифры n нулей; имѣемъ:

$$\frac{1}{10^n} \gtrless A < \frac{1}{10^{n-1}},$$

ибо значущія цифры числа начинаются съ десятичнаго знака порядка n. Отсюда

$$-n \gtrless lg\,A < -(n-1),$$

ибо большему числу принадлежитъ и большій логариѳмъ.

Заключаемъ, что lg A равенъ $(-n)$, или этому числу, увеличенному положительною правильною дробью, ибо этотъ логариѳмъ меньше $-n+1$; иначе говоря,

$$lg\,A = -n + k, \quad \text{гдѣ} \quad 0 < k < 1;$$

слѣд. $(-n)$, по опредѣленію, и есть *отрицательная характеристика* lg A. Такъ, логариѳмы чиселъ 0,529 и 0,00743 имѣютъ отрицательныя характеристики: -1 и -3.

813. *Если число увеличимъ въ 10, 100, 1000, . . ., вообще въ 10^n разъ, то характеристика логариѳма его увеличится на 1, на 2, . . . , вообще на n единицъ, мантисса же останется безъ перемѣны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$lg\,A = k + m, \qquad 0 < m < 1,$$

гдѣ k — характеристика, положительная или отрицательная, а m — мантисса логариѳма А. Имѣемъ

$$log\,(A \times 10^p) = log\,A + p = k + m + p = (k + p) + m;$$

но p — число цѣлое, слѣд. и $(k+p)$ есть цѣлое, положительное или отрицательное, число; и какъ $0 < m < 1$, то $(k+p)$ есть характеристика, а m — мантисса логариѳма числа $A \times 10^p$. Итакъ, мантисса осталась безъ перемѣны, а характеристика увеличилась p единицами.

814. *Если число уменьшимъ въ 10, 100, 1000, ... , вообще, въ 10^p разъ, то характеристика логариѳма уменьшится на 1, на 2, на 3, ... , вообще на* p *единицъ, мантисса же останется безъ перемѣны.*

Въ самомъ дѣлѣ, $lg\left(\frac{A}{10^p}\right) = lg\,A - lg\,10^p = k + m - p = (k-p) + m$,

т. е характеристика уменьшилась p единицами.

Отсюда слѣдуетъ, что обѣ части логариѳма, *характеристика* и *мантисса*, суть функціи, рѣзко различающіяся между собою. Мантисса зависитъ отъ абсолютнаго значенія цифръ и отъ порядка, въ которомъ онѣ слѣдуютъ одна за другою; характеристика же зависитъ только отъ положенія запятой, т. е. отъ относительнаго значенія цифръ. Отъ перемѣщенія запятой мантисса не измѣняется; измѣняется только характеристика.

Расположеніе и употребленіе таблицъ логариѳмовъ.

815. Разсмотримъ употребленіе таблицъ логариѳмовъ *Бремикера.* Эти таблицы содержатъ логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100009, вычисленные съ семью десятичными знаками; такимъ образомъ изъ этихъ таблицъ можно прямо брать логариѳмы чиселъ одно — , дву — , . . . пяти значныхъ.

816. Расположеніе таблицъ. Страницы отъ второй до пятой включительно содержатъ логариѳмы чиселъ отъ 1 до 1000, причемъ въ таблицахъ (какъ и далѣе) помѣщены только мантиссы, такъ какъ характеристику легко опредѣлить по числу цифръ числа. Колонны подъ литерою N содержатъ числа, противъ которыхъ подъ знакомъ Log находятся мантиссы соотвѣтствующихъ логариѳмовъ. Съ шестой до 185-й страницы расположеніе таблицъ таково: въ колоннѣ подъ литерою N находятся первыя четыре цифры чиселъ, пятыя же цифры помѣщены въ первой горизонтальной строкѣ: 0, 1, 2, . . . , 9; мантиссы же расположены такимъ образомъ: такъ какъ первыя три цифры мантиссы одинаковы для нѣсколькихъ послѣдовательныхъ логариѳмовъ чиселъ, то они написаны одинъ разъ для всѣхъ этихъ чиселъ, противъ наименьшаго числа колонны N, къ которой они принадлежатъ и въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 0. Послѣдніе четыре знака мантиссы помѣщены противъ четырехъ первыхъ цифръ числа и въ вертикальной колоннѣ, имѣющей въ заголовкѣ пятую цифру числа. Сверхъ того всѣ страницы, начиная съ 6-й, содержатъ таблички подъ литерами P.P: это — *таблички пропорціональныхъ частей*, употребленіе которыхъ будетъ указано въ своемъ мѣстѣ.

817. Употребленіе таблицъ. Помощію таблицъ рѣшаются два вопроса: 1) о нахожденіи логариѳма даннаго числа и 2) о нахожденіи числа, соотвѣтствующаго данному логариѳму.

Первый вопросъ.

Нахожденіе логариѳма цѣлаго числа.

818. Первый случай: *данное число находится въ таблицахъ.*—Пусть требуется найти *log* 36459. На стр. 58 находимъ первыя три цифры мантиссы: 561; послѣднія же четыре цифры ея помѣщены въ горизонтальной строкѣ противъ числа 3645 и въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 9, именно: 8048; характеристика же логариѳма, по § 811, равна 4, слѣд. *log*36459=4,5618048.

Пусть еще требуется найти *log*48868; первыя три цифры мантиссы (стр. 83) суть 688; для послѣднихъ четырехъ, на пересѣченіи горизонт. строки противъ числа 4886 съ вертик. колонною подъ цифрою 9, находимъ $\overline{0}246$; черта надъ первою изъ этихъ цифръ показываетъ, что предшествующая цифра (8) мантиссы должна быть увеличена на 1. Такимъ образомъ имѣемъ: *log*48868 = = 4,6890246.

Когда за пятью значущими цифрами числа слѣдуютъ нули, напр. 48868000, то, замѣчая, что это число больше 48868 въ 1000 разъ, на основаніи § 813,

заключаемъ, что его логариѳмъ больше логариѳма 48868 на 3 единицы, такъ что $lg\,48868000 = 7{,}6890246$.

819. Второй случай: *данное число не содержится въ таблицахъ.* Пусть требуется найти log числа, содержащаго болѣе пяти цифръ, напр. числа 41592687. Такъ какъ логариѳма этого числа нѣтъ въ таблицахъ, то отдѣляемъ отъ правой руки къ лѣвой столько десятичныхъ цифръ, чтобы слѣва отъ запятой получилось пятизначное число; такимъ образомъ имѣемъ 41592,687. Это число, будучи въ 1000 разъ меньше даннаго, имѣетъ логариѳмъ съ тою же мантиссою, какъ и заданное число. Находимъ мантиссу логариѳма числа 41592,687. Число это заключается между 41592 и 41593, откуда изъ таблицъ имѣемъ, что логариѳмъ его содержится между

$$log\,41592 = 4{,}6190098 \quad \text{и} \quad log\,41593 = 4{,}6190202.$$

Разность между числами 41592 и 41593 равна 1, а между соотвѣтствующими логариѳмами—составляетъ 0,0000104. Отсюда видно, что если къ ближайшему меньшему числу придадимъ 1, то къ соотвѣтствующему логариѳму слѣдуетъ придать 0,0000104. Но намъ нужно ближайшее м. ч. увеличить не на цѣлую единицу, а на 0,687; спрашивается: на сколько соотвѣтственно этому придется увеличить ближ. меньш. логар. 4,6190098? Для рѣшенія вопроса замѣчаемъ, что по § 809: если разности между числами не превышаютъ 1 (что у насъ и есть), то разности между логариѳмами соотвѣтствующихъ чиселъ, большихъ 10000, пропорціональны разностямъ между числами. Основываясь на этомъ и называя искомую разность между $lg\,41592{,}687$ и $lg\,41592$ буквою x, имѣемъ пропорцію

$$x : 0{,}0000104 = 0{,}687 : 1, \quad \text{откуда} \quad x = 0{,}0000104 \times 0{,}687.$$

Умноженіе этихъ дробей дѣлается сокращенно при помощи слѣдующей таблички пропорціональныхъ частей (стр. 69):

	10 4
1	10.4
2	20.8
3	31 2
4	41.6
5	52.0
6	62.4
7	72.8
8	83.2
9	93.6

Въ ней помѣщены сокращенно, для сбереженія мѣста, произведенія 104 десятимилліонныхъ на 0,1;0,2, . . . 0,9; причемъ точками въ этихъ произведеніяхъ отдѣлены десятимилліонныя доли отъ стомилліонныхъ долей. Такимъ образомъ эта табличка поставлена вмѣсто слѣдующей:

	0,0000104
0,1	0,00000104
0,2	0,00000208
0,3	0,00000312
0,4	0,00000416
0,5	0,00000520
0,6	0,00000624
0,7	0,00000728
0,8	0,00000832
0,9	0,00000936

При помощи ея можно прямо выписать частныя произведенія дроби 0,0000104 на 0,6, затѣмъ на 0,08 и наконецъ на 0,007. Первое изъ этихъ произведеній прямо беремъ изъ таблички, отдѣливъ стомилліонныя доли точкою, что даетъ 0,0000062.4. Уменьшивъ произведеніе 0,0000104 на 0,8, т. е. 0,00000832 въ 10 разъ, имѣемъ произведеніе табличной разности на 0,08 или 0,0000008.32. Наконецъ, уменьшивъ произведеніе табл. разн. на 0,7 во сто разъ, имѣемъ произведеніе ея на 0,007, именно 0,0000000.728.

Сложивъ эти частныя произведенія, имѣемъ

$$0{,}0000104 \times 0{,}687 = 0{,}0000071.448.$$

Это то произведеніе и нужно придать къ логариѳму ближ. мен. числа, для полученія $log\,41592{,}687$; имѣемъ

$$lg\,41592{,}687 = 4{,}6190169.448.$$

Цифры 448, слѣдующія за десятимилліонными, откидываемъ, такъ какъ табличныя мантиссы имѣютъ только 7 десятичн. знаковъ; приэтомъ, если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ произведенія меньше 5, какъ въ нашемъ случаѣ, то послѣднюю сохраненную цифру произведенія оставляемъ безъ перемѣны; въ противномъ случаѣ, послѣднюю сохраненную цифру произведенія увеличиваютъ на 1. Такимъ образомъ:

$$lg\,41592{,}687 = 4{,}6190169.$$

Такъ какъ данное число въ 1000 разъ больше 41592,687, то оставивъ мантиссу найденнаго логариѳма безъ перемѣны, увеличиваемъ характеристику на 3 единицы; такимъ образомъ:

$$lg\,41592687 = 7{,}6190169.$$

На практикѣ вычисленіе располагаютъ такъ:

	$log\,41592$	$= 4{,}6190098$
пропорц. часть для	0,6	62,4
« « «	0,08	8,34
« « «	0,007	0,728
	$log\,41592{,}687$	$= 4{,}6190169{,}448$
Наконецъ	$lg\,41592687$	$= 7{,}6190169.$

820. *Примѣчаніе*. Пусть требуется найти log числа, содержащаго болѣе 8 цифръ, напр. 72546892548. Характеристика логариѳма равна 10, а мантисса тоже, что у логариѳма дроби 72546,892548. Опредѣляемъ мантиссу вышеизложеннымъ способомъ:

$log\,72546$	$= 10{,}8606135$
0,8	48.0
9	5.40
2	0.12
5	0.030
4	0.0024
8	0.00048
$lg\,72546892548$	$= 10{,}8606189.$

Изъ этого примѣра видно, что уже 8-я цифра даннаго числа увеличиваетъ мантиссу только на 0,12, а потому не оказываетъ вліянія на 7-ую десятичную цифру мантиссы; поэтому, при отыскиваніи log числа, содержащаго болѣе 8 цифръ, употребляютъ только первыя 8 цифръ, остальныя же, какъ невліяющія на семизначную мантиссу, замѣняютъ нулями, или просто не пользуются ими при опредѣленіи поправки. Въ самомъ дѣлѣ, наибольшая табличная разность $= 0{,}0000435$, а потому девятая цифра числа, даже если она имѣетъ наиб. величину, т. е. $= 9$, измѣнитъ мантиссу только на $0{,}0000435 \times 0{,}0009 =$

0,00000003915, т. е. менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$ единицы 7-го десятичнаго мѣста; и это—въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, когда и табл. разн. и девятая цифра числа имѣютъ наибольшія величины.

Изъ сказаннаго выводимъ *правило: если число имѣетъ болѣе 5 цифръ, то, отдѣливъ слѣва запятою 5 цифръ, подыскиваютъ логариѳмъ полученнаго пятизначнаго числа и придаютъ къ нему произведеніе табличной разности на три первые десятичные знака, составленное вышеуказаннымъ способомъ.*

Опредѣленіе логариѳма дроби.

821. Сначала разсмотримъ нахожденіе логариѳмовъ десятичныхъ дробей. Пусть требуется найти $log\,347{,}84762$. Замѣтивъ, что характеристика искомаго логариѳма $=2$, а мантисса таже, что и у логариѳма числа 34784,762, имѣемъ:

$$
\begin{array}{lr}
lg\,34784 & =2{,}5413795 \\
0{,}7 & 87.5 \\
0{,}06 & 7.5 \\
0{,}002 & 0.25 \\
\hline
\end{array}
$$

Откуда $$log\,347{,}84762=2{,}5413890.$$

Для втораго примѣра пусть требуется найти логариѳмъ десятичной дроби, меньшей 1, напр. $log\,0{,}0076806$. Имѣемъ:

$$log\,0{,}0076806=log\,\frac{76806}{10000000}=lg\,76806-lg\,10000000$$
$$=4{,}8853951-7.$$

Вычитая 7 изъ 4, чтобы мантиссу оставить положительною, получимъ отрицательную характеристику — 3, такъ что

$$log\,0{,}0076806=\overline{3}{,}8853951;$$

знакъ минусъ ставится *надъ* характеристикою для указанія, что только характеристика отрицательна.

Отсюда *правило: для нахожденія логариѳма десятичной дроби меньшей 1, беремъ мантиссу логариѳма числителя дроби, а въ характеристикѣ ставимъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько въ лѣвой части дроби находится нулей, включая сюда и 0 цѣлыхъ.*

822. Пусть требуется найти log обыкновенной дроби, напр. $\frac{8}{11}$. Имѣемъ:

$$log\,\frac{8}{11}=lg\,8-lg\,11=0{,}9030900-1{,}0413927=-0{,}1383027;$$

чтобы сдѣлать мантиссу положительною, поступаемъ по указаніямъ § 812 и находимъ: $\overline{1}{,}8616973$.

Тотъ же результатъ получимъ, обращая $\frac{8}{11}$ въ десятичную дробь и ограничиваясь восемью цифрами въ числителѣ; находимъ 0,72727272. Слѣд.

$$lg\,\frac{8}{11} = lg\,0{,}72727272 \quad = \overline{1}{,}8616957$$

для	0,2	11.8
	0,07	4.13
	0,002	0.118

$$lg\,\frac{8}{11} \quad = \overline{1}{,}8616973.$$

Второй вопросъ.

Нахожденіе числа, соотвѣтствующаго данному логариѳму.

823. 1-й случай: *мантисса даннаго логариѳма находится въ таблицахъ.* Пусть $log\,x = 3{,}7592749$; найти x? Находимъ прежде всего число 759, образуемое первыми тремя цифрами мантиссы: оно находится въ колоннѣ 0 на стр. 100; опускаясь въ этой же колоннѣ, доходимъ до числа 2144 — ближайшаго, меньшаго по сравненію съ 2749; наконецъ, въ горизонтальной строкѣ, начинающейся съ 2144, находимъ число 2749 въ колоннѣ подъ цифрою 8. Такъ какъ 2749 находится въ горизонт. строкѣ противъ числа 5744, то, выписываемъ это число и приписавъ къ нему справа цифру 8, получаемъ 57448, а какъ характеристика даннаго логариѳма равна 3, то въ цѣлой части искомаго числа должно быть три цифры; а потому $x = 5744{,}8$.

824. 2-й случай: *данная мантисса не содержится въ таблицахъ.* Пусть $log\,x = 3{,}4592786$; найти x? Замѣнивъ характеристику 3 четырьмя, замѣчаемъ, что логариѳмъ 4,4592786 содержится между логариѳмами

4.4592869, которому соотвѣтствуетъ число 28793
и 4.4592718, « « « 28792.

Разность этихъ логариѳмовъ $= 0{,}0000151$, а разность соотвѣтствующихъ чиселъ $= 1$. Заключаемъ, что если ближайшую меньшую мантиссу увеличить на 0,0000151, то бл. м. ч. 28792 надо увеличить на 1; но мантисса логариѳма 4,4592786 превышаетъ меньшую мантиссу только на 0,0000068; спрашивается, на какое число y, соотвѣтственно этому, искомое число x превышаетъ 28792? Зная теорему, что разности между числами пропорціональны разностямъ между логариѳмами, если первыя не превышаютъ 1, какъ и есть въ данномъ случаѣ, заключаемъ, что y во столько разъ меньше 1, во сколько 0,0000068 меньше 0,0000151, откуда пропорція

$y : 1 = 0{,}0000068 : 0{,}0000151$, или по умноженіи обоихъ членовъ втораго отношенія на 10000000:

$$y : 1 = 68 : 151, \quad \text{откуда} \quad y = 68 : 151.$$

Это частное вычисляемъ съ 2 десятичными знаками, такъ какъ остальные будутъ невѣрны; а для вычисленія пользуемся табличкой пропорціональныхъ частей для числа 151 (стр. 43), въ которой числа 15,1, 30.2,..., 135.9 суть произведенія изъ 151 на 0,1, 0,2,...., 0.9. Намъ нужно найти, на сколько слѣдуетъ помножить 151 для полученія 68? Табличка показываетъ, что, умноживъ

151 на 0,4, находимъ 60,4—число ближ. меньше къ 68; и такъ, въ частномъ имѣемъ, во первыхъ, 0,4; вычтя произведеніе 60,4 изъ дѣлимаго, находимъ остатокъ 7,6. Наша табличка показываетъ далѣе, что, умноживъ 151 на 0,5, находимъ 75,5; а слѣд., умноживъ 151 на 0,05, найдемъ произведеніе 7,55 — ближ. м. къ остатку 7,6. Итакъ, въ частномъ имѣемъ еще 5 сотыхъ долей. Окончательно $y = 0,45$. Прибавивъ эту дробь къ 28792, имѣемъ 28792,45—число, соотвѣтствующее логариѳму 4,4592786; а уменьшивъ это число въ 10 разъ, найдемъ число, соотвѣтствующее данному логариѳму. Итакъ $x = 2879,245$.

На практикѣ вычисленіе располагается такъ:

$$
\begin{array}{lr}
 & \log x = 3,4592786 \\
\text{для } 28792 \ldots\ldots\ldots & 2718 \\
\hline
 & 68 \\
4 \ldots\ldots\ldots & 60.4 \\
\hline
 & 7.6 \\
5 \ldots\ldots\ldots & 7.55 \\
\hline
x = 2879,245. &
\end{array}
$$

Еще примѣръ. Укажемъ нахожденіе числа, соотвѣтствующаго логариѳму съ отрицательною характеристикою (къ этому виду всегда слѣдуетъ приводить отрицательный логариѳмъ, такъ какъ въ таблицахъ нѣтъ отрицательныхъ мантиссъ). Пусть $\log x = \overline{2},4832107$, найти x? Придавая 6 къ данному $\log$, чтобы сдѣлать характеристику равною 4, и вычитая 6, имѣемъ

$$\log x = 4,48322107 - 6 = 4,4832107 - lg\, 1000000.$$

Находимъ число, соотвѣтствующее логариѳму $= 4,4832107$.

$$
\begin{array}{lr}
 & \log y = 4,4832107 \\
30423 & 020 \\
\hline
 & 87 \\
6 & 85,8 \\
\hline
 & 1,2 \\
1 & 1,43 \\
\hline
y = 30423,61. &
\end{array}
$$

Итакъ: $\log x = \log 30423,61 - lg\, 1000000 = lg \frac{30423,61}{1000000} = lg\, 0,03042361$, откуда $x = 0,03042361$.

Отсюда *правило*: *для нахожденія числа, соотвѣтствующаго логариѳму съ отрицательною характеристикою, опредѣляемъ число, соотвѣтствующее положительной мантиссѣ, приписываемъ съ лѣвой стороны его столько нулей, сколько единицъ въ характеристикѣ, и первый слѣва ноль отдѣляемъ запятою.*

Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательною характеристикою.

825. Сложеніе. — Сложеніе мантиссъ, какъ чиселъ положительныхъ, не представляетъ никакихъ затрудненій; что касается характеристикъ, то ихъ соединяютъ по правилу приведенія подобныхъ членовъ. Напр.:

$$\begin{array}{r} 3,2173980 \\ \overline{7},8239172 \\ 2,3758630 \\ \hline -2+1,4171782 \end{array}$$ или $\overline{1},4171782$.

826. Вычитаніе.—Пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$\begin{array}{r} \overline{5},4567895 \\ \overline{2},6356789 \\ \hline \overline{4},8211106 \end{array}$$

Прибавляя къ мантиссѣ уменьшаемаго 1, а къ характеристикѣ — 1, по вычитаніи мантиссъ находимъ 0,8211106; затѣмъ, вычтя изъ — 6 характеристику — 2 вычитаемаго, находимъ въ остаткѣ — 4; полный остатокъ $=\overline{4},8211106$.

827. Умноженіе.—Пусть требуется $\overline{2},4367894 \times 5$. Имѣемъ:

$$(-2+0,4367894)\times 5 = -10+2,1839470=\overline{8},1839470.$$

828. Дѣленіе.—Пусть требуется раздѣлить $\overline{6},2466724$ на 2. Имѣемъ:

$$(-6+0,2466724):2=-3+0,1233362=\overline{3},1233362.$$

Еслибы тотъ же логариѳмъ требовалось раздѣлить на 5, то, чтобы характеристика дѣлилась на-цѣло на 5, слѣдуетъ къ ней придать — 4, а потому къ мантиссѣ надо придать + 4; такимъ образомъ имѣемъ:

$$\overline{6},2466724:5=(-10+4,2466724):5=-2+0,8493345=\overline{2},8493345.$$

Когда встрѣчается случай дѣленія логариѳмовъ съ отрицательными характеристиками, слѣдуетъ мантиссы ихъ дѣлать отрицательными. Напр. при раздѣленіи $\overline{2},3142890:1,3156782$ замѣчаемъ, что дѣлимое $=-1,6857110$, а потому частное приводится къ $-1,6857110:1,3156782$.

829. Употребленіе дополненій.—Когда въ выраженіи содержится нѣсколько вычитаемыхъ логариѳмовъ, удобнѣе замѣнять ихъ дополненіями, такъ какъ приэтомъ оба дѣйствія — сложенія и вычитанія логариѳмовъ приводятся къ одному дѣйствію — сложенія ихъ. Такъ, употребляя дополненія до 10, замѣняемъ выраженіе

$$lg\,a - lg\,b + lg\,c - lg\,d - lg\,e$$

равнымъ ему выраженіемъ

$$lg\,a + (10 - lg\,b) + lg\,c + (10 - lg\,d) + (10 - lg\,e) - 30$$

или $$lg\,a + \mathrm{Co}\,lg\,b + lg\,c + \mathrm{Co}\,lg\,d + \mathrm{Co}\,lg\,e - 30,$$

причемъ Co есть сокращеніе слова complementum—дополненіе.

830. Примѣры вычисленій съ логариѳмами.—I. Вычислить $x=\frac{\pi}{173}$. Логариѳмируя, имѣемъ: $lg\,x = lg\,\pi - lg\,173 = 0,4971499 - 2,2380461$, или, замѣнивъ вычитаемый *log* его дополненіемъ до 3:

$$lg\,x = 0,4971499 + (3 - 2,3380461) - 3 = 0,4971499 + 0,7609539 - 3 = \overline{2},2591038.$$

Отсюда $x = 0,0181595$.

II. Вычислить $x = \frac{\pi}{0,00569}$. Логариѳмируя и употребляя дополненіе логариѳма знаменателя до 1, послѣдовательно имѣемъ:

$$lg\,x = 0,4971499 - \overline{3},7551123 = 0,4971499 + (1 - \overline{3},7551123) - 1$$
$$= 0,4971499 + 2,2448877 = 2,7420376.$$

Отсюда $x = 552,125$.

III. Вычислить $x = \frac{0,0084321 \times \sqrt[3]{\frac{2}{15}}}{\sqrt{8,37}}$.

$$log\,x = lg\,0,0084321 + \frac{1}{3}(lg\,2 + \text{доп.}\,lg\,15 - 2) + \text{доп.}\,\frac{1}{2}log\,8,37 \cdot -1$$

$lg\,0,0084321 = \overline{3},9259357$

$lg\;2 = 0,3010300$

доп. $lg\,15 = 0,8239087 - 2$

$\overline{1},1249387$

по раздѣленіи на 3:

$\overline{1},7083129.$

$lg\,8,37 = 0,9227255$

$\frac{1}{2}\,lg\,8,37 = 0,4613627$

доп. $\frac{1}{2}\,lg\,8,37 = 0,5386373 - 1.$

Вычисленіе x.

$\overline{3},9259357$

$\overline{1},7083129$

$\overline{1},5386373$

$lg\,x = \overline{3},1728859$

$x = 0,00148897.$

IV. Вычислить $x = \sqrt{\frac{\sqrt[7]{15,92} \times \sqrt[3]{0,0182}}{0,00526 \times (196)^5}}$,

$lg\,15,92 = 1,2019431$

$\frac{1}{7}\,lg\,15,92 = 0,1717062$

$lg\,0,0182 = \overline{2},2600714$

$\frac{1}{3}\,lg\,0,0182 = \overline{1},4200238$

доп. $lg\,0,00526 = 2,2790143$

$lg\,196 = 2,2922561$

$lg\,196^5 = 11,4612805$

$0,1717062$

$\overline{1},4200238$

$2,2790143$

$\overline{12},5387195$

$lg\,x = \overline{10},4094638 : 2$

$= \overline{5},2047319$

$x = 0,00001602256.$

831. Задачи.

1. Логариѳмировать выраженія:

$$\frac{(3ab^2)^3(2a^2b)^4}{5a^4b^6};\quad \frac{a+b}{4(a+b)} \cdot \sqrt{4c^2d^2 - [c^2 + d^2 - (a-b)^2]^2}.$$

2. Найти x изъ уравненій:

$$log\,x = \frac{1}{2}[log\,a + \frac{1}{3}log(bc)];\quad log\,x = 2log\,a + 3log\,b - log(2a + 3b);$$

$$log\,x = \frac{1}{2}[1 + log\,a] + \frac{1}{3}m[2 + log\,b] - \frac{1}{4}n[3 + 6log\,c] + log\,abc$$

3. Найти логариѳмы чиселъ:

9287856; 32875935; 0,0007392575; 0,0010219856;

$0{,}01873^3$; $0{,}019271^5$; $\sqrt{0{,}000628074}$; $\sqrt[5]{0{,}001324597}$.

4. Найти числа, соотвѣтствующія логариѳмамъ:

3,4743620;	4,6158449;	1,1924002;	3,9070188;	2,9230056;
3,6000249;	4,7480096;	0,0360697;	1,4052809;	0,5318642;
$\overline{1},3140148$;	$\overline{3},5542801$;	$\overline{4},9235311$;	$\overline{2},7610056$;	$\overline{3}.4271069$;
$\overline{1},0004041$;	$-2,5752036$:	$-4,6032891$;	$-1,2005869$;	$-0,5039789$;

5. Вычислить выраженія:

$$x = \frac{(11\sqrt[3]{23459})^4}{40173\sqrt[7]{51432}}; \quad x = \frac{(\sqrt[5]{3226727})^6}{10732872^{4/7}}; \quad x = \sqrt[5]{\frac{854{,}2765 \times 0{,}009748}{0{,}0672^3 \times 289^3}};$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{0{,}047} \times 0{,}038^4}{0{,}0091^3 \times \sqrt{0{,}0057}}; \quad x = \frac{1{,}045^{\frac{3}{2}} \times 0{,}046789^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[7]{2}}{245{,}28^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[9]{36{,}4057^8}};$$

$$x = \sqrt[15]{\frac{3413^2 - 813^2}{441^8}}; \quad x = \sqrt[8]{\frac{22315^6 + 88891^6}{441^5 + 1}}; \quad x = \sqrt[10]{\frac{1 + \sqrt[8]{44195467}}{541 - \sqrt[8]{18295}}}.$$

6. Вычислить площадь треугольника, котораго стороны суть:

$a = 3424{,}75$; $b = 7836{,}45$; $c = 5245{,}8$ метра

7. Вычислить радіусъ сплошнаго серебряннаго шара, вѣсящаго столько же, сколько вѣситъ мѣдный цилиндръ, котораго радіусъ основанія равенъ 6 сантим., а высота 128 миллим. Плотность серебра $= 10{,}47$, а плотность мѣди 8,85.

8. Вычислить площадь трапеціи, зная 4 ея стороны:

$a = 2020{,}42$; $b = 1087{,}55$; $c = 1073{,}75$; $d = 987{,}64$ метра.

9. Вычислить дугу круга, котораго радіусъ равенъ 187,957 м., а уголъ при центрѣ $38^0 45' 28''$.

10. Вычислить площадь круговаго сектора, котораго радіусъ $= 318{,}428$ м., а центральный уголъ $75^0 37' 45''$.

11. Вычислить центр. уголъ круговаго сектора, площадь котораго $= 230{,}4715$ м., а радіусъ 18,328 м.

12. Вычислить стоимость чугунной водопроводной трубы, внутренній діаметръ которой $= 0{,}245$ м., средняя толщина стѣнокъ 0,014, а длина трубы 2134 м. Удѣльный вѣсъ чугуна 7,207; цѣна килограмма его $= 0{,}2$ фр.

13. Дугу окружности радіуса 428, 35 м., содержащую 60^0, обращаютъ около одного изъ конечныхъ радіусовъ; вычислить: 1) поверхность описаннаго сегмента: 2) объемъ сферич. сектора: 3) объемъ сферич. сегмента.

14. Пустой баллонъ вѣситъ 63,45 кил., квадратный метръ его оболочки вѣситъ 0,25 кил. Вычислить подъемную силу, зная, что 100 граммовъ и 1,298 кил. суть соотвѣтственные вѣса кубическаго метра нечистаго водорода и воздуха.

ГЛАВА LI.

Приложенія логариѳмовъ. — Рѣшеніе показательныхъ уравненій. — Финансовыя операціи: сложные проценты, срочные вклады и срочныя уплаты. — Задачи.

Рѣшеніе показательныхъ уравненій.

832. Рѣшеніе уравненія $a^x = b$.—Полагая a и b положительными, беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей: $x\, lg\, a = lg\, b$, откуда

$$x = \frac{lg\, b}{lg\, a}.$$

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $0{,}06971^x = 0{,}00856$.

Логариѳмируя, находимъ

$$x\, log\, 0{,}06971 = lg\, 0{,}00856,$$

откуда:
$$x = \frac{lg\, 0{,}00856}{lg\, 0{,}06971} = \frac{\overline{3},9324738}{\overline{2},8432951},$$

или, замѣчая, что $\overline{3},9324738 = -3 + 0{,}9324738 = -2{,}0675262$ и такимъ же образомъ $\overline{2},8432951 = -1{,}1567049$, имѣемъ

$$x = 2{,}0675262 : 1{,}1567049.$$

Выполнивъ дѣленіе, находимъ, $x = 1{,}787$, съ точн. до $0{,}001$.

Приложеніе. Рѣшить ур-ніе $a^{b^{c^x}} = d$. Полагая $c^x = y$, $b^y = z$, откуда $a^z = d$, имѣемъ 3 ур-нія съ 3 неизвѣстными, изъ которыхъ послѣдовательно выводимъ:

$$z = \frac{lg\, d}{lg\, a},\quad y = \frac{lg\left(\frac{lg\, d}{lg\, a}\right)}{lg\, b},\quad \text{и наконецъ}\quad x = \frac{lg\left[\frac{lg\left(\frac{lg\, d}{lg\, a}\right)}{lg\, b}\right]}{lg\, c}.$$

833. *Рѣшеніе уравненія* $a\alpha^{2x} + b\alpha^x + c = 0$. Положивъ $\alpha^x = y$ (1), имѣемъ $ay^2 + by + c = 0\ \ldots\ (2)$.

Квадратное ур. (2) даетъ y, а для всякаго значенія y находимъ изъ (1) соотвѣтственное значеніе x. Но для x получится дѣйствительное значеніе только тогда, когда y будетъ дѣйствительно и положительно. Отсюда, при $\alpha > 0$, данное ур. будетъ имѣть *два дѣйствительныхъ корня* только тогда, когда удовлетворяются условія:

$$b^2 - 4ac > 0,\qquad ac > 0,\qquad ab < 0.$$

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $5^{x+1} + \frac{125}{5^x} = 626$.

Освободивъ отъ знаменателя, имѣемъ

$$5^{2x+1} - 626 \times 5^x + 125 = 0;$$

положивъ $5^x = y$, даемъ ур-нію видъ $5y^2 - 626y + 125 = 0$, откуда $y' = 125$,

$y'' = \frac{1}{5}$. Такимъ образомъ получимъ два ур-нія: $5^x = 125$, откуда $x' = 3$, и $5^x = \frac{1}{5}$, откуда $x'' = -1$.

834. Рѣшеніе системы: $lg\,x + lg\,y = m$ и $ax + by = c$.

Первое ур. можетъ быть представлено въ видѣ $lg\,xy = m$, откуда $xy = 10^m$...(1); такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію системы: $xy = 10^m$ и $ax + by = c$. Исключеніе y даетъ ур-ніе $ax^2 - cx + b \times 10^m = 0$. Рѣшивъ это ур., найдемъ значенія y, соотвѣтствующія каждой величинѣ x, изъ уравненія $y = \frac{c - ax}{b}$.

Примѣръ I. Рѣшить систему

$$lg\,x + lg\,y = 3 \ldots. (1) \qquad 5x^2 - 3y^2 = 11300 \ldots. (2)$$

Первое ур. можно представить въ видѣ $lg\,xy = lg\,1000$, или $xy = 1000$. ..(3) Исключеніе y изъ (2) и (3) даетъ, по упрощеніи, уравненіе

$$x^4 - 2260x^2 - 600000 = 0,$$

имѣющее два мнимыхъ корня и два дѣйствительныхъ; дѣйствительный положит. корень

$$x = \sqrt{1130 + \sqrt{1130^2 + 600000}},$$

или $x = 50$, и слѣд. $y = 20$.

Примѣръ II. Рѣшить систему:

$$2\,lg\,y - lg\,x = 0{,}1249387; \qquad lg\,3 + 2\,lg\,x + lg\,y = 1{,}7323939.$$

$2\,lg\,y - lg\,x = lg\,\frac{y^2}{x}$; $0{,}1249387 = lg\,1{,}333\ldots. = lg\,\frac{4}{3}$; слѣд. первое ур. приводится къ $\frac{y^2}{x} = \frac{4}{3}$, откуда $x = \frac{3}{4}y^2$. Съ другой стороны $lg\,3 + 2\,lg\,x + lg\,y = lg\,3x^2y$; $1{,}7323939 = lg\,54$; сл. второе ур. приводится къ $3x^2y = 54$. Исключая x, находимъ ур. $y^5 = 32$, откуда $y = 2$; и наконецъ $x = 3$.

ФИНАНСОВЫЯ ОПЕРАЦІИ.

Сложные проценты.

I. Сложные проценты для цѣлаго числа лѣтъ.

835. Опредѣленіе. Говорятъ, что капиталъ помѣщенъ на *сложные проценты*, когда въ концѣ каждаго года процентныя деньги прибавляются къ капиталу для нарощенія его процентными деньгами въ теченіи слѣдующихъ лѣтъ.

836. Основной вопросъ. *Вычислить, во что обратится капиталъ* a *руб. отданный на сложные проценты по* p *со ста, въ* t *лѣтъ?*

100 руб. приносятъ въ годъ p руб. прибыли; слѣд. 1 руб. принесетъ въ это время $\frac{p}{100}$ руб., а потому 1 р. къ концу перваго года обратится въ $1 + \frac{p}{100}$,

или, обозначая $\frac{p}{100}$ буквою r, въ $1+r$ (сумма $1+r$ наз. *годовымъ оборотомъ рубля*), а слѣд. a руб. въ концѣ года составятъ сумму $a(1+r)$. Каждый рубль этой суммы въ концѣ втораго года дастъ опять $1+r$, а слѣд. вся сумма $a(1+r)$ дастъ къ этому сроку $a(1+r)(1+r)$, или $a(1+r)^2$. Къ концу 3-го года каждый рубль этой новой суммы обратится въ $1+r$, а потому вся сумма въ $a(1+r)^2(1+r)$ или въ $a(1+r)^3$; и т. д. По аналогіи заключаемъ, что въ концѣ t-го года составится сумма $a(1+r)^t$; называя эту сумму буквою A, имѣемъ ур-ніе

$$A=a(1+r)^t \; .\;.\;.\;.\; (1).$$

837. Формула (1) содержитъ четыре количества: a, A, t и p (заключается въ r); сл. когда три изъ нихъ будутъ даны, то можно опредѣлить четвертое. Отсюда четыре задачи.

838. **Основная задача.** *Опредѣленіе* A *по даннымъ* a, p *и* t прямо рѣшается ур-мъ (1); логариѳмируя его, имѣемъ

$$lg\,A=lg\,a+t\,.\,lg\,(1+r) \; .\;.\;.\;.\; (2)$$

Примѣръ: $a=20000$, $p=4{,}5$ и $t=10$.

$$r=\frac{4.5}{100}=0{,}045. \qquad \begin{aligned} lg\,a&=4{,}3010300\\ 10\,lg\,(1+r)&=0{,}1911629\\ lg\,A&=4{,}4921929\\ A&=31059,\ 38\ \text{руб.}\end{aligned}$$

839. *Какой капиталъ* a *нужно помѣстить на сложные проценты по* p *со ста, чтобы въ концѣ* t *лѣтъ составилась сумма* A?

Ур-ніе (2), рѣшенное относительно $lg\,a$, даетъ

$$lg\,a=lg\,A+\text{доп. }t\,log\,(1+r) \; .\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Примѣръ. $A=40324$, $t=21$, $p=4$.

$$\begin{aligned} lg\,(1+r)&=0{,}0170333\\ t\,lg\,(1+r)&=0{,}3576993\end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg\,A&=4{,}6055636\\ \text{доп. }t.\ lg\,(1+r)&=\bar{1}{,}6423007\\ lg\,a&=4{,}2478643\\ a&=17695{,}56.\end{aligned}$$

840. *На сколько лѣтъ нужно помѣстить капиталъ* a, *чтобы, при сложныхъ процентахъ по* p *со ста, составилась сумма* A? *Прибыль на* 1 *руб. равна* r.

Рѣшая ур. (2) относительно t, имѣемъ

$$t=\frac{lg\,A-lg\,a}{lg\,(1+r)}.$$

Примѣръ. $A=40324$; $a=17695{,}56$; $p=4$.

$$t=\frac{4{,}6055636-4{,}2478643}{0{,}0170333}=\frac{0{,}3576993}{0{,}0170333}=21.$$

841. *При какихъ процентахъ капиталъ* a *дастъ, по истеченіи* t *лѣтъ, сумму* A?

Рѣшая ур. (2) относительно $lg\,(1+r)$, имѣемъ

$$lg\,(1+r)=\frac{lg\,A-lg\,a}{t}.$$

Найдя отсюда $1+r$, легко опредѣлить и p.

Примѣръ: $a=21319$, $A=42327$, $n=15$.

$$lg\,A=4{,}6266237$$
$$lg\,a=4{,}3287668$$
$$lg\,(1+r)=\frac{0{,}2978569}{15}=0{,}0198571$$
$$1+r=1{,}04678.$$

Отсюда r или $\frac{p}{100}=0{,}04678$, а слѣд. $p=4{,}678$ или приблизительно въ цѣлыхъ копѣйкахъ, $p=4$ р. 68 коп.

II. Время помѣщенія капитала—дробное.

842. Обыкновенное время, въ теченіи котораго капиталъ находится подъ процентами, слагается изъ цѣлаго числа лѣтъ и нѣкоторой доли года, которую условимся обозначать буквою f; цѣлое же число лѣтъ, по прежнему, обозначимъ буквою t. Если напр. доля года равна 3 мѣсяцамъ 25 днямъ, то

$$f=\frac{3\times 30+25}{360}=\frac{23}{72},$$

принимая каждый мѣсяцъ въ 30 дней.

843. **Основной вопросъ.** *Какая сумма* A *составится, если капиталъ* a, *отданный на сложные* % *по* p, *находится въ оборотѣ* t *лѣтъ и долю* f *года.*

По истеченіи t лѣтъ капиталъ a обратится въ $a\,(1+r)^t$. Каждый рубль этой суммы, получая въ годъ приращеніе r, въ теченіи доли f года дастъ приращеніе fr; полное же приращеніе суммы $a\,(1+r)^t$ будетъ $a\,(1+r)^t.fr$. Такимъ образомъ къ концу $t+f$ лѣтъ составится сумма $a(1+r)^t+a(1+r)^t.fr$, или

$$A=a\,(1+r)^t\,(1+fr)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(1).$$

Примѣръ: $a=41524{,}75$, $p=5$, $t=7$ и $f=10$ мѣс.

$$1+fr=1+\frac{10}{12}\times 0{,}05 \qquad lg\,a=4{,}6183070$$
$$=1+\frac{0{,}25}{6} \qquad t\,lg\,(1+r)=0{,}1483251$$
$$=1{,}0416667 \qquad lg\,(1+fr)=0{,}0177288$$
$$lg\,A=4{,}7843609$$
$$A=60863{,}05 \text{ руб.}$$

844. *Какой капиталъ, помѣщенный на сложные % по 5 со 100, дастъ въ 18 лѣтъ и 3 мѣсяца сумму 48734,05 руб?*

Логариѳмируя ур. (1) и опредѣляя $lg\,a$, имѣемъ

$$lg\,a = lg\,A + \text{доп. } t\,lg\,(1+r) + \text{доп. } log\,(1+fr) \ldots\ldots (2)$$

$lg\,1{,}05 = 0{,}0211893$ $\qquad lg\,A = 4{,}6878325$

$18\,lg\,1{,}05 = 0{,}3814074$ $\qquad$ доп. $t\,lg\,(1+r) = \overline{1}{,}6185926$

$fr = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$ $\qquad$ доп. $lg\,(1+fr) = \overline{1}{,}9946050$

$1 + fr = 1{,}0125$ $\qquad lg\,a = 4{,}3010301$

$a = 20000$ руб.

845. *Какое время сумма* a *должна находиться подъ сложными* %, *считая по* p *со ста, чтобы образовать капиталъ* A?

Нужно опредѣлить t и f. Рѣшая ур. (2) относительно t, имѣемъ:

$$t = \frac{lg\,A - lg\,a}{lg\,(1+r)} - \frac{lg\,(1+fr)}{lg\,(1+r)}.$$

Пусть частное дѣленія, указаннаго въ первомъ членѣ, будетъ Q, а остатокъ R; имѣемъ:

$$t = Q + \frac{R}{lg\,(1+r)} - \frac{lg\,(1+fr)}{lg\,(1+r)} \ldots\ldots (3)$$

Первая часть ур-нія есть число цѣлое, слѣд. и вторая должна быть цѣлымъ числомъ. Но Q есть цѣлое число, слѣд. и разность дробей должна быть цѣлою. R, какъ остатокъ, меньше дѣлителя $lg\,(1+r)$, слѣд. первая дробь меньше 1. Затѣмъ $f<1$, слѣд. $fr<r$, откуда $1+fr<1+r$, а потому и $lg\,(1+fr)<lg\,(1+r)$, такъ что и вторая дробь меньше 1. Но разность двухъ правильныхъ дробей только тогда м. б. цѣлою, когда она равна нулю, откуда: $R = lg\,(1+fr)$, и ур-ніе (3) даетъ $t = Q$. Такимъ образомъ для опредѣленія времени имѣемъ два ур-нія

$$t = Q \ldots\ldots (4) \quad \text{и} \quad lg\,(1+fr) = R, \ldots\ldots (5)$$

показывающія, что для нахожденія цѣлаго числа лѣтъ, надо взять цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія $lg\,A - lg\,a$ на $lg\,(1+r)$, а для опредѣленія доли года — приравнять $lg\,(1+fr)$ остатку указаннаго дѣленія, и рѣшить полученное ур. относительно f.

Переходя въ ур-ніи (5) отъ логариѳма къ числу, найдемъ: $1+fr=m$ откуда $f = \frac{m-1}{r}$.

Примѣръ I. $A = 48734{,}04$; $a = 20000$; $r = 0{,}05$.

$lg\,A = 4{,}6878324$

$lg\,a = 4{,}3010300$

$lg\,A - lg\,a = 0{,}3868024$

$$\frac{lg\,A - lg\,a}{lg\,1{,}05} = \frac{0{,}3868024}{0{,}0211893} = 18 + \frac{0{,}0053950}{0{,}0211893}$$

$lg\,(1+fr) = 0{,}0053950$

$1 + fr = 1{,}0125$

$$f = \frac{0{,}0125}{0{,}05} = 0{,}25.$$

Итакъ, $t = 18$ г. и $f = \frac{1}{4}$ года.

Примѣръ II. *Населеніе страны возрастаетъ ежегодно на нѣкоторую долю α своей величины, какую оно имѣетъ въ началѣ года. По истеченіи какого времени оно будетъ находиться въ данномъ отношеніи* k *къ первоначальной своей величинѣ?*

Пусть первоначальное населеніе равно a; населеніе въ концѣ t лѣтъ и доли f года пусть будетъ А. Имѣемъ: $A = a(1+\alpha)^t(1+f\alpha)$; но, по условію, $A = ka$; слѣд.

$$k = (1+\alpha)^t(1+f\alpha).$$

Пусть, напр., требуется узнать, черезъ сколько времени удвоится населеніе, возрастая на 5%?

Въ данномъ вопросѣ $k=2$, $\alpha=0{,}05$; ур-ніе, будетъ

$$2 = 1{,}05^t(1+0{,}05f).$$

Частное, подлежащее вычисленію. будетъ

$$\frac{lg\,2}{lg\,1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14 + \frac{0{,}0043798}{0{,}0211893}.$$

$$lg(1+0{,}05f) = 0{,}0043798$$

$$1+0{,}05f = 1{,}010136$$

$$f = \frac{0{,}010136}{0{,}05} = \frac{1{,}0136}{5} = \frac{365^{\text{дн.}} \times 1{,}0136}{5} = 74 \text{ дн.}$$

Итакъ, населеніе удвоится черезъ 14 лѣтъ и 74 дня.

846. *На какіе проценты нужно помѣстить капиталъ* a, *чтобы въ* $t+f$ *лѣтъ онъ обратился въ* A?

Вопросъ приводится къ рѣшенію относительно r ур-нія

$$A = a(1+r)^t(1+fr);$$

по раскрытіи $(1+r)^t$, получимъ ур-ніе $t+1$-й степени въ r; сл. не можетъ быть рѣчи о рѣшеніи его въ этомъ общемъ случаѣ обыкновенными пріемами; но оно м. б. рѣшено *по способу послѣдовательныхъ приближеній.*

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей ур-нія, выводимъ

$$lg(1+r) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} - \frac{lg(1+fr)}{t} \cdots\cdots (1)$$

Откинувъ второй членъ (обыкновенно r содержится между 0,03 и 0,06, а $f<1$, такъ что $1+fr$ близко къ 1, а $\frac{lg(1+fr)}{t}$ весьма малое число), найдемъ первое приближеніе r_1 числа r, по избытку, изъ ур-нія

$$lg(1+r_1) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} \cdots\cdots (2)$$

гдѣ $r_1 > r$.

Затѣмъ полагаемъ

$$lg(1+r_2) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} - \frac{lg(1+fr_1)}{t} \cdots\cdots (3)$$

второй членъ 2-й части больше втораго члена 2-й части ур-нія (1), и потому r_2 нѣсколько меньше r. Итакъ, r_1 и r_2 суть два приближенія къ r, первое по

избытку, второе по недостатку. Взявъ то или другое вмѣсто r, сдѣлаемъ ошибку меньшую $r_1 - r_2$. Взявъ для r ариѳметич. средину $\frac{r_1 + r_2}{2}$, сдѣлаемъ ошибку, меньшую даже $\frac{r_1 - r_2}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$r_1 = r + \alpha_1, \quad r_2 = r - \alpha_2,$$

гдѣ α_1 и α_2 положительны; отсюда

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = r + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \text{ и } \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Взявъ $\frac{r_1 + r_2}{2}$ за r, сдѣлаемъ ошибку, равную $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$; но абсолютная величина $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, и сл. $< \frac{r_1 - r_2}{2}$

Если приближеніе r_2 недостаточно, опредѣляемъ два новыя приближ. значенія r_3 и r_4 по формуламъ

$$lb(1 + r_3) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} - \frac{lg(1 + fr_2)}{t} \cdots\cdots (4)$$

$$lg(1 + r_4) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} - \frac{lg(1 + fr_3)}{t} \cdots\cdots (5)$$

Изъ того, что $r_2 < r$, очевидно, что вторая часть (4) больше второй части (1), но она меньше второй части (2); слѣд. $r_1 > r_3 > r$. Слѣд. r_3 есть новое избыточное приближеніе числа r, и менѣе ошибочное, чѣмъ r_1.

Затѣмъ, такъ какъ $r_3 > r$, то вторая часть (5) меньше второй части (1), слѣд. $r_4 < r$; а какъ $r_3 < r_1$, то вторая часть (5) больше второй части (3); сл. $r_4 > r_2$.

Отсюда видно, что r_4 есть приближеніе по недостатку, менѣе ошибочное чѣмъ r_2; слѣд. $r_3 > r > r_4$, причемъ промежутокъ отъ r_3 до r_4 меньше промежутка отъ r_1 до r_2.

Такимъ образомъ имѣемъ рядъ значеній для r:

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4, \ldots.$$

поперемѣнно приближенныхъ по избытку (прибл. четнаго пор.) и по недостатку, (прибл. нечетн. пор.) причемъ ихъ точность идетъ возрастая.

Остается доказать, что числа $r_1, r_2, \ldots, r_{2p}, r_{2p+1}, \ldots$ имѣюмъ общимъ предѣломъ r. Для этого достаточно доказать, что абс. вел. разности между r_k и r, при неограниченномъ возрастаніи k, стремится къ нулю. Имѣемъ

$$lg(1 + r) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} - \frac{lg(1 + fr)}{t}$$

$$lg(1 + r_{2p+1}) = \frac{lg\,A - lg\,a}{t} - \frac{lg(1 + fr_{2p})}{t},$$

откуда

$$lg(1 + r_{2p+1}) - lg(1 + r) = \frac{lg(1 + fr) - lg(1 + fr_{2p})}{t}.$$

Но

$$\frac{1 + fr}{1 + fr_{2p}} < \frac{1 + r}{1 + r_{2p}};$$

въ самомъ дѣлѣ, приводя къ общему знаменателю, который положителенъ, и сравнивая числителей: $1+frr_{2p}+r_{2p}+fr$ и $1+fr_{2p}+r+fr_{2p}$, или $f(r-r_{2p})$ и $r-r_{2p}$, замѣчая, что $f<1$ и $r-r_{2p}>0$, имѣемъ $f(r-r_{2p})<r-r_{2p}$, что и требовалось доказать. Итакъ

$$l(1+r_{2p+1})-lg(1+r)<\frac{lg(1+r)-lg(1+r_{2p})}{t};$$

а слѣд., обозначая буквами

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\ldots,\quad \alpha_{2p},\quad \alpha_{2p+1},\ldots$$

абсолютныя значенія разностей между

$$lg(1+r) \quad \text{и} \quad lg(1+r_1),\quad lg(1+r_2),\ldots$$

имѣемъ:

$$\alpha_2<\frac{\alpha_1}{t},\ \alpha_3<\frac{\alpha_2}{t},\ \ldots,\ \alpha_{2p+1}<\frac{\alpha_{2p}}{t}.$$

Перемножая эти неравенства, получаемъ

$$\alpha_{2p+1}<\frac{\alpha_1}{t^{2p}}.$$

Но t — число цѣлое, $2p$ — число положительное, возрастающее неограниченно, слѣд. и t^{2p} возрастаетъ неограниченно, а потому можно взять $2p$ настолько большимъ, чтобы α_{2p+1} было какъ угодно близко къ нулю; слѣд. разность

$$lg(1+r_{2p+1})-lg(1+r)$$

стремится къ нулю, а слѣд. r_{2p+1} къ r: это и нужно было доказать.

847. Примѣръ. *На какіе проценты (сложные) помѣщенъ былъ капиталъ 7300 р., если въ концѣ 6 лѣтъ 8 мѣсяц. 10 дней онъ обратился въ 10448 р. 10 к. (проценты капитализируются въ концѣ каждаго года).*

Примѣняя указанный методъ, имѣемъ

$$lg(1+r)=\frac{lg10448,1-lg7300}{6}-\frac{lg(1+\frac{25}{36}r)}{6}$$

или $$lg(1+r)=0,02595593+0,25938375-\frac{lg(36+25r)}{6}.$$

Первое приближеніе для r получимъ, откинувъ два послѣдніе члена:

$$lg(1+r_1)=0,02595593,$$

откуда $$r_1=0,0615878,\quad \text{причемъ } r_1>r.$$

Второе приближеніе вычисляемъ изъ ур-нія

$$lg(1+r_2)=0,28533968-\frac{lg(36+25r_1)}{6},$$

откуда, замѣчая, что $36+25r_1=37,53969$, имѣемъ

$$lg(1+r_2)=0,02292457,$$

слѣд. $$r_2=0,0542038,\quad \text{причемъ } r_2<r.$$

Третье приближеніе находимъ изъ ур-нія

$$lg(1+r_3)=0,28533968-\frac{lg(36+25r_2)}{6};$$

замѣчая, что $36+25r_2=37{,}355095$, находимъ

$$lg(1+r_3)=0{,}02328138,$$

откуда $r_3=0{,}0550702$, причемъ $r_3>r$.

Четвертое приближеніе.

$$lg(1+r_4)=0{,}28533968-\frac{lg(36+25r_3)}{6},$$

гдѣ $36+25r_3=37{,}376755$, даетъ

$$lg(1+r_4)=0{,}02324088,$$

откуда $r_4=0{,}0549719$, причемъ $r_4<r$.

Разность $r_3-r_4=0{,}0000983$, слѣд. каждое пзъ приближеній r_3 и r_4 представляютъ r съ ошибкою, меньшею 0,0001. Итакъ

$$\frac{r_3+r_4}{2}=0{,}055021$$

представляетъ r съ ошибкою, меньшею 0,00005; отсюда, умножая на 100, находимъ проценты: $p=5{,}5021$, съ ошибкою, меньшею 0,005 p. Слѣд. приблизительно беремъ $p=5{,}5$.

Примѣчаніе. Обыкновенно же на практикѣ, для вычисленія времени и процентовъ берутъ формулу, выведенную для цѣлаго числа лѣтъ: $A=a(1+r)^t$, подставляя въ нее вмѣсто t данное дробное число лѣтъ. Примѣняя эту формулу къ данной задачѣ, имѣемъ

$$lg(1+r)=\frac{lg10448{,}1-lg7300}{6\frac{25}{36}}=\frac{36\times 0{,}1557356}{241}$$

$$=0{,}0232634;$$

отсюда $1+r=1{,}0550266$, и $r=0{,}0550266$;

наконецъ $p=5{,}50266$,

результатъ, мало разнящійся отъ прежде найденнаго.

Срочные вклады.

848. Основной вопросъ.—*Въ теченіи* t *лѣтъ вносятся въ банкъ въ началѣ каждаго года послѣдовательно капиталы* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_t$. *Какая сумма накопится къ концу срока, если считать сложные проценты по* $p\%$?

Первый *срочный вкладъ* a_1, находясь подъ процентами t лѣтъ, обратится къ концу этого срока въ $a_1(1+r)^t$, или, полагая для краткости $1+r=q$, въ a_1q^t.

Второй вкладъ, находясь въ банкѣ $t-1$ лѣтъ обратится къ концу срока въ a_2q^{t-1}.

Третій взносъ къ концу того же срока обратится въ a_3q^{t-2}, и т. д.

Послѣдній вкладъ, находясь подъ процентами 1 годъ, даетъ a_tq.

Сложивъ эти суммы, получимъ накопившійся капиталъ

$$A=a_1q^t+a_2q^{t-1}+a_3q^{t-2}+\cdots\cdots+a_tq\;\cdots(1)$$

Когда вклады различны, формула (1) не допускаетъ упрощеній; если же ежегодные взносы равны, то, обозначивъ каждый изъ нихъ буквою a и вынеся за скобки общій множитель aq, найдемъ:

$$A = aq(q^{t-1} + q^{t-2} + \ldots + q + 1).$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ сумму членовъ геометрич. прогрессіи, первый членъ которой $= 1$, а знаменатель q; по формулѣ суммы имѣемъ

$$A = aq \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdots (2)$$

Примѣчаніе.—Если бы сумма a была вносима *въ концѣ* каждаго года, то первый вкладъ находился бы въ банкѣ $t-1$ лѣтъ, второй $t-2,\ldots$, послѣдній 0 лѣтъ, и получили бы

$$A' = aq^{t-1} + aq^{t-2} + \cdots\cdots + aq + a$$

или

$$A' = a \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

849. Ур. (2) содержитъ 4 количества: А, a, p и t и позволяетъ найти одно изъ нихъ, когда остальныя три будутъ даны. Отсюда 4 задачи;

1. Для опредѣленія А непосредственно служитъ ур. (2).

2. Опредѣляя a, имѣемъ

$$a = \frac{A(q-1)}{q(q^t - 1)}.$$

3. Для нахожденія t, освобождая ур. (2) отъ знаменателя, имѣемъ:

$$A(q-1) = aq(q^t - 1), \text{ откуда } q^t = 1 + \frac{A(q-1)}{aq}:$$

ур-ніе показательное.

4. Опредѣленіе p приводится къ нахожденію q. Изъ послѣдняго ур-нія прямо находимъ

$$aq^{t+1} - (A + a)q + A = 0,$$

ур ніе $t+1$-й степени относительно q.—

Численный примѣръ. — $a = 2000$, $t = 20$, $p = 5$; найти А?

$$A = 2000.\ 1{,}05.\frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} = 42000(1{,}05^{20} - 1).$$

Такъ какъ log разности $1{,}05^{20} - 1$ нельзя найти непосредственно, то предварительно вычисляемъ $1{,}05^{20}$.

Вспомогат. вычисл.	Вычисленіе А.
$y = 1{,}05^{20}$	$lg\, 42000 = 4{,}6232493$
$lg\, y = 20\, lg\, 1{,}05 = 0{,}4237860$	$lg(1{,}05^{20} - 1) = 0{,}2183510$
26532 7700	$lg A = 4{,}8416003$
9 160 : 164	$A = 69438{,}5.$
147.6	
7 12.4	
$y - 1 = 1{,}653297$	

850.—Приводимъ еще нѣсколько упражненій на срочные вклады.

I. *Какой капиталъ накопится чрезъ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго полугодія вносить по $\frac{a}{2}$ руб., или по $\frac{a}{4}$ въ концѣ каждой четверти года, или по $\frac{a}{12}$ въ концѣ каждаго мѣсяца?*

Внося $\frac{a}{2}$ р. въ концѣ каждаго полугодія, составимъ капиталъ

$$C=\frac{a}{r}\left[\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}-1\right],$$

если $\frac{r}{2}$ означаетъ прибыль на 1 р. въ полугодіе.

Внося $\frac{a}{4}$ въ концѣ каждой четверти, составимъ капиталъ

$$C'=\frac{a}{r}\left[\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}-1\right],$$

гдѣ $\frac{r}{4}$ означаетъ прибыль на 1 р. въ четверть года.

Наконецъ вклады въ концѣ каждаго мѣсяца дадутъ

$$C''=\frac{a}{r}\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}-1\right].$$

Примѣчаніе. — Принимая $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{4}$, $\frac{r}{12}$ за полугодичные, трехмѣсячные и мѣсячные проценты, получаемъ въ концѣ года прибыль, нѣсколько большую r. Чтобы годичные проценты составляли въ точности r, надо вести вычисленіе такъ. Пусть процентныя деньги капитализируются по истеченіи доли $\frac{1}{k}$ года; чтобы 1 руб. въ концѣ года обратился въ $1+r$, надо чтобы проценты были

$$r_1=\sqrt[k]{1+r}-1,$$

ибо, прибавляя 1 къ r_1 и возвышая результатъ въ степень k имѣемъ: $(1+r_1)^k=(\sqrt[k]{1+r})^k=1+r$. Такимъ образомъ, въ вышеприведенныхъ задачахъ получимъ

$$C_1=\frac{a}{2}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{\sqrt{1+r}-1};\quad C'_1=\frac{a}{4}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{\sqrt[4]{1+r}-1};\quad C_1''=\frac{a}{12}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{\sqrt[12]{1+r}-1},$$

результаты, весьма мало разнящіеся отъ прежнихъ.

II. *Какой капиталъ составится въ концѣ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить суммы, измѣняющіяся въ ариѳметической прогрессіи?*

Пусть a есть первый вкладъ; $a+b$, $a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ слѣдующіе. Искомый капиталъ X будетъ

$$X=a(1+r)^{n-1}+(a+b)(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots+a+(n-1)b;$$

полагая $\frac{1}{1+r}=q$, имѣемъ

$$(1+r)^n\left\{aq+(a+b)q^2+(a+2b)q^3+\cdots\cdots+[a+(n-1)b]q^n\right\}.$$

Выраженіе въ скобкахъ можно представить въ видѣ

$$a(q+q^2+\cdots+q^n)+b[q^2+2q^3+\cdots+(n-1)q^n],$$

гдѣ $q+q^2+\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$; положивъ

$$S=q^2+2q^3+3q^4+\cdots\cdots+(n-1)q^n,\quad \text{имѣемъ}$$

$$Sq=\quad q^3+2q^4+\cdots\cdots+(n-2)q^n+(n-1)q^{n+1},\quad \text{откуда}$$

$$S(1-q)=q^2+q^3+q^4+\cdots\cdots+q^n-(n-1)q^{n+1},\quad \text{или}$$

$$S(1-q)=\frac{q^{n+2}-q^2}{q-1}-(n-1)q^{n+1},\ \text{откуда}\ S=-\frac{q^2(q^n-1)}{(q-1)^2}+\frac{(n-1)q^{n+1}}{q-1}.$$

Подстановка въ формулу X и замѣна q дробью $\frac{1}{1+r}$ даетъ

$$X=\frac{(1+r)^n-1}{r}\left(a+\frac{b}{r}\right)-\frac{(n-1)b}{r}.$$

III. *Какой капиталъ накопится чрезъ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить суммы, измѣняющіяся въ геометрической прогрессіи?*

Пусть будутъ a, ak, ak^2, ..., ak^{n-1} послѣдовательные взносы.

Къ концу срока они обратятся въ

$$a(1+r)^{n-1},\ ak(1+r)^{n-2}, \ldots\ldots, ak^{n-1}.$$

Сумма членовъ этой прогрессіи, знаменатель которой $=\frac{k}{1+r}$, будетъ

$$Y=a\cdot\frac{(1+r)^n-k^n}{(1+r)-k}.$$

IV. *Настоящимъ значеніемъ долга A, подлежащаго уплатѣ черезъ n лѣтъ, называется сумма, которую банкиръ обязанъ бы былъ уплатить тотчасъ же въ замѣнъ документа.*

Выраженіе настоящаго значенія долга A, очевидно, есть

$$A_1=\frac{A}{(1+r)^n};$$

потому-что, помѣстивъ въ настоящее время эту послѣднюю сумму на сложные %, получимъ по истеченіи n лѣтъ

$$\frac{A}{(1+r)^n}\cdot(1+r)^n,\ \text{т. е. } A,$$

капиталъ, необходимый для уплаты долга.

V. *Учетъ при сложныхъ процентахъ.* — *Учетомъ* наз. разность между номинальною величиною долга и его дѣйствительною величиною; поэтому, формула учета будетъ

$$e=A-\frac{A}{(1+r)^n}=A\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

Положивъ для краткости $\frac{1}{1+r}=q$, предыдущія формулы представимъ въ сокращенномъ видѣ

$$A_1=Aq^n,\quad e=A(1-q^n).$$

VI. Задача.—*Нѣкто долженъ уплатить суммы A, A', A'',... соотвѣтственно черезъ t, t', t'',... лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ онъ вполнѣ можетъ погасить долгъ единовременнымъ взносомъ* B *рублей?*

Пусть x—будетъ искомое число лѣтъ; настоящая величина капитала B д. б. равна суммѣ настоящихъ величинъ капиталовъ A, A′, A″,...; потому ур-ніе задачи будетъ

$$\frac{A}{(1+r)^t}+\frac{A'}{(1+r)^{t'}}+\frac{A''}{(1+r)^{t''}}+\cdots\cdots=\frac{B}{(1+r)^x}.$$

Частный сучай.—Если имѣются только два платежа, и притомъ $B=2A$, предыдущее ур. приводится къ

$$q^x=\frac{1}{2}(q^t+q^{t'}).$$

Легко видѣть, что *искомое время всегда короче средняго изъ эпохъ обѣихъ уплатъ.* Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $t'=t+2d$ и вынеся множителя q^{t+d}, найдемъ

$$q^x=q^{t+d}\times\frac{1}{2}\left(q^d+\frac{1}{q^d}\right).$$

Но количество, сложенное съ своею обратною величиною, даетъ всегда сумму, меньшую 2; слѣд. $q^x>q^{t+d}$; а какъ $q<1$, то необходимо $x<t+d$.

Примѣръ. — *Уплатъ подлежатъ: 12500 р. чрезъ 7 лѣтъ и 12500 р. чрезъ 43 года. Черезъ сколько лѣтъ можно погасить долгъ однимъ взносомъ въ 25000 р., полагая сложные % по 4,5 со ста?*

Вопросъ рѣшается ур-мъ

$$2\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^x=\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^7+\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^{43};$$

при помощи логариѳмовъ находимъ

$$\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^7=0{,}7348283$$

$$\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^{43}=0{,}1506605$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^x=0{,}8854888$$

$$x=\frac{lg\,0{,}4427444}{lg\,\frac{1}{1{,}045}}=\frac{\overline{1},6461531}{\overline{1},9808837}=\frac{3538569}{191163}$$

$$=18 \text{ год. } 6 \text{ мѣс.}$$

Срочныя уплаты.

851. Опредѣленіе. — *Срочною уплатою называется постоянная сумма, которую слѣдуетъ вносить въ концѣ каждаго года для погашенія долга вмѣстѣ съ его сложными процентами.*

852. Основной вопросъ.— *Занять въ банкѣ капиталъ a по p % въ годъ* (считая сложные %) *на t лѣтъ. Какую сумму x нужно вносить въ концѣ каждаго года, чтобы долгъ былъ погашенъ?*

Долгъ a въ концѣ 1-го года обращается въ aq; по внесеніи же срочной уплаты x онъ обращается въ $aq - x$: таковъ долгъ въ началѣ 2-го года.

Въ теченіи года эта сумма обращается въ $(aq - x)q$ или въ $aq^2 - xq$; по уплатѣ же въ концѣ 2-го года x руб., долгъ въ началѣ 3-го года будетъ $aq^2 - xq - x$.

Такимъ же образомъ въ началѣ 4-года долгъ будетъ $aq^3 - xq^2 - xq - x$, и т. д.

По аналогіи съ этими формулами заключаемъ, что по истеченіи t лѣтъ долгъ банку будетъ

$$aq^t - xq^{t-1} - xq^{t-2} - \cdots\cdots - xq - x \cdots\cdots (A)$$

По условію, черезъ t лѣтъ долгъ д. б. погашенъ; отсюда ур.

$$aq^t - xq^{t-1} - xq^{t-2} - \cdots\cdots - xq - x = 0,$$

или

$$aq^t - x(q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots\cdots + q + 1) = 0,$$

или, наконецъ:

$$aq^t - x.\frac{q^t - 1}{q - 1} = 0 \cdots\cdots (1).$$

По прежнему имѣемъ 4 задачи.

853. Опредѣленіе срочной уплаты.— Рѣшая ур. (1) отн. x, имѣемъ

$$x = \frac{aq^t(q-1)}{q^t - 1}.$$

Частный случай.—Если срокъ займа неограниченно великъ, то, положивъ $t = \infty$ и замѣтивъ, что q^t, при $q > 1$ и $t = \infty$, обращается въ ∞, находимъ: $x = \frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытія неопредѣленности дѣлимъ числителя и знам. на q^t; находимъ

$$\lim x = \left[\frac{a(q-1)}{1 - \frac{1}{q^t}}\right]_{t=\infty} = a(q-1) = ar,$$

гдѣ $r = \frac{p}{100}$.

Легко истолковать этотъ результатъ, замѣтивъ, что ar или $\frac{ap}{100}$ есть формула простыхъ годовыхъ процентовъ долга a. Итакъ, предѣлъ срочной уплаты при неогранич. срокѣ займа равенъ простымъ годовымъ процентамъ занятаго капитала,—результатъ, который не трудно было предвидѣть заранѣе. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что срокъ займа м. б. безконечно великъ только тогда, когда срочная уплата погашаетъ одни простые проценты, оставляя капиталъ безъ измѣненія. На такихъ условіяхъ въ большинствѣ случаевъ дѣлаются *государственные займы*; государство ограничивается уплатою, въ опредѣленные сроки, простыхъ процентовъ своего долга, такъ-что срочныя уплаты, вносимыя государствомъ, не могутъ служить къ погашенію долга, которое достигаесят другими средствами, когда это дозволяетъ финансовое положеніе страны. Сказанная уплата называется, поэтому, *непрерывною рентою*.

Обыкновенно же срочная уплата бываетъ больше *непрерывной ренты*, и разность между ними выражается такъ:

$$x - ar = \frac{ar}{q^t - 1}.$$

Этотъ избытокъ срочной уплаты надъ непрерывною рентою, которую слѣдовало бы уплачивать въ случаѣ неограниченнаго срока займа, и составляетъ *фондъ погашенія*.

854. Опредѣленіе займа. Изъ ур-нія (1) прямо имѣемъ

$$a = \frac{x(q^t - 1)}{q^t.(q-1)}.$$

855. Опредѣленіе процентовъ приводится къ опредѣленію q. Освобождая ур. (1) отъ знаменателя и приводя въ порядокъ члены, находимъ ур-ніе

$$aq^{t+1} - (a + x)q^t + x = 0,$$

$t+1$-й степени относительно q; вообще, оно неразрѣшимо обычными пріемами элементарной алгебры. Но можно найти численную величину q помощію методическихъ попытокъ (значительно облегчаемыхъ таблицами сложныхъ $^0/_0$). Раздѣливъ предыдущее ур-ніе на aq^t, можно представить его въ видѣ

$$r - \frac{x}{a}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^t}\right) = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Замѣняя r послѣдовательно числами 0,03, 0,04, 0,05, 0,06 . . . т. е. наиболѣе употребительными процентами, смотримъ на результатъ подстановокъ Если этотъ результатъ будетъ 0, r въ точности равно взятому числу; вообще же первая часть ур-нія будетъ отлична отъ нуля. Численная величина и знакъ этой разницы укажутъ степень точности испытуемаго числа и смыслъ приближенія.

1. *Смыслъ полученнаго приближенія.* Если дать r значеніе, *большее* настоящаго, первая часть ур-нія будетъ *положительна*; для r слишкомъ *малаго*, она будетъ *отрицательна*. Для доказательства беремъ выраженіе (A):

$$aq^t - (xq^{t-1} + xq^{t-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + x),$$

въ которомъ первый членъ есть долгъ съ процентами, а выраженіе въ скобкахъ есть сумма, необходимая для покрытія долга. Если за прибыль на 1 р. взять число R, большее истинной величины r, то данная уплата будетъ недостаточна для погашенія долга; слѣд.

$$a(1+R)^t > x(1+R)^{t-1} + x(1+R)^{t-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + x$$

или

$$a(1+R)^t > x.\frac{(1+R)^t - 1}{R},$$

или

$$R > \frac{x}{a}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^t}\right].$$

Если же вм. r взять меньшую величину R', то данная уплата будетъ слишкомъ велика для покрытія долга; сл.

$$R' < \frac{x}{a}\left[1 - \frac{1}{(1+R')^t}\right].$$

2. *Выборъ перваго приближенія.* — Если t весьма велико (больше 30), $\frac{1}{(1+r)^t}$ будетъ мало; пренебрегая этимъ членомъ, найдемъ для r приближенную *по избытку* величину

$$R = \frac{x}{a}.$$

Но это приближеніе весьма грубо, когда t содержится между 15 и 30, а если $t < 15$, оно не дастъ полезнаго указанія.

Вмѣсто того, чтобы пренебрегать въ ур-ніи уплатъ членомъ $\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{(1+r)^t}$, замѣнимъ знаменателя $(1+r)^t$ биномомъ $1+tr$, меньшимъ $(1+r)^t$; получимъ

$$\frac{1}{(1+r)^t} < \frac{1}{1+tr},$$

и слѣд.

$$r > \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{1+tr}, \quad \text{или} \quad r > \frac{x}{a} - \frac{1}{t}.$$

Слѣд. приближеніе *по недостатку* для r будетъ

$$r' = \frac{x}{a} - \frac{1}{t}.$$

3. *Приближеніе точное до 0,01.* — Сначала испытываемъ r'; затѣмъ подставляемъ

$$r^{II} = r^{I} + 0{,}01; \quad r^{III} = r^{I} + 0{,}02; \quad r^{IV} = r^{I} + 0{,}03;$$

то изъ этихъ чиселъ, которое сдѣлаетъ первую часть ур-нія (2) положительною, и будетъ значеніемъ r, точнымъ до 0,01 по *избытку*; а предыдущее будетъ точно до 0,01 по *недостатку*. Такимъ образомъ найдемъ два значенія для r: r^{II} и r^{III} напр., приближенныя въ противоположномъ смыслѣ съ точностью до 0,01.

4. *Слѣдующія приближенія, получаемыя интерполированіемъ.*—Пусть e^{II} есть величина первой части ур-нія (2) для $r = r^{II}$; e^{III} ея величина для $r = r^{III}$; можно принять, съ малою погрѣшностью, что въ интерваллѣ $r^{III} - r^{II}$ измѣненія первой части пропорціональны приращеніямъ r.

Пусть будетъ y—поправка для r''; говоримъ: когда r измѣняется отъ r^{II} до r^{III}, первая часть измѣняется отъ e^{II} до e^{III}; на сколько r должно измѣниться, начиная отъ r^{II}, чтобы разница уменьшилась отъ e^{II} до 0? Имѣемъ пропорцію

$$\frac{e^{II} + e^{III}}{e^{II}} = \frac{0{,}01}{y},$$

изъ которой

$$y = \frac{0{,}01 \times e^{II}}{e^{II} + e^{III}};$$

въ y достаточно ограничиться цифрою тысячныхъ; приближеніе $r^{II} + y$ *всегда* будетъ по недостатку. Вычисляемъ разницы первой части для

$$r = r^{II} + y \quad \text{и} \quad r = r^{II} + y + 0{,}001,$$

и если она положительна,

$$r^{II}+y \quad \text{и} \quad r^{II}+y+0{,}001$$

будутъ два приближенія — одно по недостатку, другое по избытку, точныя до 0,001.

Выходя отъ этихъ двухъ результатовъ, получимъ такимъ же путемъ цифру десятитысячныхъ, и т. д.

Численный примѣръ.—Вычислить проценты, если $a=10000$, $x=1202{,}41$ р., $t=10$.

Прежде всего находимъ:

$$\frac{x}{a}=0{,}12024; \quad \frac{x}{a}-\frac{1}{t}=0{,}0202 \text{ (по недостатку).}$$

Испытаніе 0,03.

$$(1{,}03)^{-10}=0{,}744074; \qquad 1-(1{,}03)^{-10}=0{,}255926;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}255926=0{,}0307728.$$

Уклоненіе равно 0,0007728, слѣд. 0,03 есть приближеніе *по недостатку.*

Испытаніе 0,04.

$$(1{,}04)^{-10}=0{,}6755642; \qquad 1-(1{,}04)^{-10}=0{,}3244358;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}3244358=0{,}0390105;$$

уклоненіе $=+0{,}0009895$; слѣд. 0,04—приближеніе *по избытку.*

Интерполированіе пропорціональными частями.

Сумма абсолютныхъ значеній уклоненій =

$$0{,}00077208+0{,}0009895=0{,}0017623,$$

$$y=0{,}01\times\frac{0{,}0007728}{0{,}0017623}=0{,}004,$$

и новое приближеніе есть 0,034.

Испытаніе 0,034.

$$(1{,}034)^{-10}=0{,}715805; \qquad 1-(1{,}034)^{-10}=0{,}284195;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}284195=0{,}0341719;$$

уклоненіе $=-0{,}0001719$, слѣд. 0,034 — приближеніе *по недостатку.*

Это уклоненіе составляетъ приблизительно четверть перваго; потому увеличиваемъ проценты на 0,001 и испытываемъ 0,035.

Испытаніе 0,035.

$$(1{,}035)^{-10}=0{,}708919; \qquad 1-(1{,}035)^{-10}=0{,}291081;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}291081=0{,}0349999;$$

уклоненіе равно нулю; сл. 0,035 есть точная прибыль на 1 рубль.

Такимъ образомъ $p=3{,}5$.

856. Опредѣленіе времени. Изъ ур. (1) имѣемъ:

$$q^t = \frac{x}{x - ar}$$

откуда, взявъ логариѳмы обѣихъ частей:

$$t = \frac{lg\, x - lg[x - ar]}{lg(1 + r)}.$$

Изслѣдованіе. Неизвѣстное t должно быть числомъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и цѣлымъ.

Но формула времени содержитъ $lg(x - ar)$, который не всегда можетъ быть взятъ, такъ какъ отрицат. число не имѣетъ дѣйствительнаго логариѳма. Отсюда необходимость различать три случая:

1. $x < ar$; $lg(x - ar)$ будетъ мнимый, и задача невозможна. Это легко видѣть à priori. Въ самомъ дѣлѣ, ar—представляемъ простые % долга, и какъ срочная уплата меньше этихъ проц. денегъ, то ея недостаточно даже для уплаты процентовъ, такъ что долгъ съ теченіемъ времени будетъ увеличиваться.

2. $x = ar$. Въ этомъ случаѣ $x - ar = 0$, $lg(x - ar) = -\infty$, и $t = \infty$. Это означаетъ опять, что долгъ не можетъ быть погашенъ. Въ самомъ дѣлѣ, à priori видно, что когда сроч. упл. x равна простымъ процентн. деньгамъ, то она будетъ погашать только эти деньги, и долгъ всегда будетъ оставаться одинаковымъ. Это и есть *непрерывная рента*, о которой было говорено выше.

3. $x > ar$: обыкновенный случай возможности задачи, такъ какъ срочная уплата, будучи больше годовыхъ процентовъ на капиталъ, будетъ погашать не только эти послѣдніе, но и часть капитала; такъ что черезъ нѣсколько лѣтъ долгъ будетъ погашенъ.

Самая формула даетъ положительное значеніе для t; но еще нужно, чтобы это значеніе было и *цѣлое*. Но если для t получается число дробное, то это означаетъ, что данною срочною уплатою долгъ не м. б. погашенъ, и что по истеченіи времени, равнаго цѣлой части t, остается часть долга, меньшая срочной уплаты. Пусть цѣлая часть t будетъ T; замѣтивъ, что долгъ выражается первою частью уравненія (1), заключаемъ, что по истеченіи T лѣтъ остатокъ долга будетъ

$$R = aq^T - \frac{x(q^T - 1)}{q - 1}$$

Примѣръ. *Во сколько лѣтъ можно погасить долгъ въ 5000000 р., уплачивая ежегодно по 600000, если платится по 5%?*

$$ar = 250000 \text{ р.} \qquad lg\, x = 5{,}7781513$$
$$x - ar = 350000 \text{ р.} \qquad lg(x - ar) = 5{,}5440680$$
$$0{,}2340833$$

$$t = \frac{0{,}2340833}{0{,}02119} = 11, \ldots$$

Такъ какъ для t получилось число дробное, то вычисляемъ остатокъ R долга.

$$1{,}05^{11} = 1{,}710339 \qquad lg\, 5.10^6 = 6{,}6989700$$
$$1{,}05^{11} - 1 = 0{,}710339 \qquad lg\, 1{,}05^{11} = 0{,}2330822$$
$$lg\, 1{,}05^{11} = 0{,}2330822 \qquad 6{,}9320522$$

$$aq^T = 8552700$$
$$lg\,6.10^5 = 5{,}7781513$$
$$lg\,0{,}710339 = \overline{1}{,}8514658$$
$$\text{доп. } lg\,0{,}05 = 1{,}3010300$$
$$6{,}9306471$$

$$\frac{x(q^T - 1)}{q-1} = 8524072$$

$$R = 8552700 - 8524072 = 28628 \text{ р.}$$

857. Задача. *Нѣкто для покупки своей женѣ ежегодной пенсіи въ* b *руб., платитъ ежегодно во вдовью кассу* a *руб. По истеченіи* n *лѣтъ умираетъ вкладчикъ, а* m *лѣтъ спустя — его жена. Сколько пріобрѣла или потеряла касса, если проценты считались съ той и другой стороны по* p *въ годъ?*

Пусть плата съ той и другой стороны совершается въ *началѣ* каждаго года, а заключеніе счетовъ по истеченіи $n+m$ лѣтъ: въ такомъ случаѣ 1-й взносъ приноситъ проценты $n+m$ лѣтъ, и слѣд. достигаетъ величины aq^{n+m}; второй — годомъ меньше, и достигаетъ величины aq^{n+m-1} и т. д. Послѣдній вкладъ находится подъ % $m+1$ годъ, и цѣнность его $= aq^{m+1}$. Такимъ же образомъ цѣнность первой пенсіи b черезъ m лѣтъ равна bq^m, послѣдней $= bq$. Прибыль (положит. или отриц). кассы будетъ

$$(aq^{n+m} + aq^{n+m-1} + \ldots + aq^{m+1}) - (bq^m + bq^{m-1} + \ldots + bq),$$

или

$$\frac{aq^{m+1}(q^n - 1) - bq(q^m - 1)}{q-1}.$$

Примѣръ. Если $a = 50$ р., $b = 200$ р., $m = 8.$, $n = 20$ и $p = 4$; то касса имѣетъ прибыль $= 202$ р.

858. Задачи.

Рѣшить уравненія:

1. $(0{,}0175)^x = 0{,}000397.$
2. $4917^{35^{2^x}} = 978617.$
3. $7^{x^2-5x+2} = 49.$
4. $5 \times 3^x - \dfrac{3456}{3^x} = 7.$
5. $3^{x+1} - \dfrac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-2} - \dfrac{47}{3^{x-2}} = 0.$
6. $3^{2x} \times 5^{2x-3} = 7^{x-1} \times 4^{x+3}.$
7. $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x}).$
8. $\dfrac{lg\,(35 - x^3)}{lg\,(5-x)} = 3.$
9. $lg\sqrt{5x-8} + \dfrac{1}{2}lg\,(2x+3) = lg\,15.$
10. $lg\,(7x-9)^2 + lg\,(3x-4)^2 = 2.$
11. $lg\sqrt{7x+3} + lg\sqrt{3x+7} = 1 + lg\,4,5.$
12. $lg\sqrt{1+x} + 3lg\sqrt{1-x} = lg\sqrt{1-x^2} + 2.$
13. $a^{2x} - 5a^x + 6 = 0.$
14. $a.a^3.a^5.a^7 \ldots a^{2x-1} = n.$
15. $\sqrt[x]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{2x-1}}.$
16. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \dfrac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$

Рѣшить системы уравненій:

17. $lg\,x + lg\,y = 1{,}5;\quad 4x^2 - 9y^2 = 3590.$
18. $27^{2x-1} = 243 \,.\, 3^{4y+2};\quad 3 \,.\, 3^{x+y} = \sqrt{81^{2y-1}},$

19. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{xy}=a$; $\quad \frac{lg(b^2-xy)}{lg\sqrt{x^2+y^2}}=2$.

20. $x^y=y^x$; $p^x=q^y$.

21. $x^y=y^x$; $x^p=y^q$. При какомъ соотношенiи между p и q числа x и y рацiональны?

22. $x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=y^{\frac{8}{3}}$; $\quad y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=x^{\frac{2}{3}}$.

23. $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt[15]{y^8}$; $\quad (\sqrt[3]{y})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt[15]{x^2}$.

24. $u^p v^q=a^x$; $u^q v^p=a^y$; $u^x v^y=b$; $u^y v^x=c$.

25. $$\begin{cases} \dfrac{xy}{4+\sqrt{xy+2}}=\dfrac{lg[a\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}]-lg\sqrt{x-y}}{lg(x+y)-lg(x-y)} \\ 4+\sqrt{xy+2}=-2xy. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \left(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^{\frac{3}{2}(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2})}=xy \\ \left(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^{[\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}]^2+\frac{2}{9}}=\sqrt[3]{x^2y^2}. \end{cases}$$

27. $x^{x-3}=y^y$; $x^{y+1}=y^{x+2}$; $x^{2y-1}=y^{3y}$.

28. Резервуаръ ёмкостью въ 1000 литровъ наполняется водою изъ крана, дающаго въ теченiи 1-го часа 3 литра, въ теченiи 2-го—6 литр., въ теченiи 3-го—12 л. и т. д. Отверстiе въ днѣ резервуара выпускаетъ 1 л. въ первый часъ, 2 л. во второй, 4 л. въ третiй и т. д. По прошествiи сколькихъ часовъ бассейнъ, вначалѣ пустой, будетъ наполненъ?

29. Воздушный шаръ падаетъ съ высоты 5000 метровъ, проходя послѣдовательно 4, 16, 64,... метровъ въ первую, вторую. третью,... минуты. Чрезъ сколько минутъ онъ опустится?

30. Изъ бочки, содержащей a литровъ вина, отливаютъ b литровъ, замѣняя ихъ столькими же литрами воды. Изъ полученной смѣси отливаютъ снова b литровъ, замѣняя ихъ b литрами воды, и т. д. Операцiя повторяется n разъ. Спрашивается: каково будетъ послѣ этого отношенiе количества воды къ колич. вина? Сколько разъ нужно повторить сказанную операцiю, чтобы количества вина и воды сдѣлались равными?

Числовое приложенiе: $a=100$; $b=1$; $n=50$.

31. Зная, что $3\,log\,x+5\,lg\sqrt{y}=1$, найти minimum функцiи $2x^5+y$.

32. Доказать, что если $(x+1)(y+1(z+1)=\mathrm{Const.}$, то выраженiе $a^x b^y c^z$ получаетъ минимальное значенiе при условiи $a^{x+1}=b^{y+1}=c^{z+1}$.

33. Во что обратится капиталъ 5680 р., помѣщенный на сложные % по 5 со ста, по истеченiи 18 лѣтъ?

34. Во что обратится сумма 7300 р., при сложныхъ % по 5,5 со ста, въ 6 лѣтъ 8 мѣсяц. и 10 дней?

35. Какой капиталъ нужно помѣстить на сложные %, по 4 %, чтобы по прошествiи 21 года образовалась сумма 40324 р.

36. Какой капиталъ нужно помѣстить въ банкъ, чтобы при сложныхъ % по 4,5 составилась въ 9 л. 3 м. сумма 72680 р.

37. Во сколько лѣтъ капиталъ 5435 р., при сложныхъ % по 5 со ста, обратится въ 12840 р.

38. Въ какое время капиталъ, помѣщенный на сложные %, считая по 5%, утроивается, полагая, что проценты капитализируются каждые 6 мѣсяцевъ.

39. При какихъ процентахъ 20000 р. въ $18\frac{1}{4}$ лѣтъ обращаются въ 48734 р. 04 к.

40. Населеніе страны въ настоящее время достигаетъ 14528740 чел. Найдено, что въ теченіи года оно возрастаетъ на $\frac{1}{200}$ той величины, какую оно имѣло въ началѣ этого года. Принимая, что законъ этотъ имѣетъ мѣсто и въ будущемъ, каково будетъ населеніе черезъ 20 лѣтъ?

41. Когда Іаковъ прибылъ нъ Египетъ, его семья состояла изъ 70 лицъ. Спустя 430 лѣтъ евреи вышли изъ Египта въ количествѣ 660000. Насколько % возрастало ежегодно потомство патріарха, если допустить, что на 1000 человѣкъ умирало въ годъ, среднимъ числомъ, 25 человѣкъ?

42. Курильщикъ, начавшій курить, когда ему пошелъ 18-й годъ, издерживаетъ на табакъ еженедѣльно по 1 р. 80 к. Еслибы, бросивъ эту привычку, онъ по истеченіи 18 лѣтъ своей жизни, помѣстилъ сумму равную расходу на табакъ, въ сберегательную кассу, платящую 4%, и продолжалъ такъ поступать въ концѣ каждаго слѣдующаго года, то сколько имѣлъ бы, когда ему исполнится 60 лѣтъ?

43. Нѣкто положилъ въ банкъ 31 декабря 1874 г. капиталъ 2800 р. на сложные % по 4 въ гогъ. Въ концѣ декабря каждаго слѣдующаго года онъ прибавлялъ по 450 р. Какая сумма накопится въ концѣ декабря 1887 года?

44. Помѣщая въ банкъ послѣдовательно, изъ году въ годъ, въ теченіи 25 лѣтъ, по 1150 р., по внесеніи послѣдняго вклада составили капиталъ 50000 р. Сколько % приносилъ капиталъ?

45. Какой заемъ м. б. погашенъ 34 ежегодиыми уплатами по 1500 р., при 4,5%, если первая уплата вносится черезъ годъ послѣ займа?

46. Какова срочная уплата, нообходимая для погашенія займа въ 50000 р., если число уплатъ $=25$, проценты $=4$, и первая уплата вносится черезъ годъ послѣ займа?

47. Нѣкто помѣстилъ въ банкъ капиталъ a на сложные %, дающіе r на рубль въ годъ. Ежегодно онъ издерживаетъ прибыль съ a рублей и еще b руб. Черезъ сколько лѣтъ это лицо раззорится?

Числовой примѣръ: $a=100000$ р.; $b=900$; $r=0{,}05$.

48. Нѣкто занялъ 18000 р. по 4,5% и уплачиваетъ, для погашенія долга, въ концѣ каждаго года 10% занятаго капитала. Черезъ сколько лѣтъ долгъ будетъ погашенъ и каковъ будетъ остатокъ долга?

49. Изъ двухъ капиталовъ одинъ больше другаго на 393 р. Меньшій приноситъ $5\frac{1}{4}$%. большій $3\frac{1}{4}$%. Каковы эти капиталы, если по истеченіи 40 лѣтъ меньшій дѣлается вдвое больше другаго?

50. Продается домъ. A предлагаетъ за него 30000 р. наличными; B даетъ 35000, съ условіемъ уплатить черезъ 3 года; C предлагаетъ 33000 съ условіемъ выплатить тремя равными суммами, вносимыми въ началѣ каждаго года, начиная съ настоящаго времени. Которое предложеніе выгоднѣе, и насколько?

51. Въ началѣ 1872 года трое братьевъ начали вносить, каждый по 5 коп., черезъ каждые 7 дней, начиная съ 7-го января, въ сберегательную кассу, платящую

$4^1/_2\%$ по текущему счету, начиная съ слѣдующаго дня послѣ каждаго вклада. Предполагая, что касса капитализируетъ сбереженіе дѣтей только въ концѣ каждаго года, сколько всѣ они вмѣстѣ получили бы въ концѣ 1882 года?

52. Отецъ семейства, 32 лѣтъ отъ роду, покупаетъ у компаніи застрахованія жизни полисъ, обезпечивающій его дѣтямъ уплату въ 50000 р. по его смерти, платя ежегодную премію въ 1280 р. Онъ умираетъ тотчасъ по внесеніи 27-го вклада. Если проценты составляютъ 4 на сто, спрашивается: понесла-ли компанія убытокъ, или осталась въ выигрышѣ?

53. Купецъ, расчитывая вести дѣла еще 18 лѣтъ, помѣщаетъ въ концѣ каждаго года 800 р. на сложные %. Въ теченіи сколькихъ лѣтъ, начиная съ конца 19-го года, можетъ онъ пользоваться ежегодною рентою въ 3000 р., взамѣнъ накопленнаго капитала? Проценты $= 4{,}5$.

54. Фабрикантъ устанавливаетъ въ своихъ мастерскихъ машины, стоющія ему 16000 р. и требующія, спустя годъ послѣ установки, ежегодныхъ издержекъ на ремонтъ по 120 р. На какую сумму долженъ онъ ежегодно увеличить издержки на производство для погашенія расхода на машины, полагая, что онѣ продержатся 20 лѣтъ? Сложные проценты $= 5$.

55. Изъ участка лѣса, содержащаго въ началѣ 10000 куб. саж. дровъ, причемъ ежегодный приростъ простирается до 5%, вырубаютъ въ концѣ каждаго года 800 куб. саж. Сколько кубич. саж. останется въ этомъ участкѣ черезъ 10 лѣтъ.

56. Населеніе города равно 800000 душъ. Ежегодно прибываетъ 2000 лицъ, вслѣдствіе чего населеніе, какъ старое такъ и новое, увеличивается среднимъ числомъ на 2% въ годъ. Какой величины достигнетъ насеніе черезъ 15 лѣтъ?

57. Отецъ семейства внесъ 1 янв. 1854 г. нѣкоторую сумму въ сберегательную кассу, платящую $4^1/_2\%$ въ годъ, и капитализировалъ прибыль 31 декабря. Въ началѣ каждаго слѣдующаго года онъ прибавляетъ по 200 р. къ начальному капиталу. Сдѣлавъ вкладъ 1 янв. 1880 г., онъ становится обладателемъ капитала, который дастъ ему въ теченіи слѣдующихъ 20 лѣтъ ежегодную ренту въ 2500 р. Каковъ былъ первоначально внесенный капиталъ?

58. Нѣкто, надѣясь прожить еще 50 лѣтъ, помѣстилъ въ банкъ на $4^1/_2\%$ капиталъ въ 1983 р. 42 к., къ которому предполагаетъ ежегодно прибавлять по 360 р. столько лѣтъ, чтобы остальную жизнь пользоваться ежегодной рентой въ 2700 р Сколько лѣтъ онъ долженъ дѣлать ежегодные вклады?

59. Нѣкто, умирая, завѣщалъ все свое имущество родному городу, съ условіемъ, чтобы послѣдній принялъ на себя на вѣчныя времена обязательство выдавать ежегодно 1200 р. на воспитаніе бѣднымъ. Городъ, принявъ это наслѣдство, внесъ въ замѣнъ его въ кредитное учрежденіе сумму 30000 р., считая ее равносильною завѣщанному наслѣдству. Бо сколько % считались доходы?

60. А положилъ на сложные % капиталъ 100000 р., и беретъ ежегодно по 7000 р. В, внеся въ банкъ 10000 р., ежегодно прибавляетъ по 700 р. Черезъ сколько лѣтъ капиталы сравняются, и какой цифры достигнутъ? Прнценты $= 4^5/_8$.

61. Ежегодная рента въ 600 р., уплачиваемая въ концѣ года въ теченіи 20 лѣтъ, должна быть замѣнена другою, на 25 лѣтъ, уплачиваемою въ коннѣ каждой четверти года. Какой цифры достигаетъ новая рента, если проценты для той и другой равны 4.

62. Занятъ капиталъ А по 5% (слож.). Какова д. б. срочная уплата, чтобы по истеченіи 5 лѣтъ долгъ сдѣлался равенъ $\frac{A}{2}$?

63. Нѣкто, обязавшись сдѣлать уплату въ 10 сроковъ по a руб., и произвести первую уплату черезъ годъ, а слѣдующія изъ году въ годъ, предлагаетъ вмѣсто этого

сдѣлать уплату въ 5 сроковъ, по x руб. каждый разъ, причемъ первая уплата должна имѣть мѣсто по истеченіи года, остальныя же изъ году въ годъ. Годовые сложные $\% = 1$. Какова должна быть сумма x?

64. Нѣкто помѣстилъ на сложные проценты, по $4\frac{1}{2}$, капиталъ 18000 р., вынулъ его съ прибылью черезъ 4 года 7 мѣс. 20 дней, и на вырученныя деньги купилъ облигацій по курсу 285 р. Каждая облигація давала 15 р. ренты; сверхъ того онъ заплатилъ пошлины 0,2 р. и куртажныхъ денегъ по $\frac{1}{8}$ р. на 100 р. употребленнаго капитала. Какой цифры достигаетъ ежегодная рента?

65. Сумма 180000 р., помѣщенная на сложные $\%$ въ теченіи 2 л. 7 мѣс. 15 дней, обратилась въ 209832 р. 30 к. Найти проценты, зная, что они выражаются цѣлымъ числомъ.

66. Долгъ можетъ быть погашенъ въ 12 лѣтъ ежегодными уплатами въ 1000 р. при $4{,}75\%$ въ годъ. Должникъ предлагаетъ кредитору уплатить долгъ взносами въ 500 р., уплачиваемыми въ шестимѣсячные сроки, по $2\frac{1}{3}\%$ въ 6 мѣсяцевъ. Можетъ-ли кредиторъ согласиться на это условіе?

67. Черезъ каждые 3 мѣсяца вносится въ банкъ по 100 р. на 5% въ годъ, и проценты капитализируются каждые 3 мѣсяца. Какую сумму долженъ выдать банкъ черезъ 10 лѣтъ послѣ перваго вклада, т. е. черезъ 3 мѣсяца послѣ 4-го и послѣдняго вклада?

Начиная съ этого времени, какую сумму долженъ бы былъ выплачивать банкъ вкладчику черезъ каждые 6 мѣсяцевъ, чтобы долгъ былъ погашенъ по истеченіи новыхъ 60 лѣтъ, полагая, что $\%$ капитализируются въ этомъ случаѣ каждое полугодіе?

68. Требуется черезъ рѣку перекинуть мостъ. Если построить деревянный мостъ, онъ будетъ стоить только 40000 р., зато его нужно будетъ возобновлять черезъ каждые 30 лѣтъ. Если же соорудить каменный мостъ, то онъ обойдется въ 120000, но его можно считать вѣчнымъ. Которая изъ этихъ построекъ экономичнѣе, если капиталъ для той, или другой постройки занятъ по 5%, и долженъ быть погашенъ срочными уплатами, вносимыми въ концѣ каждаго года и разсроченными на все время существованія моста.

69. Нѣкто ежегодно помѣщаетъ въ банкъ по v рублей, въ теченіи n лѣтъ, съ условіемъ, чтобы банкъ уплачивалъ ему ежегодно по a руб. въ продолженіи слѣдующихъ $2n$ лѣтъ. При какой срочной уплатѣ сдѣлка можетъ имѣть мѣсто, считая сложные проценты. Каково должно быть n для того, чтобы срочная уплата по меньшей мѣрѣ равнялась суммѣ v?

858. Историческое примѣчаніе.—Еще въ 1544 г. *Михаилъ Стифель* далъ, въ нѣкоторомъ родѣ, теорію логариѳмовъ; однакоже изъ своего открытія онъ не сдѣлалъ примѣненія къ упрощенію вычисленій. Позднѣе, лордъ *Джонъ Неперъ*, шотландскій баронъ, примѣнилъ теорію логариѳмовъ къ практикѣ вычисленій, опубликовавъ свое открытіе въ 1614 г. въ сочиненіи Mirifici logarithmorum canonis descriptio. Но онъ принялъ для своихъ логариѳмовъ основаніе ($e = 2{,}71828\ldots$), неудобное для вычисленій надъ числами десятичной системы нумераціи. Его другъ *Бриггъ*, лондонскій профессоръ, устранилъ этотъ недостатокъ, взявъ за основаніе системы логариѳмовъ число 10, по указанію самого Непера.—Теорія логариѳмовъ въ той формѣ, какъ она изложена у насъ, дана *Эйлеромъ* въ 1748 г.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

ГЛАВА LII.

Опредѣленіе.—Происхожденіе непрерывныхъ дробей.—Свойства приближеній.—Періодическія непрерывныя дроби.—Приложенія.—Задачи.

859. Непрерывною дробью наз. выраженіе, состоящее изъ цѣлаго числа (которое, въ частности, м. б. нулемъ), сложеннаго съ дробью, у которой знаменатель есть опять цѣлое съ дробью, и т. д.; однимъ словомъ, выраженіе вида

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+f+\ldots\ldots}}$$

Элементарная алгебра изучаетъ частный видъ такихъ дробей, у которыхъ числители b, d,... равны $+1$, а знаменатели c, e,... суть цѣлыя положительныя числа; именно

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots\ldots}}$$

Количества a, b, c,... наз. *неполными частными;* дроби $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, ... *членами* или *звеньями* непрерывной дроби. Если число членовъ ограниченно, дробь наз. *конечною;* при неограниченномъ числѣ членовъ, она наз. *безконечною.*

Сокращенно непрерывную дробь пишутъ въ видѣ:

$$a \mid b,\ c,\ \ldots\ldots \mid \text{ или } \mid a;\ b,\ c,\ \ldots\ldots \mid$$

860. Происхожденіе непрерывныхъ дробей. — Этого рода дроби совершенно натурально являются въ анализѣ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторое количество x, соизмѣримое или несоизмѣримое; оно необходимо содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами: a_1 и a_1+1. Слѣд. можно положить

$$x=a_1+\frac{1}{x_1}\ldots\ (1)$$

если $x > 1$. Изъ равенства (1) выводимъ

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1}.$$

Количество $\frac{1}{x-a_1}$, также содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a_2 и $a_2 + 1$, гдѣ a_2 по меньшей мѣрѣ равно 1, что ясно изъ (1). Такимъ образомъ можно написать

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

гдѣ $x_2 > 1$. Продолжая такимъ образомъ, имѣемъ для опредѣленія x формулу

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}$$

Это—непрерывная дробь въ вышеуказанномъ тѣсномъ и обычномъ смыслѣ слова; a_1, a_2, a_3, ...—числа цѣлыя и положительныя; изъ нихъ одно только a_1 м. б. нулемъ, когда $x < 1$.

861. Теорема. *Всякая конечная непрерывная дробь представляетъ нѣкоторое соизмѣримое число.*

Пусть
$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}};$$

отсюда

$$\frac{1}{x - a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}.$$

Перенося a_2 въ лѣвую часть равенства, находимъ

$$\frac{x - a_1}{1 + a_1 a_2 - a_2 x} = a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, будемъ получать въ лѣвой части всегда частное двухъ линейныхъ относительно x выраженій. Наконецъ, получимъ

$$\frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'} = a_n,$$

откуда

$$x = \frac{\beta' a_n - \beta}{\alpha - \alpha' a_n} —$$

количество соизмѣримое (не равное ни 0, ни ∞, ибо x содержится между a_1 и $a_1 + 1$).

862. Теорема обратная. *Всякое соизмѣримое число можетъ быть представлено подъ видомъ конечной непрерывной дроби.*

Пусть данное соизмѣримое число будетъ $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b — цѣлыя, первыя между собою, числа; и пусть, во-первыхъ, будетъ $a > b$. Совершая дѣленіе, указываемое дробью, получаемъ въ частномъ q_1 и въ остаткѣ r_1; такъ-что

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r_1}\right)};$$

совершая дѣленіе $\frac{b}{r_1}$ (пусть частное $= q_2$, остатокъ r_2) находимъ

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}};$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, самымъ ходомъ дѣйствія мы вынуждены выполнять надъ a и b такія же дѣйствія, какія пришлось бы совершать надъ этими числами при нахожденіи ихъ о. н. д.; и какъ a и b — числа первыя между собою, то необходимо дойдемъ до остатка $r_n = 1$. Такимъ образомъ дѣйствіе закончится, и получится *конечная* непрерывная дробь

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + q_n + \cfrac{1}{r_{n-1}}}}.$$

Если $a < b$, и дробь $\frac{a}{b}$ — правильная, то, раздѣливъ оба ея числа на a, находимъ

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)},$$

гдѣ $\frac{a}{b}$ развертывается, по предыдущему, въ конечную непрерывную дробь.

863. Теорема.—*Развертываніе соизмѣримаго числа въ непрерывную дробь возможно единственнымъ способомъ.*

Пусть предложенное число будетъ x, и пусть, по обращеніи въ непрерывную дробь вышеуказаннымъ способомъ, оно даетъ результатъ

$$x = |a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n| \ldots\ldots (1)$$

Допустимъ, что какимъ-либо инымъ способомъ оказалось возможнымъ найти для x другое разложеніе въ непрерывную дробь

$$x = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p| \ldots\ldots (2)$$

Докажемъ, что оба результата тождественны. Равенство (1) доказываетъ, что x содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a_1 и $a_1 + 1$; равенство (2) доказываетъ, что x заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми числами α_1 и $\alpha_1 + 1$. Сближая эти два заключенія, видимъ, что $a_1 = \alpha_1$.

Затѣмъ, равенства (1) и (2) можно представить такъ:

$$\frac{1}{x - a_1} = |a_2, a_3, \ldots a_n|, \quad \frac{1}{x - a_1} = |\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_p|$$

Разсуждая какъ выше указано, выводимъ, что $a_2 = \alpha_2$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что $a_3 = \alpha_3$ и т. д.

864. Приближенія или подходящія дроби.—Соединеніе нѣсколькихъ членовъ непрерывной дроби

$$x = a_1 \mid a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots a_n, \ldots \mid$$

со включеніемъ всегда цѣлой части, т. е. выраженія

$$\frac{a_1}{1};\ a_1 + \frac{1}{a_2};\ a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}};\ \ldots\ldots$$

представляющія величину непрер. дроби x приближенно, называются *приближеніями* или *подходящими дробями*. Займемся изученіемъ свойствъ этихъ величинъ.

865. I. *Законъ составленія приближеній.*—Первое приближеніе получимъ, сохранивъ только цѣлую часть, и отбросивъ дробную часть непрерывной дроби; такимъ образомъ *первое приближеніе* $= \frac{a_1}{1}$.

Второе приближеніе найдемъ, придавъ къ a_1 дробь $\frac{1}{a_2}$ и откинувъ все остальное; *второе приближеніе* будетъ, поэтому: $a_1 + \frac{1}{a_2}$, или $\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$.

Третье приближеніе получается изъ втораго прибавленіемъ къ его знаменателю звена $\frac{1}{a_3}$; поэтому 3-е приближеніе будетъ

$$\frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1(a_2 a_3 + 1) + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{(a_1 a_2 + 1)a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

Замѣчаемъ, что числитель этого приближенія получается умноженіемъ числителя $a_1 a_2 + 1$ предшествующаго приближенія на неполное частное a_3 составляемаго, и приданіемъ къ произведенію числителя a_1 предпредыдущаго приближенія. Точно такъ же знаменатель 3-го прибл. получается умноженіемъ знаменателя предшествующаго прибл. на неполное частное составляемаго и прибавленіемъ къ этому произведенію знаменателя предпредыдущаго приближенія. Докажемъ, что законъ этотъ имѣетъ мѣсто для составленія приближенія какого угодно порядка. Пусть будутъ

$$\frac{P}{P'},\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{R}{R'}\ \text{ и }\ \frac{S}{S'}$$

четыре рядомъ стоящія приближенія; r—неполное частное, соотвѣтствующее приближенію $\frac{R}{R'}$, и s—соотвѣтствующее приближенію $\frac{S}{S'}$. Допустивъ, что законъ, замѣченный нами на третьемъ приближеніи, справедливъ для приближенія $\frac{R}{R'}$, докажемъ, что онъ будетъ имѣть мѣсто и для приближенія $\frac{S}{S'}$.

По допущенію, имѣемъ:

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qr + P}{Q'r + P'} \ldots (1)$$

Для образованія слѣдующаго приближенія, замѣняемъ въ (1) r биномомъ $r+\frac{1}{s}$; находимъ

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{Q(rs+1)+Ps}{Q'(rs+1)+P's}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'},$$

или

$$\frac{S}{S'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'}.$$

Доказано, что если законъ справедливъ для какихъ-либо трехъ послѣдовательныхъ приближеній, онъ справедливъ и для слѣдующаго приближенія. Непосредственнымъ составленіемъ приближеній мы убѣдились въ справедливости закона для третьяго приближенія, слѣд., по доказанному, онъ вѣренъ и для четвертаго; будучи вѣренъ для четвертаго приближенія, онъ вѣренъ и для пятаго; и т. д.; общность закона такимъ образомъ доказана. Итакъ: *для составленія приближенія какого угодно порядка, нужно умножить оба члена предшествующаго приближенія на неполное частное составляемаго, и къ произведеніямъ прибавить соотвѣтственно члены приближенія, стоящаго двумя порядками ниже.*

Примѣръ.—Пусть имѣемъ непрерывную дробь

$$x=0\mid 36,\ 7,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 2\mid.$$

1-е приближеніе $=\frac{0}{1}$; второе $=\frac{1}{36}$; для составленія слѣдующихъ поступаемъ такъ: дѣлаютъ столько графъ,

		7	1	1	1	4	2
0	1	7	8	15	23	107	237
1	36	253	289	542	831	3866	8563

сколько слѣдуетъ составить приближеній, причемъ въ первыхъ двухъ графахъ помѣщаютъ 1-е и 2-е приближенія, а въ заголовкахъ слѣдующихъ графъ—неполныя частныя 3-го, 4-го, ... приближеній. Для составленія какого-либо приближенія остается, слѣдуя правилу, помножить числит. и знам. предыдущаго приближенія на цифру, стоящую въ заголовкѣ составляемой дроби, и къ произведеніямъ прибавить соотвѣтственно числителя и знаменателя приближенія, двумя порядками ниже составляемаго. Такимъ образомъ, для третьяго приближенія находимъ $\frac{1.7+0}{36.7+1}$, или $\frac{7}{253}$; для 4-го : $\frac{7.1+1}{253.1+36}$, или $\frac{8}{289}$, и т. д.

Примѣчаніе.—Если данная непрерывная дробь не имѣетъ цѣлой части, то за первое приближеніе берутъ $\frac{0}{1}$.

866. II. *Приближенія четнаго порядка — больше, а нечетнаго — меньше величины непрерывной дроби.*

Пусть дана непрерывная дробь

$$x=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}$$

Первое приближеніе $\frac{a_1}{1}$, очевидно, *меньше* x на $\frac{1}{a_2 + \ldots}$.

Второе приближеніе $a_1 + \frac{1}{a_2}$ *больше* x; ибо знаменатель a_2 дроби $\frac{1}{a_2}$ меньше $a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}$, слѣд. дробь $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_2 + \ldots}$, а потому $a_1 + \frac{1}{a_2} > x$.

Третье приближеніе $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$ опять *меньше* x; такъ какъ дробь $\frac{1}{a_3}$, придаваемая здѣсь къ знаменателю a_2 дроби $\frac{1}{a_2}$, больше $\cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}$; а потому знаменатель $a_2 + \frac{1}{a_3}$ больше настоящаго, а дробь $\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_4}}$ менѣе настоящей, потому и $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} < x$. И т. д.

867. Слѣдствіе.—*Величина непрерывной дроби содержится между каждыми двумя смежными приближеніями.*

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ приближенія четнаго порядка—больше, а нечетнаго—меньше величины непрерывной дроби; а какъ изъ двухъ смежныхъ приближеній одно-четнаго, а другое—нечетнаго пор., то очевидно, что величина непрерывной дроби заключается между ними.

868. III. *Разность между двумя смежными приближеніями всегда равна ±1, раздѣленной на произведеніе ихъ знаменателей.*

Пусть будутъ $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ и $\frac{R}{R'}$ три смежныя приближенія, и m — неполное частное, соотвѣтствующее послѣднему.

По закону составленіе приближеній

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'}.$$

Вычтя первое изъ втораго, имѣемъ

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{P'Q - PQ'}{Q'P'} \ldots (1)$$

Вычтя второе изъ третьяго:

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{Q'(Q'm + P')} = \frac{-(P'Q - PQ')}{Q'R'} \ldots (2).$$

Сравнивая обѣ разности, замѣчаемъ, что знаменатель каждой изъ нихъ есть произведеніе знаменателей соотвѣтствующихъ приближеній; числители же ихъ равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку. Изъ равенства абсолютныхъ величинъ числителей всѣхъ разностей слѣдуетъ, что для ихъ опредѣленія можно взять два какія угодно смежныя приближенія. Такъ, вычитая изъ втораго первое, находимъ

$$\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} - \frac{a_1}{1} = + \frac{1}{a_2};$$

отсюда заключаемъ, что абс. велич. числителей всѣхъ разностей равна 1; знакъ-же, очевидно, будетъ (+), когда изъ приближенія четнаго порядка вычитаемъ приближеніе порядка нечетнаго (ибо первое больше втораго), и (—) въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm 1}{Q'R'}.$$

869. IV. *Предѣлъ разности между непрерывною дробью и однимъ изъ приближеній.*

Такъ какъ величина непрерывной дроби заключается между двумя смежными приближеніями, напр. $\frac{Q}{Q'}$ и $\frac{R}{R'}$, то очевидно, разность между величиною x этой дроби и однимъ изъ приближеній: $\frac{Q}{Q'}$ или $\frac{R}{R'}$, по абсолютной величинѣ меньше $\frac{1}{Q'R'}$; такъ-что, взявъ вмѣсто истинной величины непрерывной дроби приближеніе $\frac{Q}{Q'}$, можемъ быть увѣрены, что *ошибка*, которую мы при этомъ дѣлаемъ, *меньше единицы, раздѣленной на произведеніе знаменателей взятаго приближенія и непосредственно за нимъ слѣдующаго.*

Примѣръ.—Непрерывная дробь

$$x=0 \mid 2,\ 11,\ 2,\ 1,\ 10 \mid$$

имѣемъ приближенія: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{23}$, $\frac{23}{48}$, $\frac{34}{71}$, $\frac{363}{758}$.

Взявъ вмѣсто истинной величины непр. дроби, наприм., ея третье приближеніе, дѣлаемъ погрѣшность, меньшую $\frac{1}{48.23}$, т. е. $\frac{1}{1004}$.

Еслибы мы пожелали имѣть предѣлъ погрѣшности приближенія $\frac{Q}{Q'}$, не вычисляя знаменателя слѣдующаго приближенія, то достаточно взять въ соображеніе, что $\frac{1}{Q'R'}=\frac{1}{Q'(Q'm+P')}$, гдѣ $m \geqq 1$, такъ-что наименьшая величина количества R' равна $Q'+P'$, чаще же больше этой суммы. Такимъ образомъ дробь $\frac{1}{Q'(Q'+P')} \geqq \frac{1}{Q'R'}$, а слѣдов. ошибка приближенія $\frac{Q}{Q'}$, меньшая $\frac{1}{Q'R'}$, и подавно меньше $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$: таковъ второй, болѣе грубый, предѣлъ погрѣшности приближенія $\frac{Q}{Q'}$.

Если бы въ знаменателѣ дроби $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ мы откинули слагаемое P', то этимъ уменьшили бы знаменателя; слѣд. $\frac{1}{Q'^2}>\frac{1}{Q'(Q'+Q)}$. Заключаемъ, что и дробь $\frac{1}{Q'^2}$ можетъ также служить предѣломъ погрѣшности приближенія $\frac{P'}{Q'}$.

Итакъ, для опредѣленія погрѣшности приближенія $\frac{Q}{Q'}$ служатъ предѣлы

$$1.\ x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'R'};\quad 2.\ x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'(Q'+Q)};\quad 3.\ x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'^2}.$$

Примѣняя второй предѣлъ къ приближенію $\frac{11}{23}$ имѣемъ:

$$x-\frac{11}{23}<\frac{1}{23(23+2)},\text{ или }\frac{1}{575}.$$

Формула для третьяго предѣла даетъ

$$x-\frac{11}{23}<\frac{1}{23^2},\text{ т. е. }\frac{1}{529}.$$

870. V. *Всякое приближеніе есть дробь несократимая.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть числ. и знам. приближенія $\frac{P}{P'}$ имѣютъ общаго множителя k, отличнаго отъ 1, такъ-что $P=kp$, $P'=kp'$. Если $\frac{Q}{Q'}$ есть слѣдующее приближеніе, то

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\pm\frac{1}{P'Q'},\text{ откуда } QP'-Q'P=\pm1.$$

Подставляя сюда вмѣсто P и P′ соотвѣтственно kp и kp', находимъ: $kp'Q-kpQ'=\pm1$, и слѣд. $p'Q-pQ'=\pm\frac{1}{k}$, т. е. что разность двухъ цѣлыхъ чиселъ равна правильной дроби: результатъ невозможный; сл. невозможно и предположеніе, что P и P′ имѣютъ общаго множителя.

871. VI. *Всякое приближеніе ближе подходитъ къ величинѣ непрерывной дроби, нежели ему предшествующее.* Пусть $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ и $\frac{R}{R'}$ будутъ три, рядомъ стоящія, приближенія непрерывной дроби

$$x=a\mid a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ldots,\ a_m,\ a_n,\ a_p,\ldots\mid$$

и m — неполное частное послѣдняго изъ нихъ. Имѣемъ

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qm+P}{Q'm+P'}.$$

Если въ это выраженіе вмѣсто m подставимъ

$$m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\ldots}}\quad\ldots\ldots(1)$$

то получимъ точную величину дроби x. Обозначивъ (1) буквою y, и замѣтивъ, что $y>1$, ибо наименьшая величина m есть 1, найдемъ, что

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}.$$

Намъ нужно доказать, что разность между x и приближеніемъ $\frac{P}{P'}$, по абсол. велич., больше разности между x и слѣдующимъ приближеніемъ $\frac{Q}{Q'}$.

Составимъ эти разности:

$$1)\ x-\frac{P}{P'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{(P'Q-PQ')y}{P'(Q'y+P')},$$

акакъ $P'Q-PQ'=\pm 1$, то

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{\pm y}{P'(Q'y+P')}=\Delta_1.$$

$$2)\ x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-P'Q}{Q'(Q'y+P')}=\frac{\pm 1}{Q'(Q'y+P')}=\Delta_2.$$

Отсюда выводимъ абсолютную величину отношенія $\Delta_1:\Delta_2$; именно

$$\Delta_1:\Delta_2=y\cdot Q':P'.$$

Такъ какъ $y>1$, а $Q'>P'$ (по закону составленія приближеній), то $yQ'>P'$, а потому и $\Delta_1>\Delta_2$, что и требовалось доказать.

872. Слѣдствіе.—Приближенія четнаго порядка всѣ *больше* непр. дроби x, а нечетнаго — всѣ *меньше* ея. Но каждое послѣдующее прибл. подходитъ къ величинѣ непр. дроби ближе предыдущаго, то 1-е, 3-е, 5-е, ... т. е. приближенія *нечетнаго порядка*, хотя всегда остаются меньше x, но приближаясь болѣе и болѣе къ x, представляютъ рядъ *возрастающихъ* чиселъ. Приближенія *четнаго* порядка (2-е, 4-е. 6-е,. . .), оставаясь больше x и приближаясь болѣе и болѣе къ x, составляютъ рядъ *убывающихъ* чиселъ. Общимъ же предѣломъ тѣхъ и другихъ служитъ сама непр. дробь.

873. VII. *Всякое приближеніе подходитъ къ величинѣ непрерывной дроби ближе всякой другой дроби съ меньшими членами.*

Пусть $\frac{P}{P'}$ будетъ одно изъ приближеній непрерывной дроби x; надо доказать, что не существуетъ никакой иной дроби, которая, имѣя меньшіе члены, чѣмъ $\frac{P}{P'}$, подходила бы къ x ближе, нежели $\frac{P}{P'}$.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что существуетъ несократимая дробь $\frac{A}{B}$, выражающая величину x точнѣе, чѣмъ $\frac{P}{P'}$, и вмѣстѣ съ тѣмъ имѣющая члены меньшіе, чѣмъ взятое приближеніе; и посмотримъ, къ чему поведетъ это допущеніе. Во первыхъ, ясно, что дробь $\frac{A}{B}$ не м. б. ни однимъ изъ приближеній предшествующихъ дроби $\frac{P}{P'}$, ибо послѣдняя, по доказанному, ближе лежитъ къ x, чѣмъ всѣ предыдущія приближенія, а $\frac{A}{B}$, по допущенію, лежитъ къ x еще ближе, чѣмъ $\frac{P}{P'}$. Затѣмъ, $\frac{A}{B}$ не можетъ быть ни однимъ изъ приближеній, слѣдующихъ за $\frac{P}{P'}$; ибо эти приближенія, хотя и лежатъ ближе къ x $\left(\text{какъ и дробь } \frac{A}{B}\right)$, чѣмъ $\frac{P}{P'}$, но выражаются большими членами, нежели эта послѣдняя дробь (по закону составленія приближеній), между тѣмъ, какъ члены

дроби $\frac{A}{B}$, по условію, меньше членовъ дроби $\frac{P}{P'}$. Итакъ, убѣждаемся, что $\frac{A}{B}$ не м. б. ни однимъ изъ приближеній.

Пусть, далѣе, $\frac{P}{P'}$ есть приближеніе четнаго порядка, и $\frac{N}{N'}$ — ему предшествующее; очевидно

$$\frac{N}{N'} < x < \frac{P}{P'}$$

C . . . . | . . . . D (x над E)

$\frac{N}{N'}$ пространство для $\frac{A}{B}$ $\frac{P}{P'}$

Такъ какъ всякое приближеніе выражаетъ величину непрерывной дроби точнѣе предшествующаго, то $\frac{P}{P'} - x < x - \frac{N}{N'}$, что начертежѣ указано тѣмъ, что промежутокъ CE (E мѣсто непрер. дроби x) больше ED.

Пусть $\frac{A}{B}$ выражаетъ величину x точнѣе, нежели $\frac{P}{P'}$, а потому и подавно точнѣе, нежели $\frac{N}{N'}$; слѣд дробь $\frac{A}{B}$ должна лежать гдѣ нибудь или въ промежуткѣ между x и $\frac{P}{P'}$, или въ промежуткѣ между x и $\frac{N}{N'}$, а слѣд. непремѣнно— между $\frac{P}{P'}$ и $\frac{N}{N'}$, такъ что

$$\frac{P}{P'} - \frac{N}{N'} > \frac{A}{B} - \frac{N}{N'}, \quad \text{или} \quad \frac{PN' - P'N}{P'N'} > \frac{AN' - BN}{BN'}, \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{P'} > \frac{AN' - BN}{B}, \quad \text{откуда } B > P'(AN' - BN).$$

Выраженіе въ скобкахъ есть число цѣлое, неравное нулю: цѣлое—потому, что A, N′, B и N—числа цѣлыя; неравное нулю—потому, что изъ допущенія $AN' - BN = 0$ вышло бы: $\frac{A}{B} = \frac{N}{N'}$, чего, по доказанному, быть не можетъ. Такимъ образомъ, наименьшая величина скобокъ равна 1, а потому $B > P'.1$, или $B > P'$, т. е. чтобы дробь $\frac{A}{B}$ выражала величину непрерывной дроби точнѣе приближенія $\frac{P}{P'}$, надо, чтобы знаменатель этой дроби былъ больше знаменателя разсматриваемаго приближенія.

Если $\frac{A}{B}$ заключается между $\frac{N}{N'}$ и $\frac{P}{P'}$, т. е. $\frac{P}{P'} > \frac{A}{B} > \frac{N}{N'}$, то, раздѣливъ 1 на каждую изъ этихъ дробей, найдемъ $\frac{P'}{P} < \frac{B}{A} < \frac{N'}{N}$; откуда

$$\frac{N'}{N} - \frac{P'}{P} > \frac{N'}{N} - \frac{B}{A}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{P} > \frac{AN' - BN}{A},$$

откуда $A > P(AN' - BN)$; а какъ minimum скобокъ равенъ 1, то $A > P.1$

или $A > P$; это значитъ, что для выполненія вышесказаннаго требованія и числитель дроби $\frac{A}{B}$ долженъ быть больше числителя приближенія $\frac{P}{P'}$.

Такимъ образомъ доказана, что не существуетъ такой дроби, которая, имѣя простѣйшій видъ, чѣмъ нѣкоторое приближеніе, выражала бы величину непрерывной дроби точнѣе этого приближенія.

Примѣчаніе. Эта теорема ясно обнаруживаетъ выгоды, представляемыя обращеніемъ чиселъ въ непрерывныя дроби: послѣдовательныя приближенія представляютъ рядъ величинъ, болѣе и болѣе подходящихъ къ непрерывной дроби, и такихъ, что при извѣстной степени точности, они являются выраженными въ наиболѣе простомъ видѣ. Послѣдняя теорема, является такимъ образомъ, одною изъ *главнѣйшихъ* въ теоріи подходящихъ дробей.

Періодическія непрерывныя дроби.

874. Опредѣленіе. — Пусть дана непрер. дробь

$$x = |\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n \,|\ \ldots\ldots (1)$$

Положивъ, что число n неполныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ, разсмотримъ ряды (A) и (B)

$$(A)\qquad \frac{P^{I}}{Q^{I}},\ \frac{P^{III}}{Q^{III}},\ \frac{P^{V}}{Q^{V}},\ \ldots\ldots$$

$$(B)\qquad \frac{P^{II}}{Q^{II}},\ \frac{P^{IV}}{Q^{IV}},\ \frac{P^{VI}}{Q^{VI}},\ \ldots\ldots$$

изъ которыхъ въ первомъ содержатся подходящія дроби нечетнаго, во второмъ — четнаго порядка. Рядъ (A) содержитъ дроби, возрастающія, но всегда меньшія $\frac{P''}{Q''}$; а потому члены этого ряда имѣютъ нѣкоторый предѣлъ f. Члены ряда (B), убывая, но оставаясь всегда больше $\frac{P'}{Q'}$, также стремятся, въ силу этого, къ нѣкоторому предѣлу f'. Легко доказать, что $f = f'$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ есть нѣкоторый членъ ряда (A); $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ — представляетъ въ такомъ случаѣ соотвѣтствующій членъ ряда (B); но

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

причемъ Q_n и Q_{n+1} идутъ неограниченно возрастая, такъ что $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ стремится къ нулю, по мѣрѣ того какъ n приближается къ ∞. Такимъ образомъ оба предѣла f и f' равны между собою. *Этотъ-то общій предѣлъ рядовъ (A) и (B) и разсматриваютъ какъ величину безконечной непрерывной дроби.*

875. Періодическая непрерывная дробь. Когда въ безконечной непрерывной дроби, значеніе которой теперь вполнѣ опредѣлено, неполныя частныя воспроизводятся въ одномъ и томъ же неизмѣнномъ порядкѣ; дробь называютъ *пері-*

одическою. Различаютъ два ряда непрерывныхъ періодическихъ дробей: 1) *простую періодическую дробь*.

$$x = | a_1, a_1, a_3, \ldots, a_p; a_1, a_2, \ldots, a_p; a_1, a_2, \ldots a_p; \ldots |$$

въ которой p первыхъ неполныхъ частныхъ повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ; 2) *смѣшанную періодическую дробь*

$$x = | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h; a_1, a_2, \ldots, a_p; a_1, a_2, \ldots a_p; \ldots |$$

въ которой періодической части предшествуютъ часть непеpіодическая.

876. Теорема Лагранжа. *Корень квадратнаго уравненія съ соизмримыми коэффиціэнтами разлагается въ непрерывную періодическую дробь.*

1-й случай. *Корни имѣютъ противоположные знаки.*

Пусть уравненіе, имѣющее такіе корни, освобождено отъ дробей и приведено къ виду

$$Ax^2 + 2Bx - C = 0 \quad \ldots . (1)$$

A, B и C суть цѣлыя числа, а A и C — положительны. Если бы коэффиціентъ B не былъ четнымъ числомъ, то, перемѣнивъ x на 2X, могли бы разсматривать ур. въ X. $B^2 + AC$ не есть точный квадратъ, ибо въ противномъ случаѣ ур. имѣло бы корни соизмѣримые, которые разлагались бы въ конечную непрерывную дробь.

Разложеніе положительнаго корня.—Полагая, что вышеуказанныя условія относительно коэффиціентовъ имѣютъ мѣсто въ ур-ніи (1), разложимъ въ непрерывную дробь его положительный корень

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A} \quad \ldots . (2).$$

x содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами α_1 и $\alpha_1 + 1$, такъ-что

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1} \quad \ldots . (3).$$

гдѣ $x_1 > 1$. Уравненіе (1) беретъ видъ

$$A\left(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + 2B\left(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}\right) - C = 0$$

или

$$A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 - C_1 = 0 \quad \ldots (4)$$

причемъ

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2 \\ B_1 &= -A\alpha_1 - B \\ C_1 &= A \end{aligned}\right\} (5)$$

Ур-ніе (4) даетъ мѣсто слѣдущимъ замѣчаніямъ:

$$(6) \begin{cases} \text{Коэффиціенты } A_1, B_1, C_1 \text{— числа цѣлыя;} \\ \text{Числа } A_1 \text{ и } C_1 \text{ положительны.} \\ B_1^2 + A_1C_1 = B^2 + AC. \ \ldots . (7). \end{cases}$$

Эти формулы непосредственно показываютъ, что A_1, B_1 и C_1 суть числа цѣлыя и что C_1 — положительно. Остается показать, что A_1 положительно и что равенство (7) вѣрно.

Во-первыхъ, $A_1 > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, положительный корень ур-нія (1), заключаясь между α_1 и $\alpha_1 + 1$, заключается также между α_1 и $+\infty$. Отсюда очевидно, что триномъ (1) отрицателенъ при $x = \alpha_1$; и потому

$$A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1 - C < 0$$

или $A_1 > 0$.

Во-вторыхъ, формулы (5) даютъ

$$B_1^2 + A_1C_1 = (B + A\alpha_1)^2 + A(C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2),$$

или, по приведеніи : $B_1^2 + A_1C_1 = B^2 + AC$.

Изъ этихъ замѣчаній и вытекаетъ теорема Лагранжа.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ ур-нія въ x_1 можно вывести ур. въ x_2 точно такъ, какъ изъ ур-нія (1) выведено (4). Продолжая такимъ образомъ, составимъ нижеслѣдующій рядъ уравненій

$$(8) \begin{cases} Ax^2 + 2Bx - C = 0 \\ A_1x_1^2 + 2B_1x_1 - C_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_nx_n^2 + 2B_nx_n - C_n = 0 \end{cases}$$

причемъ

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1};\ x_1 = \alpha_2 + \frac{1}{x_2};\ \dots;\ x_{n-1} = \alpha_n + \frac{1}{x_n};$$

и

$$C_n = A_{n-1};$$

$$(B_n)^2 + A_nC_n = B^2 + AC.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ имѣемъ соотношеніе

$$(B_n)^2 + A_n A_{n-1} = h \dots (9)$$

означая буквою h цѣлое положительное число $B^2 + AC$. Такъ какъ A_n, A_{n-1} и B_n суть цѣлыя положительныя числа и сумма $(B_n)^2 + A_nA_{n-1}$ равна опредѣленному цѣлому h, то A_n, A_{n-1} и B_n, удовлетворяющія неопредѣленному ур-нію (9), могутъ быть взяты только въ *конечномъ числѣ* значеній. Число комбинацій изъ этихъ чиселъ, взятыхъ въ порядкѣ A_n, B_n, A_{n-1}, необходимо, конечно. А потому, составляя таблицу (8), непремѣнно найдемъ въ ней ур-ніе $A_ix_i^2 + 2B_ix_i - C_i = 0$, тождественное съ уравненіемъ $A_kx_k^2 + 2B_kx_k - C_k = 0$, ранѣе полученнымъ.

Отсюда неизбѣжно слѣдуетъ, что вычисленія приведутъ къ повторенію, въ найденномъ разъ порядкѣ, однихъ и тѣхъ же результатовъ, и для x получится непрерывная періодическая дробь.

Разложеніе отрицательнаго корня.—Измѣнивъ въ предложенномъ ур-ніи x на $-x$, получимъ ур.

$$Ax^2 - 2Bx - C = 0.$$

Разложивъ въ непрерывную дробь, указаннымъ пріемомъ, положительный корень этого ур-нія и перемѣнивъ знакъ въ полученномъ результатѣ, найдемъ разложеніе отрицательнаго корня.

2-й случай. — *Оба корня положительны.* — Пусть будетъ α — большій корень, и пусть онъ содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a+1$. Пусть, затѣмъ, другой корень β несодержится въ этомъ интервалле. Положивъ $x=a+X$, найдемъ ур. въ X, имѣющее два дѣйствительныхъ корня x' и x''; корни же α и β вычислимъ по формуламъ

$$\alpha=a+X',\quad \beta=a+X'',$$

гдѣ, слѣд., X' есть положит. количество, меньшее 1; напротивъ, X'' — отрицательно. Такимъ образомъ, X' и X'' можно разложить въ непрерывныя дроби извѣстнымъ пріемомъ.

Въ томъ случаѣ, когда оба корня α и β содержатся между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a+1$, числа X' и X'' — оба положительны и <1. Въ этомъ случаѣ дѣлаемъ подстановку

$$x=a+\frac{1}{y}\cdot$$

Ур. въ y имѣетъ оба корня положительные и большіе 1. Если большій корень этого уравненія содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами b и $b+1$; а другой корень $<b$ то, имѣемъ разсмотрѣнный уже случай. Въ противномъ случаѣ полагаемъ

$$y=b+\frac{1}{z}$$

и т. д. Непремѣнно дойдемъ до такого ур-нія, котораго большій корень содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами, а другой незаключаетя въ этихъ предѣлахъ. Это объясняется тѣмъ, что разность между корнями α и β есть количество конечное, между тѣмъ какъ разность двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей стремится къ нулю, когда число неполныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ. Сл. невозможно, чтобы оба корня α и β, разлагаемые въ непрерывныя дроби по формуламъ

$$x=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{z},\ \dots$$

имѣли, неопредѣленно, одни и тѣ же неполныя частныя.

3-й случай. — *Оба корня отрицательны.* — Этотъ случай непосредственно сводится къ предыдущему замѣною x на $(-x)$.

877. Теорема, *обратная Лагранжевой.* — *Если нѣкоторое количество представляется подъ видомъ періодической непрерывной дроби, его можно разсматривать какъ ирраціональное вида $\alpha+\sqrt{\beta}$.*

Пусть имѣемъ періодическую непрерывную дробь

$$x=|\,\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k;\ a_1,\ a_2,\ \dots a_p;\ a_1,\ a_2,\ \dots a_p;\ \dots\,| \quad (1)$$

Положивъ

$$y=|\,a_1,\ a_2,\ \dots a_p;\ a_1,\ a_2,\ \dots a_p;\ \dots\,| \quad (2)$$

имѣемъ

$$y=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_p+\cfrac{1}{z}}},$$

гдѣ z есть непр. дробь, которой неполныя частныя суть числа $a_1, a_2, \dots a_p$, повторяющіяся неограниченно въ одномъ и томъ же порядкѣ, сл. представляетъ ничто иное какъ y, такъ-что

$$y = |\, a_1,\ a_2, \dots,\ a_p,\ y \,|\ .$$

Выполнивъ дѣйствія, указанныя во второй части, находимъ, что она $= \frac{Ay + B}{A'y + B'}$; слѣд.

$$y = \frac{Ay + B}{A'y + B'} \cdots (3)$$

Съ другой стороны

$$x = |\, \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_k\ ,\ y \,|\ ;$$

вторая часть имѣетъ видъ $\frac{Cy + D}{C'y + D'}$; слѣд.

$$y = \frac{D'x - D}{C - C'x} \cdots (4)$$

Ур-нія (3) и (4) даютъ для опредѣленія x уравненіе квадратное, по кр. мѣрѣ, не высшей степени; но легко показать, что ур-ніе это не ниже второй степени. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы ур-ніе, опредѣляющее x, было $\alpha x + \beta = 0$, гдѣ α отлично отъ нуля, то, какъ x - конечно, имѣли бы $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, и слѣд. x, будучи соизмѣримо, разлагалось бы въ конечную непрерывную дробь. Но этотъ результатъ противорѣчитъ, съ одной стороны, положенію, а съ другой свойству, доказанному въ § 863.

Приложенія.

878. Превращеніе обыкновенныхъ и десятичныхъ дробей въ непрерывныя.

Когда числитель и знаменатель обыкновенной дроби выражены въ большихъ числахъ, удобнѣе, для болѣе яснаго сужденія о ея величинѣ, обративъ ее въ непрерывную, составить приближенія. Пріемъ для обращенія простой дроби въ непрерывную, указанъ въ § 862.

Примѣръ. *Обратить дробь* $\frac{76895}{19527}$ *въ непрерывную.*

Дѣлимъ числ. на знам., знаменателя на 1-й остатокъ, 1-й остатокъ на 2-й и т. д.; дѣйствія эти располагаемъ такъ

	3	1	15	10	5	5	1	3
76895	19527	18314	1213	119	23	4	3	1
18314	1213	6184	23	4	3	3	0	
		119						

Неполныя частныя помѣщены въ верхней графѣ. Имѣемъ

$$\frac{76895}{19527}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}}$$

Подходящія дроби суть:

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{63}{16},\ \frac{634}{161},\ \frac{3233}{82},\ \frac{16799}{4266},\ \frac{20032}{5087},\ \frac{76895}{19527}.$$

Взявъ напр., за истинную величину данной дроби приближеніе $\frac{63}{16}$, нашли бы, что погрѣшность меньше $\frac{1}{16\times 161}$ или $\frac{1}{2576}$; и т. д.

Приводимъ примѣръ на превращеніе десятичныхъ дробей въ непрерывныя.

Примѣръ.—*Найти приближенія числа* π.

Оно содержится между двумя дробями

$$A=\frac{3141592653}{10^9} \text{ и } B=\frac{3141592654}{10^9}.$$

Развертывая ихъ въ непрерывныя дроби, находимъ, что общія обоимъ разложеніямъ неполныя частныя суть: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1; такъ-что

$$\pi = |\ 3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1.\ .\ .\ .\ |$$

Отсюда имѣемъ слѣдующія подходящія дроби къ π:

$$\frac{3}{1};\ \frac{22}{7};\ \frac{333}{106};\ \frac{355}{113};\ \frac{103993}{33102}.$$

Таковы простѣйшія значенія π; изъ нихъ второе приписываютъ *Архимеду*, третье—*Ривардy,* четвертое—*Адріану Мецію.*

879. Разложеніе ирраціональныхъ квадратныхъ корней.

Примѣръ I.—*Разложить* $\sqrt{13}$.

Вычисляя $\sqrt{13}$ съ точностью до 1, находимъ, что онъ содержится между 3 и 4, такъ-что

$$\sqrt{13}=3+\frac{1}{y}, \text{ гдѣ } y>1.$$

Для нахожденія y пользуемся этимъ ур-мъ; изъ него

$$y=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}.$$

Но $3<\sqrt{13}<4$; откуда $6<\sqrt{13}+3<7$, слѣд. $\frac{\sqrt{13}+3}{4}$ содержится между $\frac{6}{4}$ и $\frac{7}{4}$, т. е. больше 1, но <2, такъ-что

$$y=\frac{\sqrt{13}+3}{4}=1+\frac{1}{y_1}, \text{ гдѣ } y_1>1.$$

Отсюда

$$y_1=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{4(\sqrt{13}+1)}{12}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}.$$

Замѣчая, что $3<\sqrt{13}<4$, имѣемъ отсюда $4<\sqrt{13}+1<5$., слѣд., $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$ содержится между $\frac{4}{3}$ и $\frac{5}{3}$, т. е. >1, но <2; потому

$$y_1=\frac{\sqrt{13}+1}{3}=1+\frac{1}{y_2}$$

Продолжая такимъ образомъ, имѣемъ

$$\sqrt{13}=3+\frac{1}{y}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y}=\sqrt{13}-3$$

$$y=1+\frac{1}{y_1}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_1}=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

$$y_1=1+\frac{1}{y_2}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_2}=\frac{\sqrt{13}-2}{3}$$

$$y_2=1+\frac{1}{y_3}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_3}=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$$

$$y_3=1+\frac{1}{y_4}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_4}=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

$$y_4=6+\frac{1}{y_5}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_5}=\sqrt{13}-3.$$

Отсюда заключаемъ, что $y_5=y$, такъ что начиная съ этого мѣста будутъ повторяться прежнія неполныя частныя, и потому

$$x=\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+}}}}}} \text{ и. т. д.}$$

Для повѣрки результата, обратимъ найденную періодическую дробь въ ирраціональность, изъ которой она возникла. Перенеся 3 въ первую часть, имѣемъ

$$x-3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}}$$

Это есть періодич. дробь съ пятичленнымъ періодомъ; къ знаменателю 6 пятаго члена прикладывается снова вся періодич. дробь $x-3$; такъ-что

$$x-3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+x-3.}}}}}$$

Обращаемъ вторую часть этого ур-нія въ обыкновенную дробь.

$$1+\frac{1}{3+x}=\frac{4+x}{3+x};\ 1+\frac{1}{\left(\frac{4+x}{3+x}\right)}=\frac{7+2x}{4+x};\ 1+\frac{1}{\left(\frac{7+2x}{4+x}\right)}=\frac{11+3x}{7+2x};$$

$$1+\frac{1}{\left(\frac{11+3x}{7+2x}\right)}=\frac{18+5x}{11+3x};\ \text{наконецъ}\ x-3=\frac{11+3x}{18+5x}.$$

Это ур-ніе приводится къ квадратному $x^2=13$, откуда положит. корень $x=\sqrt{13}$.

Примѣръ II.—*Разложить* $\sqrt{a^2+1}$ *въ непрерывную дробь, полагая, что* a *— цѣлое положительное число.*

Пусть $x=\sqrt{a^2+1}$; такъ какъ x содержится между a и $a+1$, то можемъ положить $x=a+\frac{1}{x_1}$, а слѣд. $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x_1}$, откуда $x_1=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$ $=a+\sqrt{a^2+1}.$

Замѣчаемъ, что x_1 содержится между $2a$ и $2a+1$, такъ что $x_1=2a+\frac{1}{x_2}$, или $a+\sqrt{a^2+1}=2a+\frac{1}{x_2}$, откуда $x_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$. Отсюда видно, что $x_2=x_1$, а потому

$$\sqrt{a^2+1}=|\ a;\ 2a,\ 2a,\ 2a, \dots |.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $a=1;\ 2;\ 3; \dots$ найдемъ

$$\sqrt{2}=|\ 1;\ 2,\ 2, \dots |$$
$$\sqrt{5}=|\ 2;\ 4,\ 4, \dots |$$
$$\sqrt{10}=|\ 3;\ 6,\ 6, \dots |$$

Примѣръ III. *Развернуть въ непрерывную дробь* $\sqrt{a^2+2a}$, *гдѣ* a*—цѣлое положительное число.*

Пусть $x=\sqrt{a^2+2a}$; x содержится между a и $a+1$; слѣд. $x=a+\frac{1}{x_1}$, откуда $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+2a}}{2a}$; затѣмъ $x_1=1+\frac{1}{x_2}$, откуда $x_2=a+\sqrt{a^2+2a}$. Число x_2 содержится между $2a$ и $2a+1$; положивъ $x_2=2a+\frac{1}{x_3}$, найдемъ $x_3=x_1$; так. обр.

$$x=|\ a;\ 1,\ 2a,\ 1,\ 2a. \dots |$$

Напр., положивъ $a=1$, найдемъ

$$\sqrt{3}=|\,1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots\,|.$$

Примѣръ IV.—*Развернуть корни ур-нія $x^2-5x-3=0$ въ непрерывныя дроби.*

Имѣемъ $x=\dfrac{5\mp\sqrt{37}}{2}$; взявъ большій корень, находимъ $x'=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$ $=5+\dfrac{\sqrt{37}-5}{2}=5+\dfrac{6}{\sqrt{37}+5}$ и т. д. Получаемъ неполныя частныя 5, 1, 1, 5, 1, 1.... и $x'=\dfrac{5}{1};\ \dfrac{6}{1};\ \dfrac{11}{2};\ \dfrac{61}{11};\ \dfrac{72}{13}$ и т. д.

Затѣмъ: $-x''=\dfrac{1}{2}(\sqrt{37}-5)=0+\dfrac{6}{\sqrt{37}+5}=0;\ \dfrac{1}{1};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{6}{11};\ \dfrac{7}{13}$ и т. д.

880.—Вычисленіе логариѳмовъ.

Примѣръ.—*Найти lg_{10} 200?*

Вопросъ приводится къ рѣшенію ур-нія $10^x=200$.

Полагая x послѣдовательно $=1$, 2, 3, находимъ для 10^x величины 10, 100, 1000,... Такъ какъ 200 содержится между двумя послѣдними числами, то x заключается между 2 и 3; слѣд. можно положить

$$x=2+\frac{1}{x_1}\cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

причемъ $y>x_1$. Подставляя это выраженіе вмѣсто x въ начальное ур., находимъ

$10^{2+\frac{1}{x_1}}=200$, или $10^2.10^{\frac{1}{x_1}}=200$, или $10^{\frac{1}{x_1}}=2$; а отсюда, по возвышеніи въ степень x_1:

$$2^{x_1}=10\ldots(2)$$

Полагая $x_1=1$, 2, 3, 4,... находимъ для 2^{x_1} величины 2, 4, 8, 16... Такъ какъ 10 содержится между 8 и 16, то x_1 находится между 3 и 4, такъ-что

$$x_1=3+\frac{1}{x_2},\ \cdot\cdot\cdot\cdot(3)$$

гдѣ $x_2>1$. Подставляя это значеніе x_1 въ ур. (2):

$$2^{3+\frac{1}{x_2}}=10,\ \text{или}\ 2^3.\,2^{\frac{1}{x_2}}=10,\ \text{или}\ 2^{\frac{1}{x_2}}=\frac{10}{8};$$

отсюда, по возвышеніи въ степень x_2:

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{x_2}=2\ \cdot\cdot\cdot\cdot(4)$$

Полагая x_2 послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, 4,... находимъ для $\left(\dfrac{10}{8}\right)^{x_2}$ числа $\dfrac{10}{8},\ \dfrac{100}{64},\ \dfrac{1000}{512},\ \dfrac{10000}{4096}$.

Число 2 содержится между послѣдними двумя дробями; слѣд. x_2 заключается между 3 и 4, а потому

$$x_2 = 3 + \frac{1}{x_3} \cdots (5)$$

гдѣ $x_3 > 1$. По подстановкѣ въ (4), получимъ

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{3+\frac{1}{x_3}} = 2, \text{ или} \left(\frac{10}{8}\right)^{\frac{1}{x_3}} = \frac{1024}{1000}, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{x_3} = \frac{10}{8} \cdots (6)$$

Подставляя вмѣсто x_3 числа 1, 2, 3, . . . , найдемъ число $9 < x_3 < 10$, такъ-что можно положить

$$x_3 = 9 + \frac{1}{x_4}, \text{ гдѣ } x_4 > 1.$$

Сближая результаты (1), (2) . . . , имѣемъ:

$$x = |\, 2;\ 3,\ 3,\ 9 \ldots \,|.$$

Первыя четыре приближенія къ x будутъ: $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{214}{93}$, изъ которыхъ послѣднее точно до $\frac{1}{9579}$.

Впрочемъ этотъ методъ вычисленія логариѳмовъ непрактиченъ, такъ какъ требуетъ кропотливыхъ вычисленій; потому-то для вычисленія логариѳмовъ и употребляютъ болѣе совершенный методъ безконечныхъ рядовъ.

881. Рѣшеніе неопредѣленнаго ур-нія $ax + by = c$ въ цѣлыхъ числахъ.

Примѣръ I. *Рѣшить ур-ніе* $8x + 13y = 159$.

Развернувъ отношеніе коэффиціентовъ $\frac{8}{13}$ въ непрерывную дробь, находимъ

$$\frac{8}{13} = |\, 0;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1 \,|$$

откуда подходящія дроби: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$. Взявъ разность двухъ послѣднихъ и замѣтивъ, что $\frac{8}{13}$ есть приближеніе нечетнаго порядка, по § 867 имѣемъ

$$\frac{8}{13} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{13 \times 8}, \text{ откуда } 8 \times 8 - 13 \times 5 = -1.$$

Умноживъ обѣ части на -159, находимъ

$$8.(-8.159) + 13.(5 \times 159) = 159.$$

Сравнивая это тождество съ даннымъ ур-мъ, замѣчаемъ, что послѣднее сдѣлается тождествомъ, если положить

$$x = -8 \times 159 = -1272\,;\ y = 5 \times 159 = 795.$$

Такова одна пара цѣлыхъ рѣшеній; всѣ прочія цѣлыя рѣшенія содержатся въ формулахъ

$$x = -1272 + 13t \quad \text{и} \quad y = 795 - 8t.$$

Неудобство этого метода заключается въ томъ, что обыкновенно формулы для x и y получаются недостаточно простыя.

882. Задачи.

1. Обратить въ непрерывныя слѣдующія дроби:

$$\frac{1380}{1051};\ \frac{251}{764};\ \frac{1103}{887};\ \frac{13957}{59476};\ 0{,}0241;\ 0{,}912912\ldots\ldots$$

2. Слѣдующія непрерывныя дроби обратить въ простыя:

$$|\,1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 3\,|\ ;\quad |\,0;\ 3,\ 3,\ 4,\ 2,\ 3,\ 1,\ 1.\ 2\,|$$

3. Обратить въ непрерывныя дроби

$$\frac{x^3+x^2+x}{x^3+2x^2+x+1};\quad \frac{16a^{10}+4a^8+4a^7+4a^5+1}{8a^9+2a^7+2a^4}.$$

4. Обратить въ непрерывныя дроби

$$\sqrt{53};\ \sqrt{65};\ \sqrt{310};\ 7\sqrt{6};\ 8\sqrt{0{,}26};\ \frac{1+\sqrt{8}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{7}}{6};\ \frac{6+\sqrt{6}}{6}.$$

$$\sqrt{a^2-1};\ \sqrt{a^2+a};\ \sqrt{a^2-a}.$$

5. Найти женератрисы слѣдующихъ періодич. дробей:

$$|\,0;\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5\ldots\,|\ ;\ |\,2;\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 6,\ 8,\ldots\,|$$

$$|\,0;\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ldots\ldots\,|\ ;\ |\,a;\ b,\ c,\ b,\ c,,\ldots\ldots\,|$$

$$|(n-1);1,2(n-1),1,2(n-1),\ldots.|;|(n-1);1,n-2,1,2n-2,1,n-2,1,2n-2,\ldots.|$$

6. Выразить въ формѣ непрерывныхъ дробей корни уравненій:

$$104x^2-1076x=-2783;\quad 27x^2-156x+223=0;$$

$$x^2-ax=1;\quad bx^2-abx-a=0.$$

7. Англійскій ярдъ составляетъ 0,914383 метра. Найти приближенныя отношенія метра къ ярду.

8. Экваторіальный радіусъ земли $=6377398$ метрамъ; ея полярный радіусъ $=$ $=6356080$ метр. Выразить въ простѣйшихъ числахъ отношеніе экваторіальнаго діаметра къ полярному.

9. Продолжительность тропическаго года (къ которому календарь д. б. возможно ближе) равна 365,242264 среднимъ солнечнымъ суткамъ. Каковы простѣйшія отношенія этого года къ гражданскому году въ 365 дней.

10. По истеченіи скольких лѣтъ въ 365 среднихъ солнечныхъ сутокъ нужно къ году прибавить однѣ или нѣсколько сутокъ?

11. Показать, что

$$|\,a;\ b,\ a,\ b,\ a,\ldots\,|\times|\,0;\ b,\ a,\ b,\ a,\ldots\,|=\frac{a}{b}.$$

12. Показать, что

$$|\,2a;\ a,\ 4a,\ a,\ 4a,\ldots\,|=2\sqrt{1+a^2};$$

затѣмъ, показать, что второе приближеніе отличается отъ истинной величины менѣе

чѣмъ на $\frac{1}{a(4a^2+1)}$; а отсюда положивъ $a=7$, показать, что $\frac{99}{70}$ отличается отъ $\sqrt{2}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{13790}$.

13. Показать, что третье приближеніе къ $\sqrt{a^2+a+1}$ равно $\frac{1}{2}(2a+1)$.

883. Историческое примѣчаніе.—Изобрѣтеніе непрерывныхъ дробей приписываютъ лорду *Брункеру* (1655); онъ напалъ на это открытіе, пытаясь преобразовать безконечныя выраженія, данныя Валлисомъ для площади круга. Затѣмъ *Гюйгенсъ* указалъ примѣненіе непрерывныхъ дробей къ приблизительной замѣнѣ сложныхъ отношеній простѣйшими. Настоящая теорія непрерывныхъ дробей дана была *Эйлеромъ* и усовершенствована *Лагранжемъ*, *Гауссомъ* и другими.

Конецъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ I.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Алгебраическое исчисленіе.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Уравненія и неравенства первой степени.

ЧАСТЬ II.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Уравненія и неравенства второй и высшихъ степеней.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Анализъ соединеній и его приложенія.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Теорія рядовъ и логариѳмовъ.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Непрерывныя дроби.

Прибавленіе къ главѣ XXXVI.

Теорема: *Всякое ирраціональное ур. можетъ быть освобождено отъ радикаловъ.*

Пусть данное ур. содержитъ радикалъ $\sqrt[m]{z}$, гдѣ z — выраженіе, содержащее неизвѣстныя. Обозначивъ $\sqrt[m]{z}$ буквою x и замѣнивъ различныя степени $\sqrt[m]{z}$ степенями x, всегда можемъ привести ур. къ виду ур-нія раціональнаго относительно x. Освободивъ его отъ дробей, получимъ ур. вида:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \ldots (1)$$

гдѣ A_0, $A_1, \ldots$ не содержатъ $\sqrt[m]{z}$, но могутъ содержать другіе радикалы. Если здѣсь окажутся члены съ степенями x — са, большими m, то въ такихъ членахъ можно степени x сдѣлать ниже. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ членъ съ x^k, гдѣ $k \geqq m$; раздѣливъ k на m и обозначивъ цѣлое число въ частномъ буквою q, а остатокъ r, напишемъ:

$$A_kx^k = A_k x^{mq+r} = A_k x^{mq}.x^r;$$

но $z = x^m$, откуда: $x^{mq} = z^q$; слѣд.

$$A_k x^k = A_k z^q x^r,$$

гдѣ $r < m$, а коэффиціентъ при x^r не содержитъ радикала $\sqrt[m]{z}$.

Понизивъ такимъ образомъ всѣ степени x, въ которыхъ показатели $\geqq m$, и собравъ члены съ одинаковыми степенями x, получимъ ур.

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots + A_{m-1}x^{m-1} = 0 \ldots (2).$$

Умножая это ур. сначала на x, потомъ на $x^2 \ldots$, на x^{m-1}, и понижая каждый разъ степени x, высшія или равныя m-ой, получимъ $m - 1$ ур-ній:

$$A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 + \ldots\ldots\ldots + A_{m-1}z = 0$$
$$A_0x^2 + A_1x^3 + A_2x^4 + \ldots + A_{m-2}z + A_{m-1}zx = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_0x^{m-1} + A_1z + A_2zx + \ldots\ldots + A_{m-1}zx^{m-2} = 0.$$

Эти ур-нія, вмѣстѣ со (2), даютъ систему m уравненій съ $m - 1$ количествами: x, x^2, $x^3 \ldots$, x^{m-1}, которыя и можно исключить изъ этой системы; въ результатѣ исключенія получится одно ур., не содержащее буквы x, т.-е. свободное отъ радикала $\sqrt[m]{z}$.

Примѣръ. Освободить отъ радикаловъ

$$a + 5\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} = 0.$$

Положивъ $\sqrt[3]{x} = u$, и сл. $\sqrt[3]{x^2} = u^2$, найдемъ

$$a + 5u - 2u^2 = 0 \ldots\ldots (1).$$

Помноживъ сперва на u, потомъ на u^2, получимъ:

$$au + 5u^2 - 2u^3 = 0$$
$$au^2 + 5u^3 - 2u^4 = 0.$$

Но $u^3 = x$, $u^4 = ux$; слѣд. послѣднія 2 ур. будутъ вида

$$au + 5u^2 - 2x = 0 \ldots\ldots (2)$$

$$au^2 + 5x - 2ux = 0 \ldots\ldots (3).$$

Исключая изъ ур. (1), (2) и (3) количество u, найдемъ

$$8x^2 - 125x - 30ax - a^3 = 0,$$

ур-ніе свободное отъ радикаловъ.

Освобожденіе ур-нія (2) отъ радикаловъ можно еще выполнить такъ. Умножимъ обѣ его части на полиномъ

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + B_{m-2} x^{m-2} + x^{m-1},$$

гдѣ коэффиціенты на время оставляемъ неопредѣленными. Умноженіе даетъ

$$A_0 B_0 + (A_0 B_1 + B_0 A_1)x + \ldots\ldots\ldots + A_{m-1} x^{2m-2} = 0.$$

Понизивъ степени x, гдѣ они $\geqq m$, получимъ ур.

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots C_{m-1} x^{m-1} = 0 \ldots\ldots (4)$$

гдѣ C_0, $C_1 \ldots$ суть 1-й степени относительно коэффиціентовъ B. Пользуясь неопредѣленностью послѣднихъ, полагаемъ

$$C_1 = o,\ C_2 = o\ \ldots\ldots\ldots\ C_{m-1} = 0,$$

откуда найдемъ всѣ $m - 1$ коэффиціентовъ B_0, $B_1 \ldots B_{m-2}$. Подставивъ ихъ въ ур. (4), получимъ

$$C_0 = 0$$

ур-ніе, не содержащее радикала $\sqrt[m]{z}$.

Примѣчаніе. Этотъ способъ уничтоженія ирраціональности въ ур-ніяхъ умноженіемъ на нѣкоторый полиномъ, очевидно, можно прилагать и для уничтоженія ирраціональности въ знаменателяхъ дробей; для этого нужно только умножить числителя и знаменателя на прилично выбранный многочленъ.

Ц. 10 к.